



MI - Observatoire de Paris

Module Instrumentation

Diffraction, Optique de Fourier, Interférométrie et Optique Adaptative

Sylvestre Lacour, sylvestre.lacour@obspm.fr

LESIA, Observatoire de Paris

Remerciement: P. Kervella

L'objectif du cours

- Présenter les concepts d'optique physique de base utiles pour comprendre la **diffraction** et la **formation des images** dans les instruments astronomiques.
- Introduire le concept de **cohérence** du front d'onde lumineux et sa relation à la structure spatiale de la source.
- Décrire les techniques de l'**interférométrie optique** et l'**optique adaptative**

Références

- « **Adaptive Optics for Astronomy** » par D.M. Alloin and J.-M. Mariotti, NATO ASI Series, 1993
- « **Optique** » par Eugene Hecht, Pearson Education, 2005
- « **Théorie de la diffraction** », Wikipedia,
http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_de_la_diffraction
- « **L'Observation en Astrophysique** » Pierre Léna & Daniel Rouan, EDP Sciences/CNRS, 2008
- « **Introduction to Fourier Optics and Coherence** » Jean-Marie Mariotti, *Diffraction Limited Imaging with Very Large Telescopes*, Alloin & Mariotti ed., Kluwer, 1989

Plan du cours

- **2 Fev:** Diffraction, pupille rectangulaire, circulaire, résolution, Optique de Fourier
- **9 Fev :** Atmosphère, optique adaptative, analyse de front d'onde.
- **3 Mars :** Cohérence temporelle et spatiale, interférométrie

Transparents disponibles:

Diffraction. Optique de Fourier (Cours 1):

<http://lesia.obspm.fr/perso/sylvestre-lacour/M1SL-1.pdf>

Atmosphère et optique adaptative(Cours 2):

<http://lesia.obspm.fr/perso/sylvestre-lacour/M1SL-2.pdf>

Cohérence, interférométrie(Cours 3):

<http://lesia.obspm.fr/perso/sylvestre-lacour/M1SL-3.pdf>

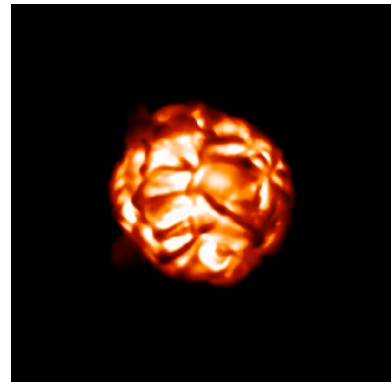
Sténopé = optique géométrique



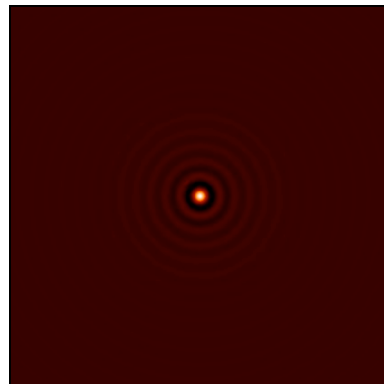
La limitation par la diffraction

Image IR de Bételgeuse convoluée par la réponse impulsionnelle d'un télescope de diamètre :

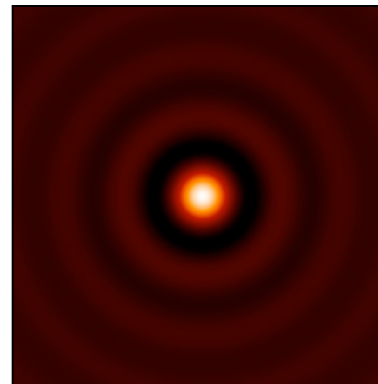
Bételgeuse simulée par Freytag (2003). Le diamètre angulaire de la supergéante est de 43 mas.



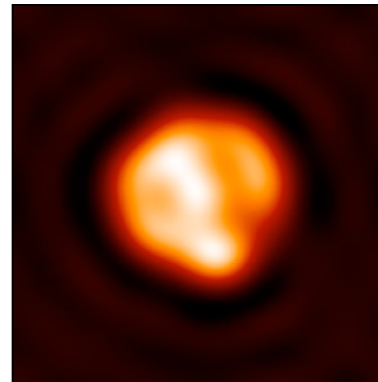
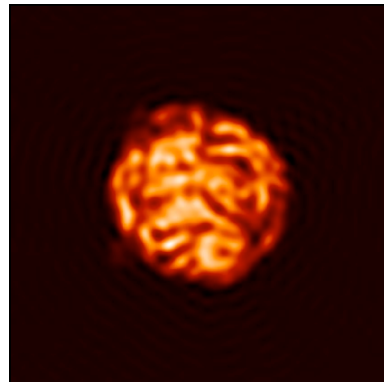
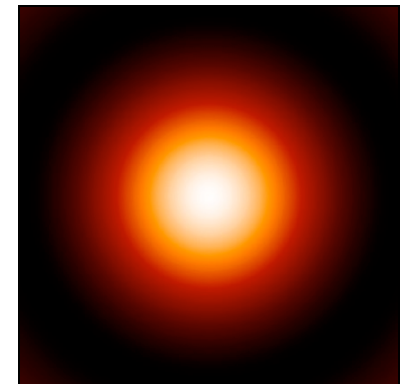
250 mètres



60 mètres



15 mètres



L'importance de la diffraction

- Tous les instruments optiques sont concernés par la diffraction, du fait de leurs dimensions finies, et notamment de la présence de **pupilles**
- Il n'y a pas de différence physique entre la **diffraction** et les **interférences**: ces deux phénomènes résultent de la superposition d'ondes

Diffraction = optique ondulatoire



Principes fondamentaux

- **Principe de Huygens:**

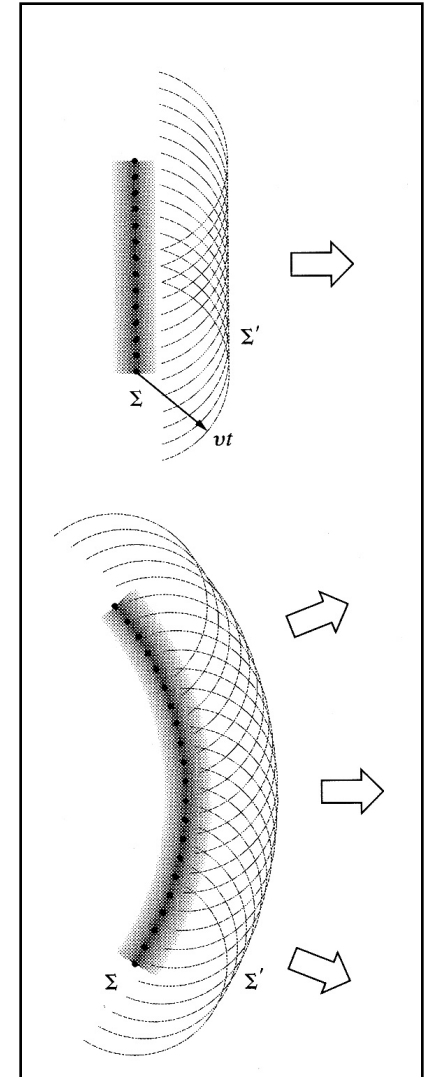
Tout point d'un **front d'onde** à un temps t peut être considéré comme la source d'**ondelettes secondaires sphériques**. L'*enveloppe* de ces ondelettes constitue le front d'onde à un temps ultérieur.

- **Principe de Huygens-Fresnel:**

Tous les éléments de surface d'une **ouverture** (ou d'une **pupille**) peuvent être considérés comme la source d'**ondelettes secondaires sphériques**.

L'amplitude de l'ondelette émise par une source secondaire est proportionnelle à celle de l'onde incidente et à l'aire de l'élément de surface.

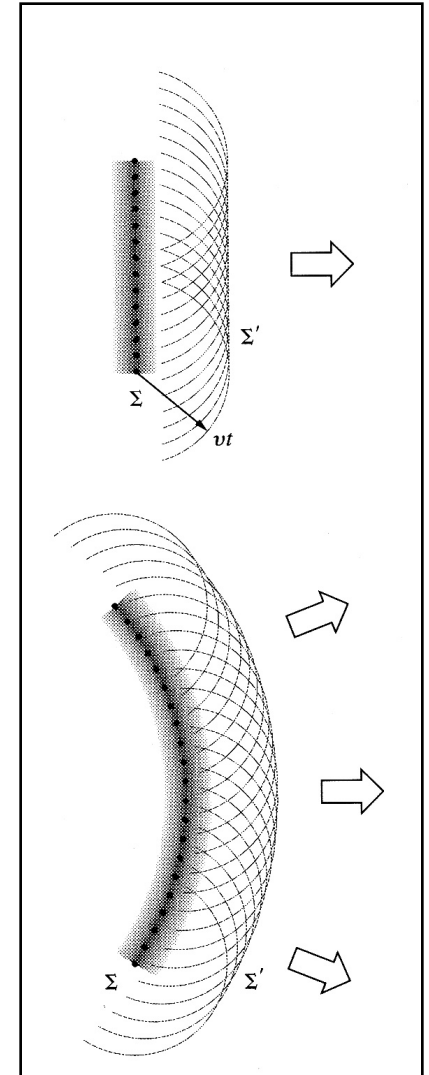
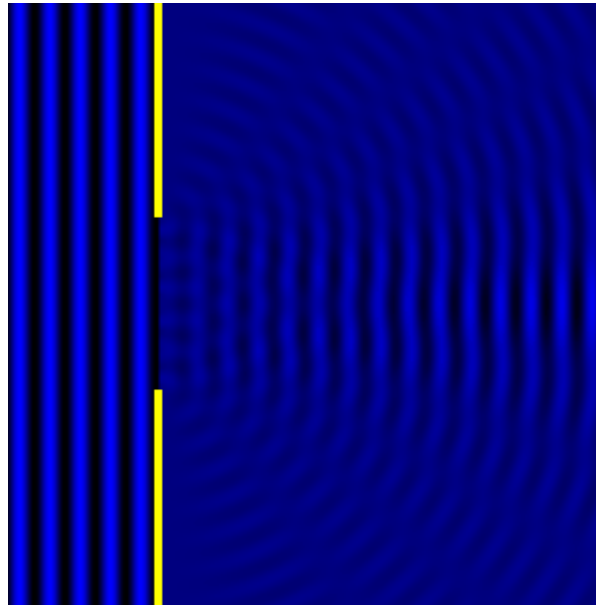
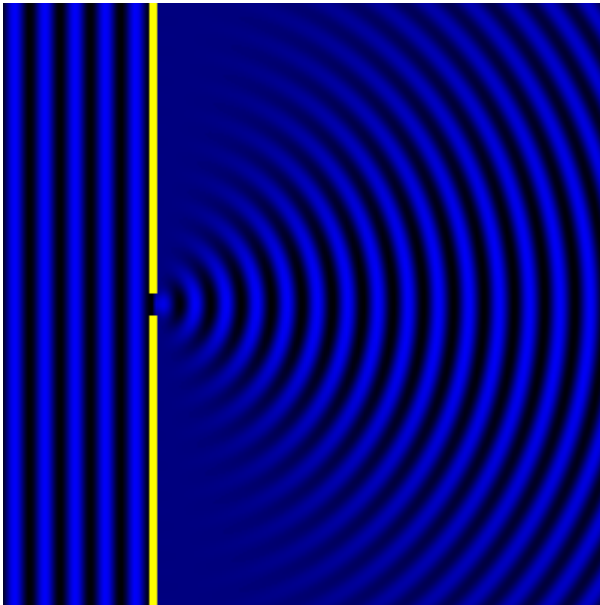
Les ondelettes émises par l'ensemble de ces sources secondaires *interfèrent* entre elles pour donner l'*onde diffractée*.



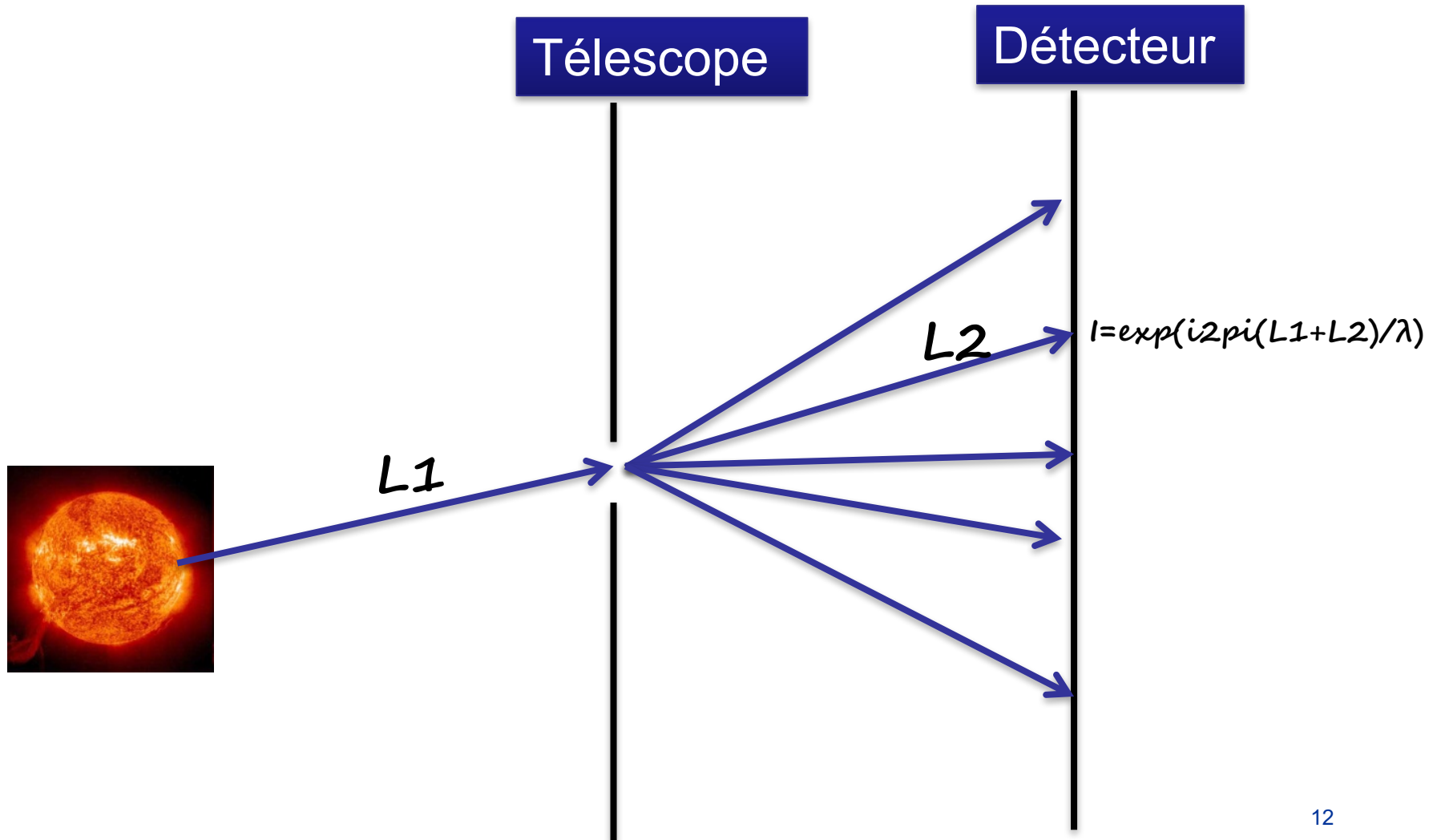
Principes fondamentaux

- **Principe de Huygens-Fresnel:**

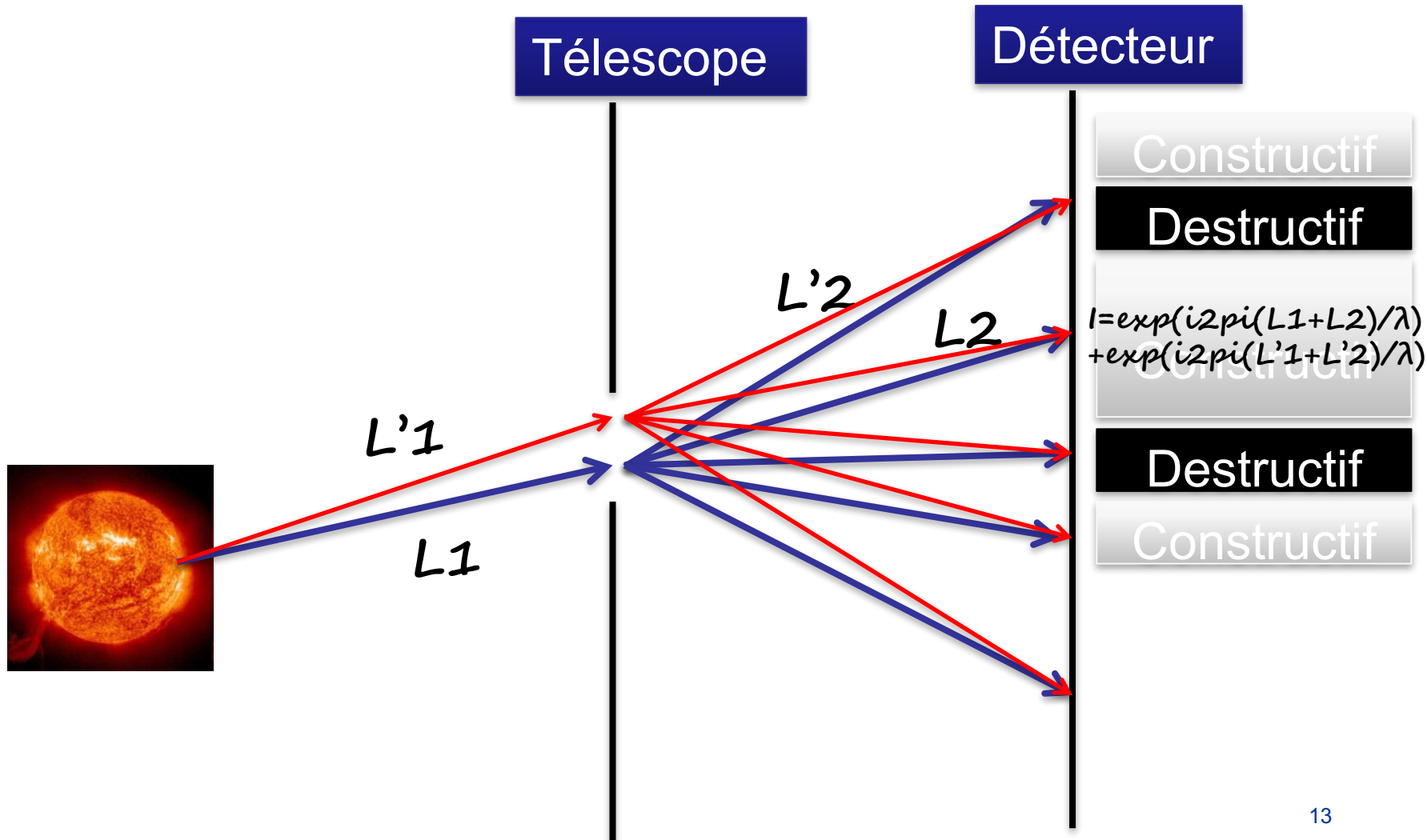
Tous les éléments de surface d'une **ouverture** (ou d'une **pupille**) peuvent être considérés comme la source d'**ondelettes secondaires sphériques**.



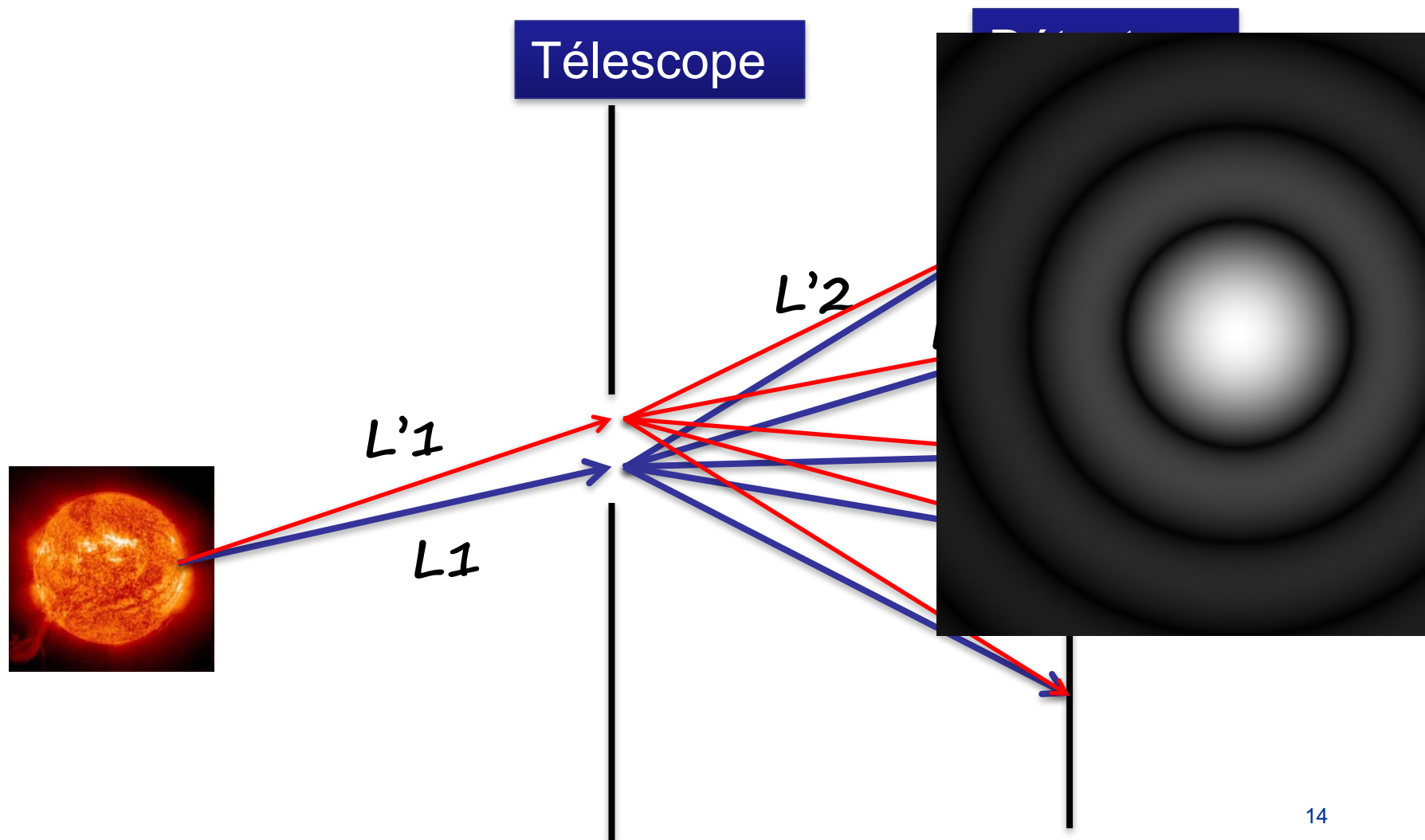
Introduction à la tache d'Airy



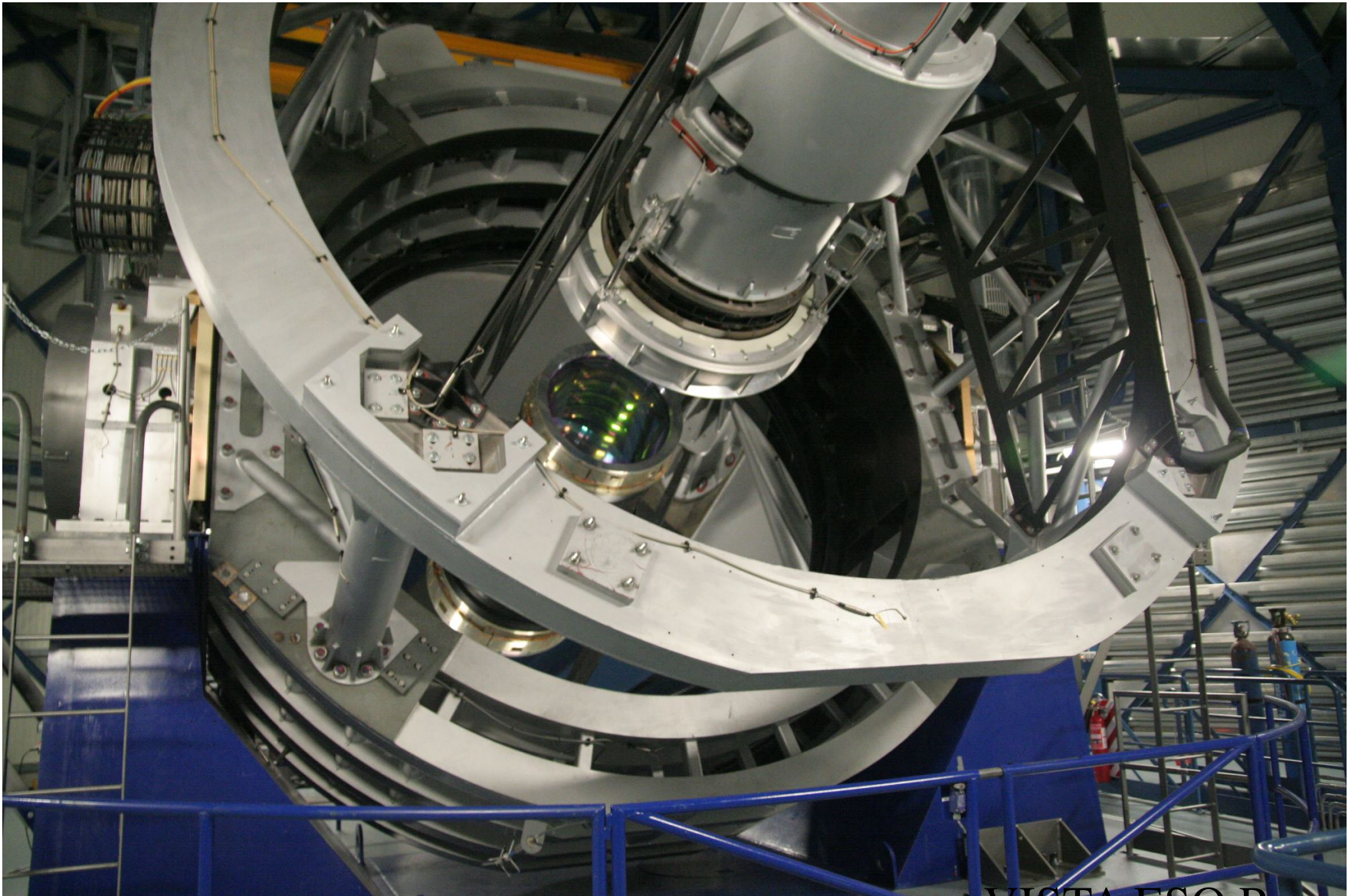
Introduction à la tache d'Airy



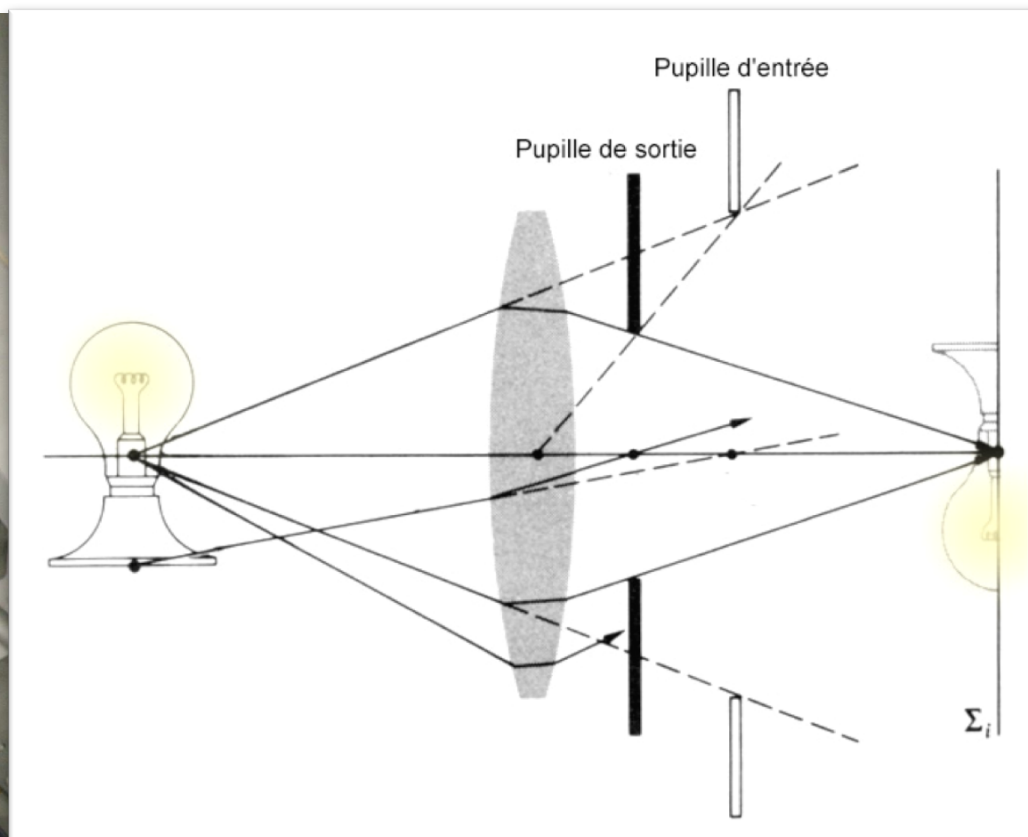
Introduction à la tache d'Airy



Définition des pupilles d'un système optique



Définition des pupilles d'un système optique

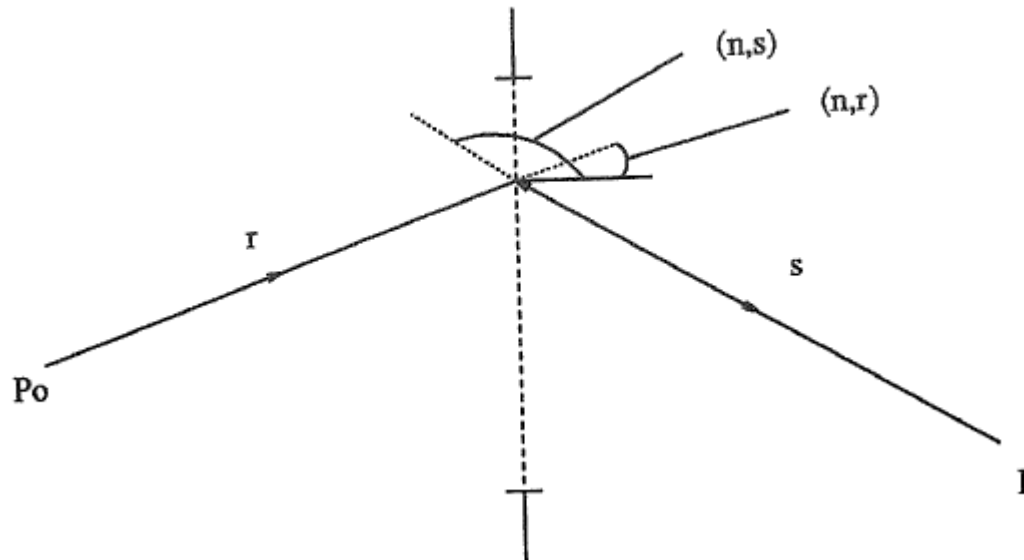


- La pupille : là ou passe tout les rayons
- Entrée: image du diaphragme vu depuis l'objet
- Sortie: image du diaphragme vu depuis le plan image

Cas général de la diffraction

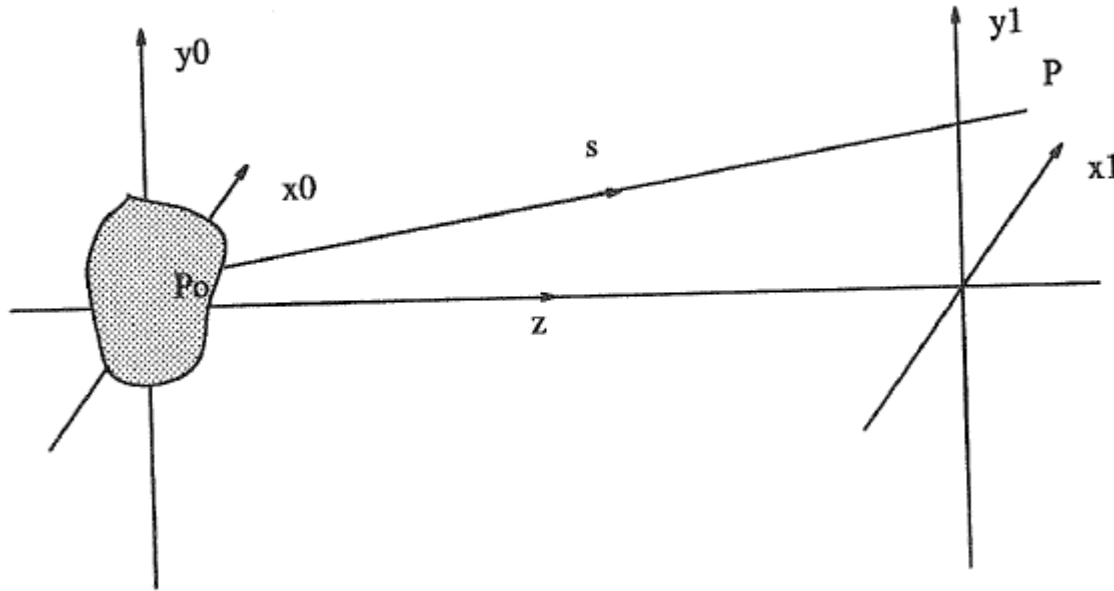
- Le principe de Huygens-Fresnel de la diffraction peut être résumé par l'équation:

$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} [\cos(n, r) - \cos(n, s)] ds$$



**Le champ en P vient de la superposition des sources virtuelles
au sein de l'ouverture**

Diffraction de Fresnel



- Hypothèse de Fresnel: z grand par rapport à x_0 , x_1 , y_0 , y_1 .

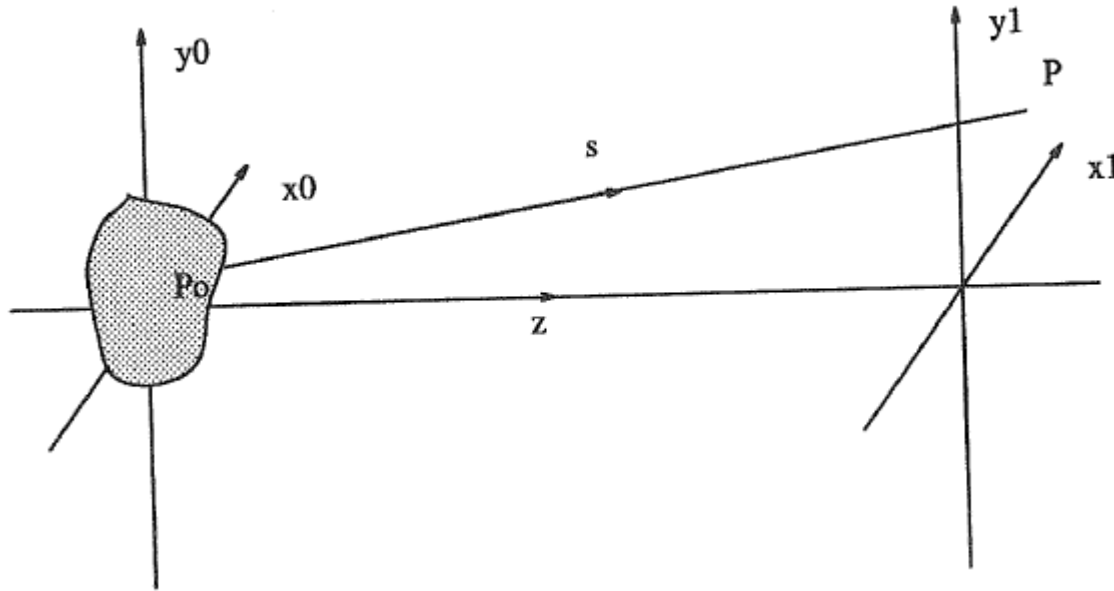
Alors:

$$U(x_1, y_1) = -\frac{i}{\lambda z} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x_0, y_0) e^{ik\sqrt{z^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}} dx_0 dy_0$$

$$U(x_1, y_1) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z} [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2]} dx_0 dy_0 \quad \langle \approx \rangle$$

$$\left(\sqrt{r^2 + (x - X)^2 + (y - Y)^2} \simeq r \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - X}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - Y}{r} \right)^2 \right] \right)$$

Diffraction de Fresnel



- Hypothèse de Fresnel: z grand par rapport à x_0 , x_1 , y_0 , y_1 .

Alors:

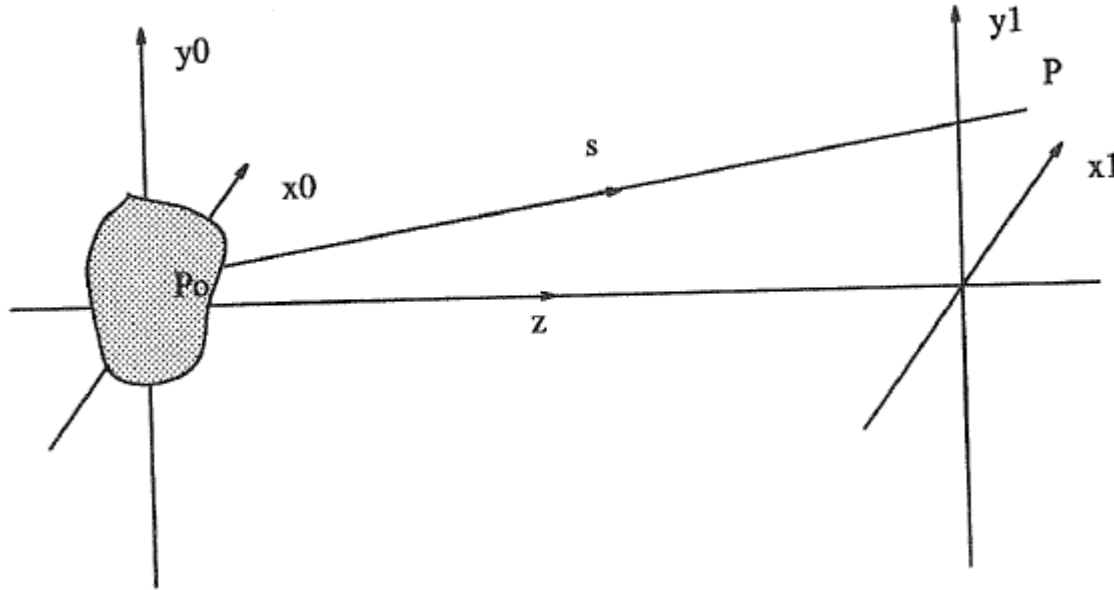
$$U(x_1, y_1) = -\frac{i}{\lambda z} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x_0, y_0) e^{ik\sqrt{z^2+(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}} dx_0 dy_0$$

$$U(x_1, y_1) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z}[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]} dx_0 dy_0 \quad \langle \approx \rangle$$

$\langle \Rightarrow \rangle$

$$U(x_1, y_1) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}[x_1^2+y_1^2]} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ U(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z}[x_0^2+y_0^2]} \right\} e^{\frac{-i2\pi}{\lambda z}[x_0x_1+y_0y_1]} dx_0 dy_0$$

Diffraction de Fresnel

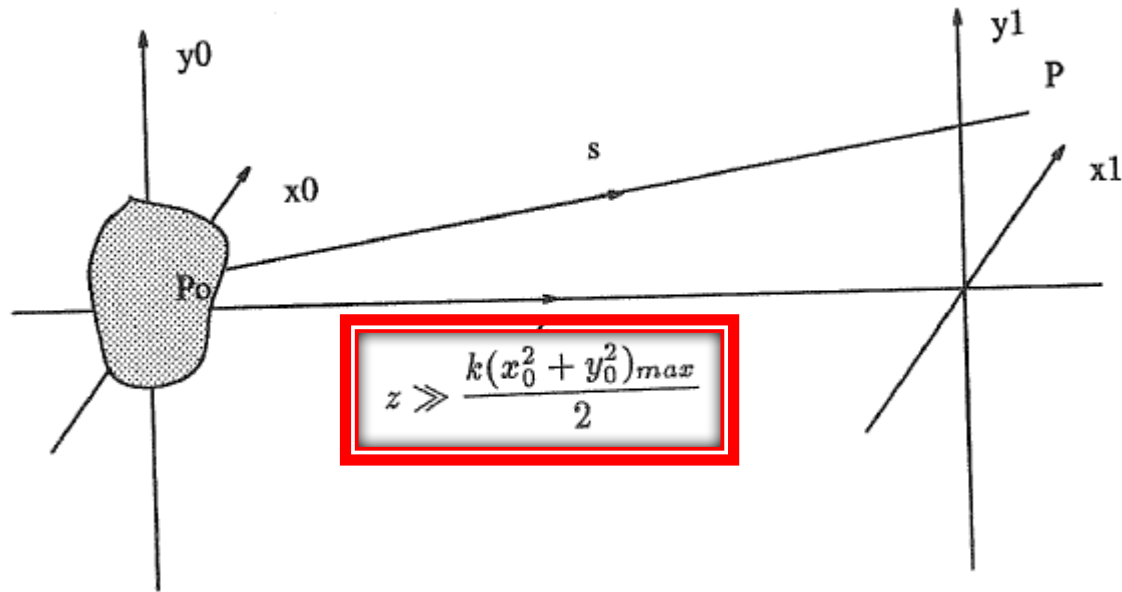


- Hypothèse de Fresnel:

$$U(x_1, y_1) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}[x_1^2 + y_1^2]} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ U(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z}[x_0^2 + y_0^2]} \right\} e^{\frac{-i2\pi}{z\lambda}[x_0 x_1 + y_0 y_1]} dx_0 dy_0$$

Le champ à une distance z du plan pupille est la transformée de Fourier du champ modifié : $\hat{U}(x_0, y_0) \exp\left(\frac{ik}{2z}[x_0^2 + y_0^2]\right)$

Diffraction de Fraunhofer



- Hypothèse de Fraunhofer « champ lointain »:

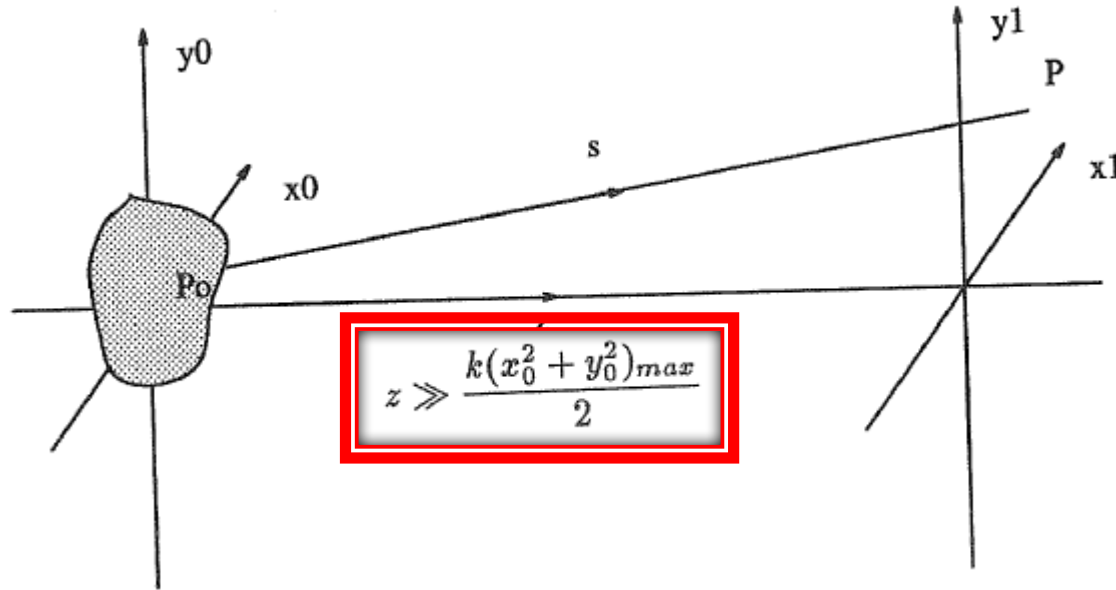
$$U(x_1, y_1) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}[x_1^2 + y_1^2]} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ U(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z}[x_0^2 + y_0^2]} \right\} e^{\frac{-i2\pi}{z\lambda}[x_0 x_1 + y_0 y_1]} dx_0 dy_0$$

$\langle \approx \rangle$

$$U(x_1, y_1) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}[x_1^2 + y_1^2]} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x_0, y_0) e^{\frac{-i2\pi}{z\lambda}[x_0 x_1 + y_0 y_1]} dx_0 dy_0$$

$U(x_1, y_1)$ est alors la transformée de Fourier de $U(x_0, y_0)$

Exercice : Diffraction de Fraunhofer



- Pour une pupille de 1cm, aux longueurs d'onde du visible, calculez z pour être en « champ lointain ».
- Réponse : $z \gg 300\text{m}$

=> Les conditions de la diffraction de Fraunhofer sont rarement réunies.

Critère de l'approximation de Fraunhofer

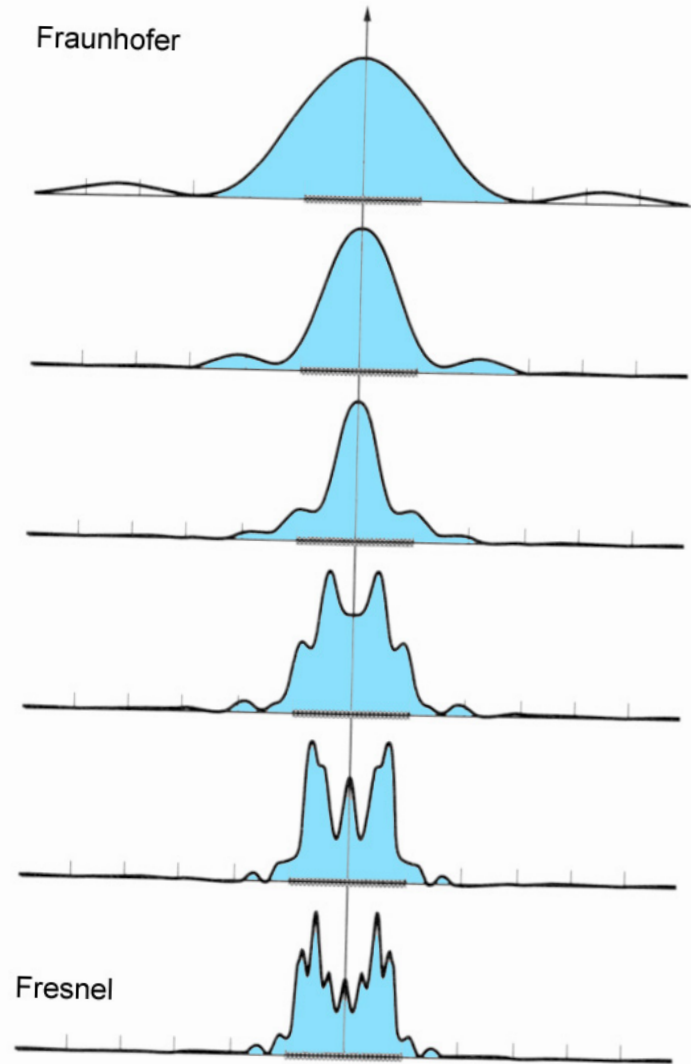
- Avec d une dimension caractéristique de l'ouverture (diamètre pour une ouverture circulaire), et r la distance entre la pupille et le plan d'observation, on se trouve dans les conditions de la diffraction de Fraunhofer si:

$$N_f = \frac{d^2}{\lambda r} \ll 1$$

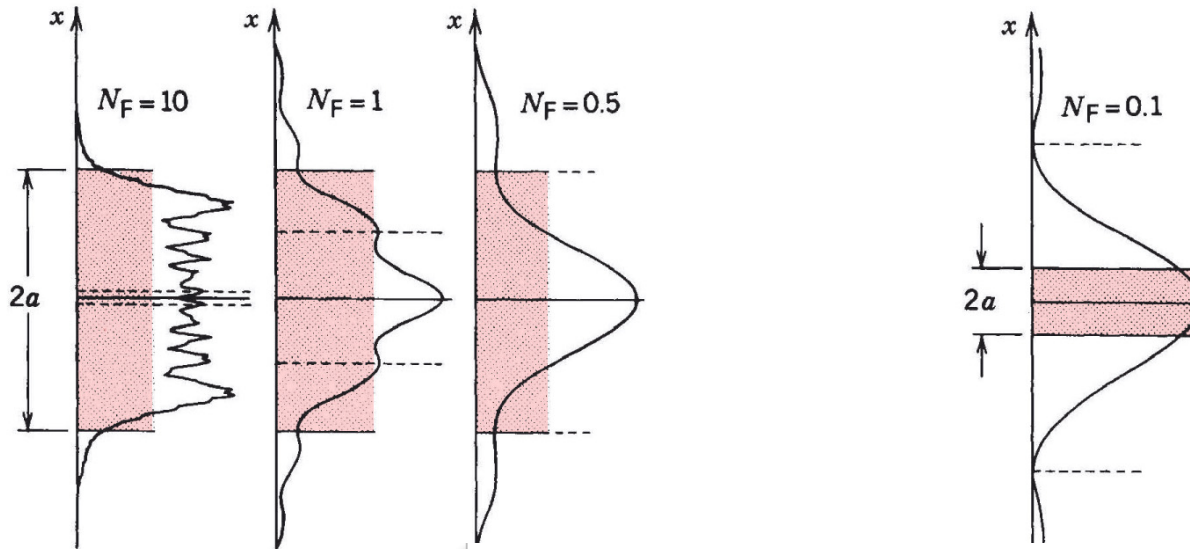
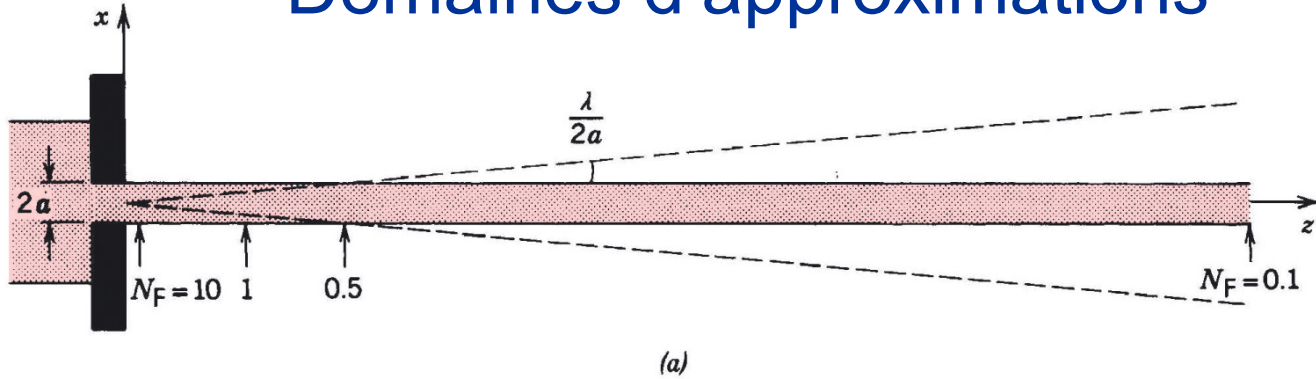
(N_f = nombre de Fresnel)

- En d'autres termes

On est dans l'approximation de Fraunhofer si l'onde incidente sur la pupille et l'onde incidente sur le plan d'observation peuvent être considérées comme planes



Domaines d'approximations

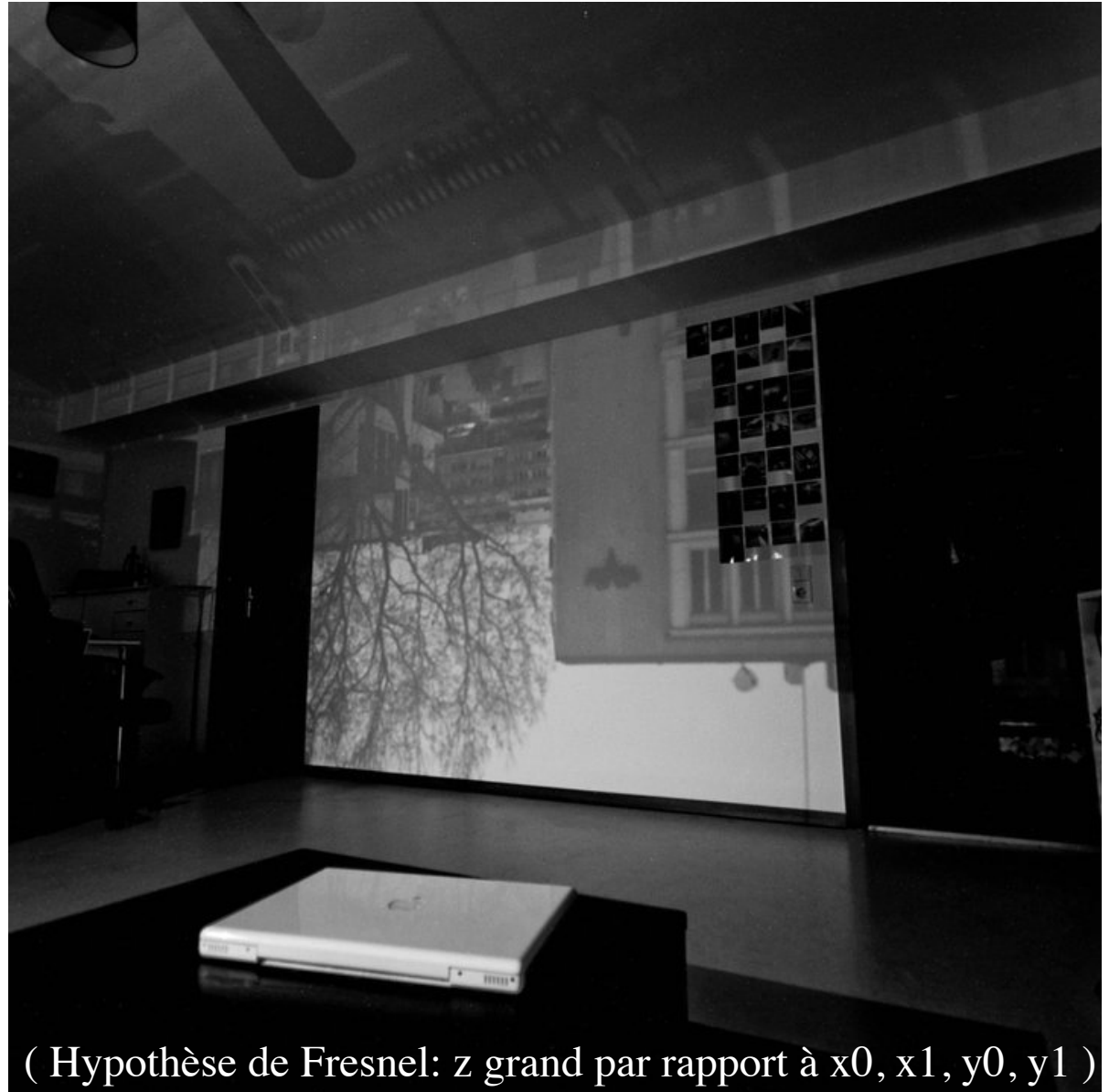


Quelles approximations ?

- $N_f \ll 1$: diffraction de Fraunhofer
- $N_f \sim 1$: diffraction de Fresnel
- $N_f \gg 1$: optique géométrique

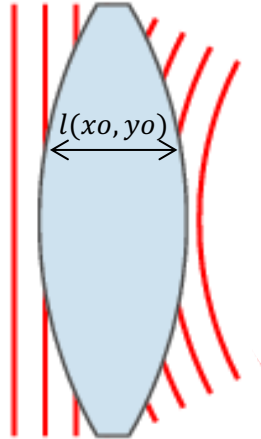
Exercice

- Optique géométrique, de Fresnel, ou de Fraunhofer?



La lentille : passage de Fresnel à Fraunhofer

$$\Delta OPD(x_0, y_0) = l(x_0, y_0) \cdot (n_{\text{verre}} - n_{\text{air}})$$



$$U'(x_0, y_0) \quad U(x_0, y_0) = U'(x_0, y_0) e^{i2\pi\Delta OPD/\lambda}$$

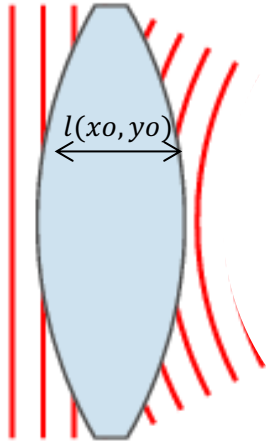
L'indice de réfraction du verre de la lentille introduit un retard de phase tel que la relation de Fresnel (U champ après la lentille):

$$U(x_1, y_1) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}[x_1^2+y_1^2]} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ U(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z}[x_0^2+y_0^2]} \right\} e^{\frac{-i2\pi}{z\lambda}[x_0x_1+y_0y_1]} dx_0 dy_0$$

devienne la relation de Fraunhofer.

La lentille : passage de Fresnel à Fraunhofer

$$\Delta OPD(x_0, y_0) = l(x_0, y_0) \cdot (n_{\text{verre}} - n_{\text{air}})$$



$$\frac{k}{2z} (x_0^2 + y_0^2) = -\frac{2\pi\Delta OPD}{\lambda}$$

$$l(x_0, y_0) = \frac{-(x_0^2 + y_0^2)}{2z(n_{\text{verre}} - n_{\text{air}})}$$

$$U'(x_0, y_0) \quad U(x_0, y_0) = U'(x_0, y_0) e^{i2\pi\Delta OPD/\lambda}$$

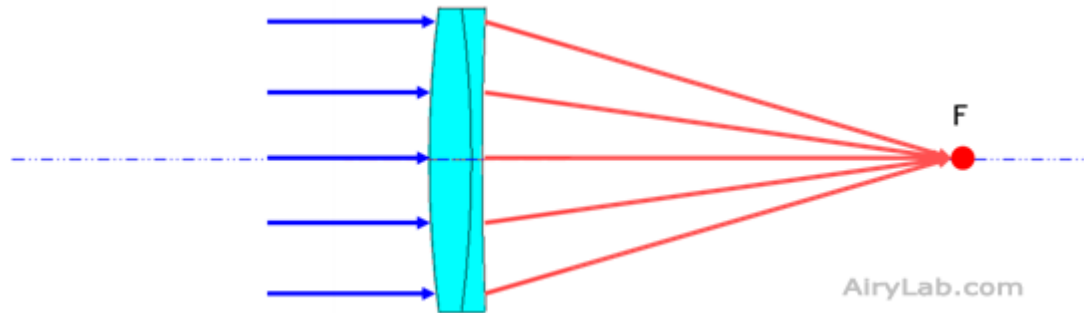
L'indice de réfraction du verre de la lentille introduit un retard de phase tel que la relation de Fresnel (U champ après la lentille):

$$U(x_1, y_1) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}[x_1^2+y_1^2]} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ U(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z}[x_0^2+y_0^2]} \right\} e^{\frac{-i2\pi}{z\lambda}[x_0x_1+y_0y_1]} dx_0 dy_0$$

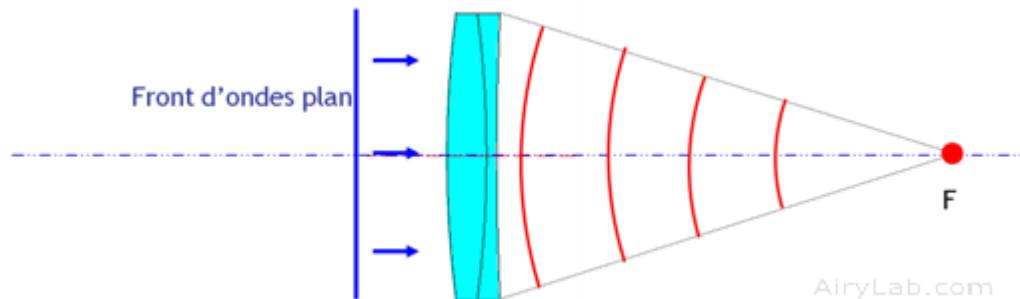
devienne la relation de Fraunhofer.

La lentille: passage de Fresnel à Fraunhofer

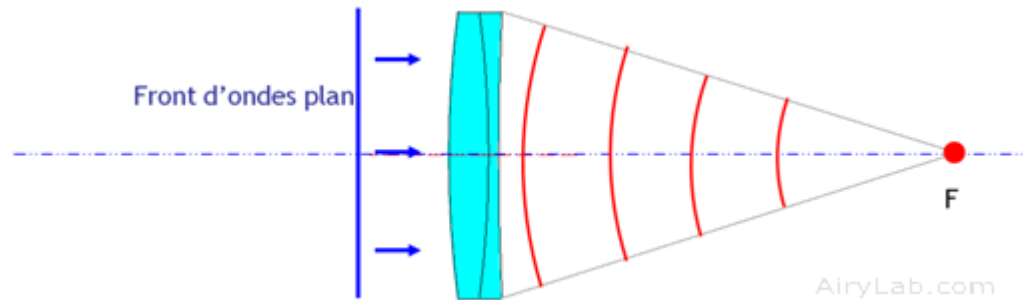
La lentille en optique géométrique :



La lentille en optique ondulatoire :



La lentille: passage de Fresnel à Fraunhofer



L'indice de réfraction du verre de la lentille introduit un retard de phase tel que la relation de Fresnel (U champ après la lentille):

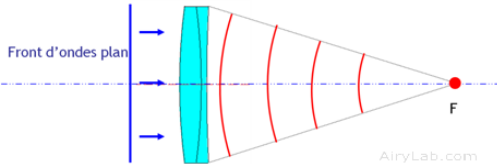
$$U(x_1, y_1) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}[x_1^2+y_1^2]} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ U(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z}[x_0^2+y_0^2]} \right\} e^{\frac{-i2\pi}{z\lambda}[x_0x_1+y_0y_1]} dx_0 dy_0$$

devienne la relation de Fraunhofer (U champ avant la lentille):

$$U(x_1, y_1) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}[x_1^2+y_1^2]} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x_0, y_0) e^{\frac{-i2\pi}{z\lambda}[x_0x_1+y_0y_1]} dx_0 dy_0$$

Exercice:

La lentille : passage de Fresnel à Fraunhofer



L'indice de réfraction du verre de la lentille introduit un retard de phase tel que la relation de Fresnel (U champ après la lentille):

$$U(x_1, y_1) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}[x_1^2+y_1^2]} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ U(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z}[x_0^2+y_0^2]} \right\} e^{-\frac{i2\pi}{z\lambda}[x_0x_1+y_0y_1]} dx_0 dy_0$$

devienne la relation de Fraunhofer.

- Pour une lentille convergente de $d=1\text{cm}$ de diamètre et $f=10\text{cm}$ de focale, quel sera son épaisseur minimale?
- Réponse : $e=(d/2)^2/(2f*(n-1))=0.25\text{mm}$
=> Les conditions de Fraunhofer sont réunies lorsque l'on utilise une lentille (ou un miroir) et que l'on se place au point focal.

Deux domaines d'approximation

- **Diffraction de Fresnel** ou **diffraction à distance finie**: le traitement en diffraction de Fresnel prend en compte la courbure du front d'onde à distance finie de la source, afin de rendre correctement le terme de phase des ondes interférentes.
- **Diffraction de Fraunhofer** ou **diffraction à l'infini**: lorsque la distance augmente entre la source et le plan d'observation, le rayon de courbure des ondes diffractées sortantes devient très grand, si bien que ces ondes peuvent être approximées par des ondes planes. Le traitement mathématique est alors simplifié.
- En utilisant un système convergent, on peut se ramener aux traitements mathématiques de Fraunhofer à distance finie.
 - > La transformée de Fourier!

Champ diffracté et transformée de Fourier

- Revenons au champ diffracté à l'infini:

$$U(x_1, y_1) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}[x_1^2+y_1^2]} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x_0, y_0) e^{\frac{-i2\pi}{z\lambda}[x_0x_1+y_0y_1]} dx_0 dy_0$$

- L'expression de la transformée de Fourier $F(s)$ d'une fonction intégrable unidimensionnelle $f(x)$ est justement:

$$\widehat{F}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx = \mathcal{F}\{f(x)\}$$

Lorsqu'une pupille est éclairée par une source située à l'infini, **l'amplitude $E(M)$ du champ diffracté est donnée par la transformée de Fourier de la fonction pupille $t(X, Y)$.**

Plus précisément, si on note $F(U)(u, v)$ la transformée de Fourier de $U(x_0, y_0)$, l'amplitude $U(x_1, y_1)$ est proportionnelle à $F(U)(x_0/\lambda z, y_0/\lambda z)$.

$$U(x_1, y_1) \propto \mathcal{F}\{U(x_0, y_0)\}$$

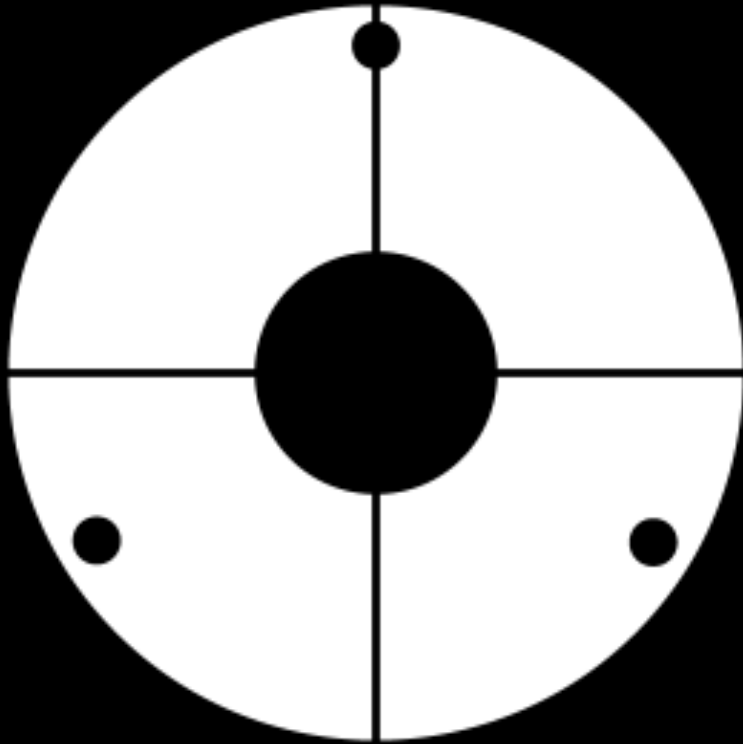
Fonction d'étalement de point

- En optique, on n'observe pas l'amplitude d'une onde électromagnétique $U(x,y)$, mais son *intensité* $I(x,y)$:

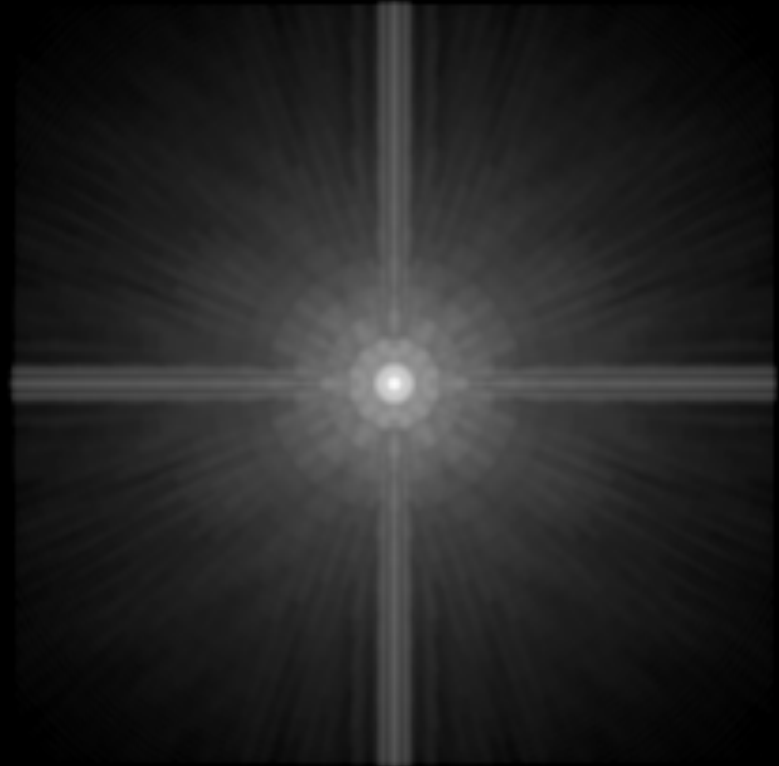
$$I(x_1, y_1) = \langle U(x_1, y_1, t)U^*(x_1, y_1, t) \rangle$$

- Dans l'approximation de Fraunhofer, la source est ponctuelle, la figure de diffraction observée est donc la **réponse impulsionnelle** du dispositif.
- $I(x,y)$ est la **Fonction d'Étalement de Point** (FEP), ou en anglais **Point Spread Function** (PSF)
- Pour un télescope, c'est l'image d'une étoile non résolue

Pupille du *Hubble Space Telescope*

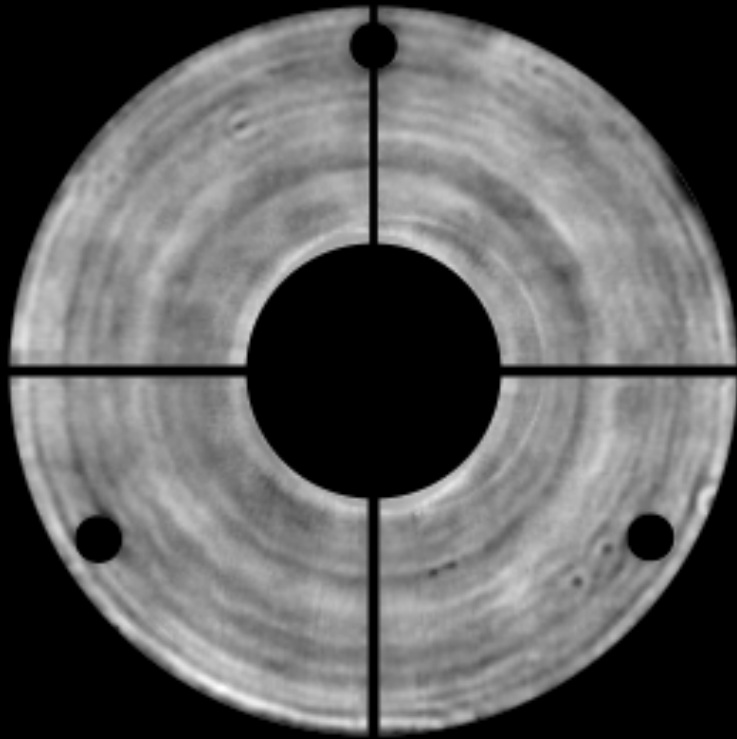


*Pupille théorique
calculée*

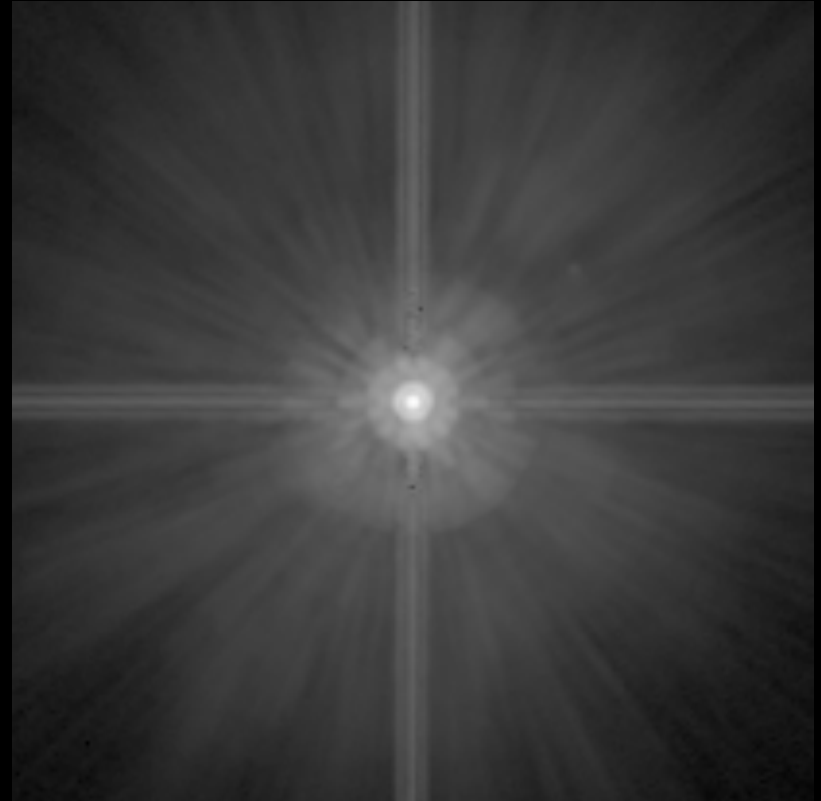


FEP

Pupille du *Hubble Space Telescope*



Pupille réelle
FEP réelle



La TF: un outil bien utile

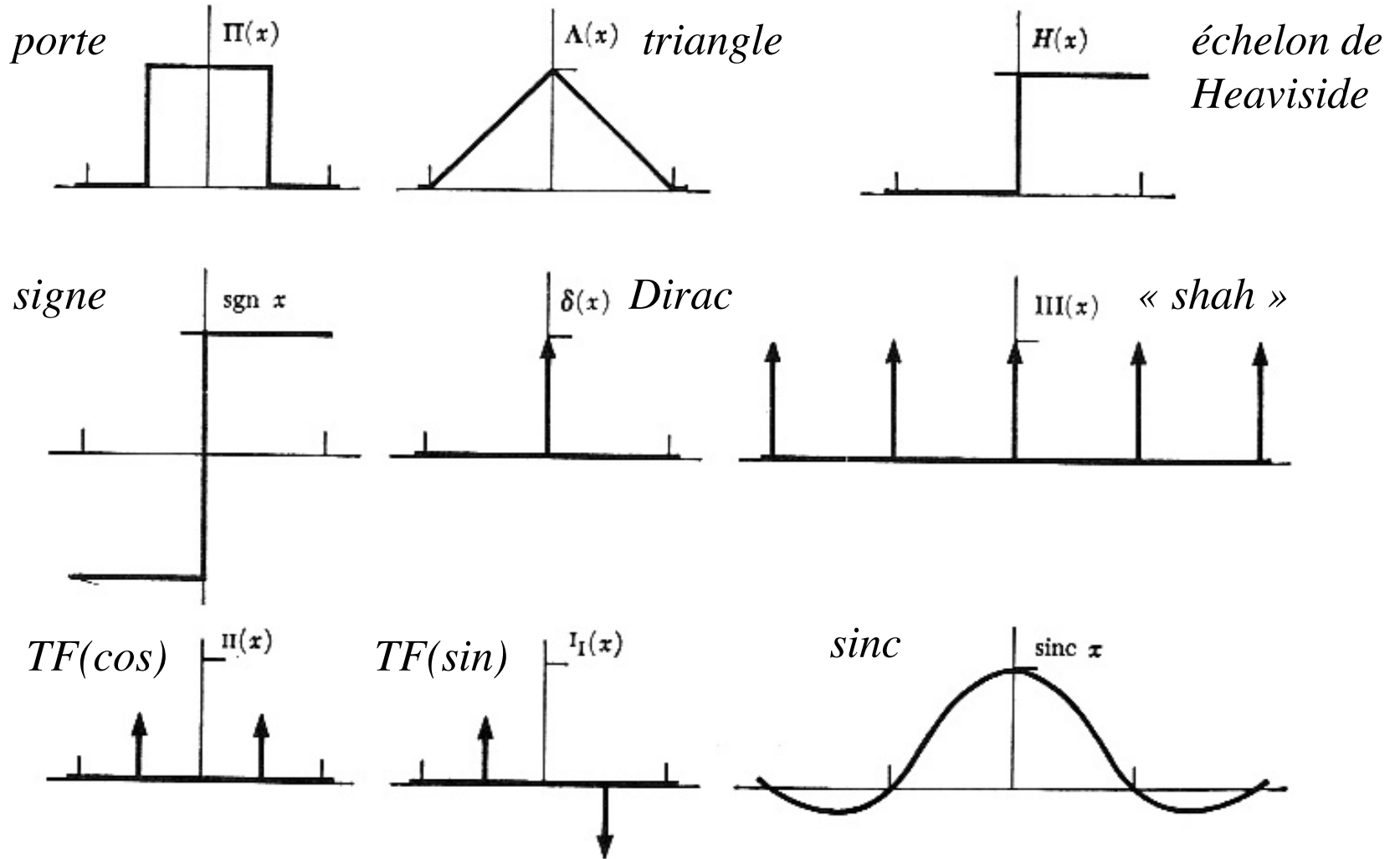
- Pour calculer le champ diffracté par une pupille de forme quelconque, **il suffit de calculer sa TF !**
- Numériquement, les ordinateurs font cela très bien (et très vite...): on parle de ***Fast Fourier Transform (FFT)*** quand on réalise la transformation de Fourier d'une fonction discrète
- Ce formalisme est utile pour la modélisation d'une grande variété d'instruments d'optique (entre autres):
 - les **réseaux** (on parle aussi d'*analyseurs de Fourier*),
 - les **pupilles apodisées**, les **masques de phase** (coronographes),
 - les **grilles** uni- ou bi-dimensionnelles,
 - les **pupilles non connexes** (interféromètres)

Digression: pourquoi l'Optique de Fourier ?

- **Joseph Fourier** (1768-1830) était mathématicien et physicien (entre autres fonctions...) mais pas opticien.
- Il a étudié la **propagation de la chaleur** dans les solides (*Théorie analytique de la chaleur*), et c'est pour décrire ce phénomène qu'il a introduit les **séries de Fourier**
- Elles permettent de synthétiser, par l'addition judicieuse de fonctions sinusoïdales, n'importe quelle fonction périodique
- La **transformation de Fourier** permet de décomposer une fonction périodique en fonctions sinusoidales



Quelques notations utiles



Quelques rappels mathématiques

- Pour une fonction unidimensionnelle:

$$F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i2\pi kx} dx$$

- et inversement,

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)e^{-i2\pi kx} dk$$

x (dimension) et k ($x/\lambda r$, fréquence spatiale) sont des variables conjuguées de Fourier
 f et F constituent une paire de Fourier

- Pour une fonction bidimensionnelle (pupilles en optique):

$$F(k_x, k_y) = \int \int f(x, y)e^{i2\pi(k_x x + k_y y)} dx dy$$

$$f(x, y) = \int \int F(k_x, k_y)e^{-i2\pi(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

Propriétés de la TF 1D

$$\mathcal{F}\{f\} = F \qquad \mathcal{F}\{g\} = G$$

- Linéarité:

$$\mathcal{F}(\lambda f + \nu g) = \lambda F + \nu G$$

- Echelle:

$$\mathcal{F}\{f(ax)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right)$$

- Décalage:

$$\mathcal{F}\{f(x - a)\} = e^{-i2\pi ka} F(k)$$

- Conservation de la parité:

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow F(k) = F(-k)$$

$$f(x) = -f(-x) \Rightarrow F(k) = -F(-k)$$

- Modulation:

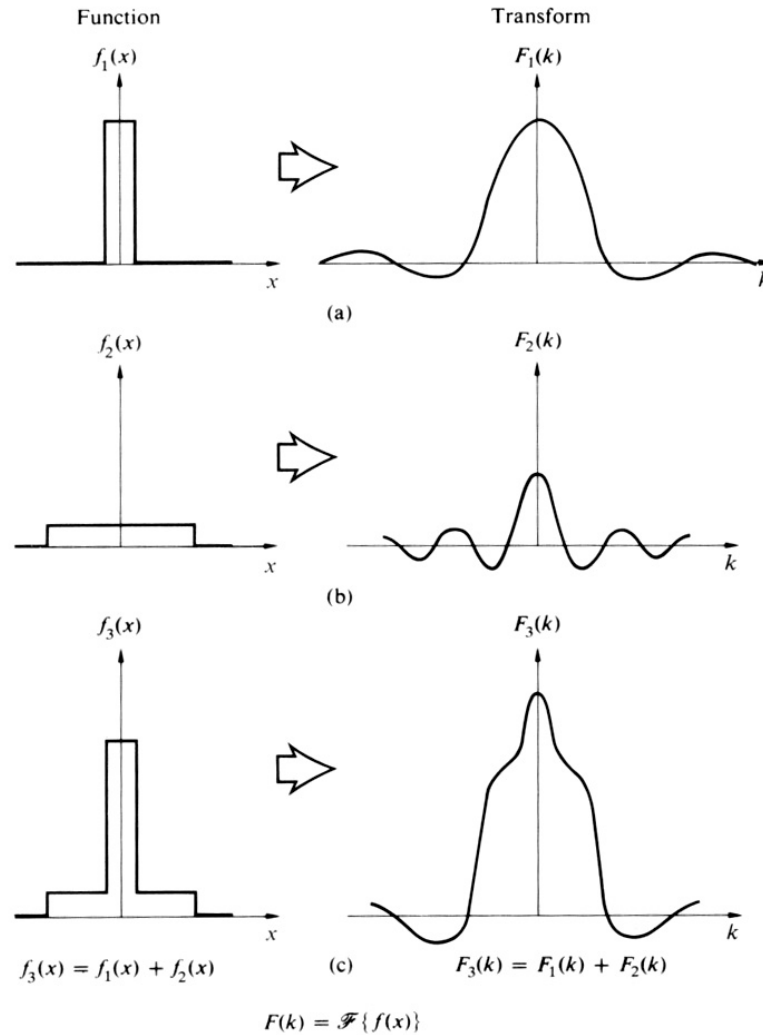
$$\mathcal{F}\{f(x) \sin(2\pi k_0 x)\} = \frac{F(k - k_0) - F(k + k_0)}{2}$$

$$\mathcal{F}\{f(x) \cos(2\pi k_0 x)\} = \frac{F(k - k_0) + F(k + k_0)}{2}$$

- Valeur à l'origine:

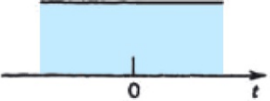


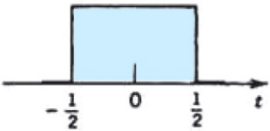
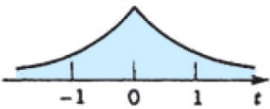



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = F(0) \qquad f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) dk$$

Combinaison de fonctions

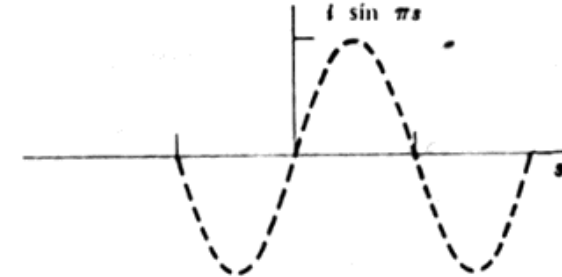
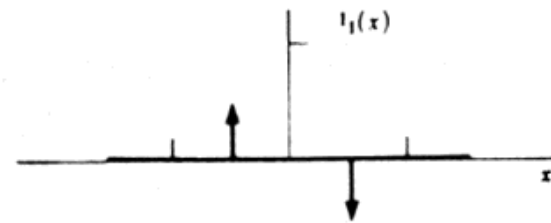
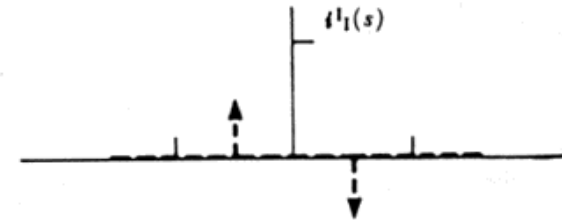
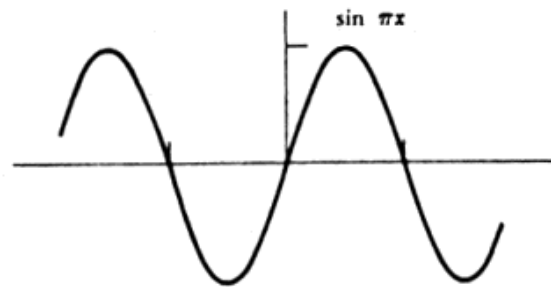
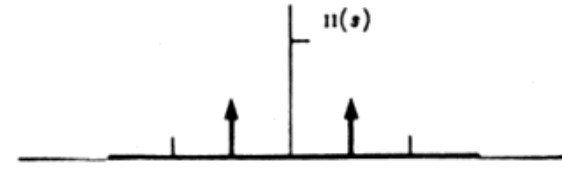
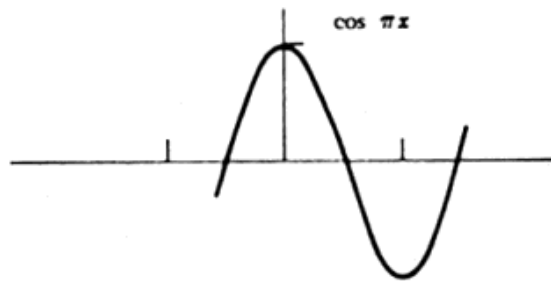
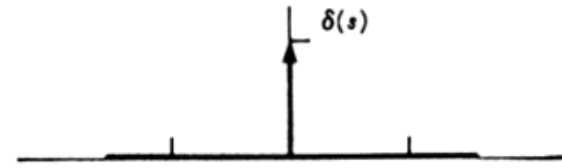
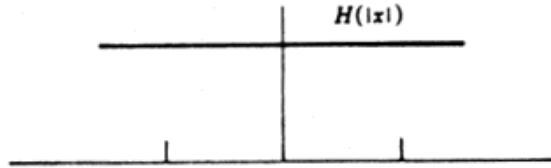
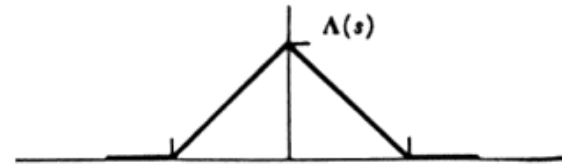
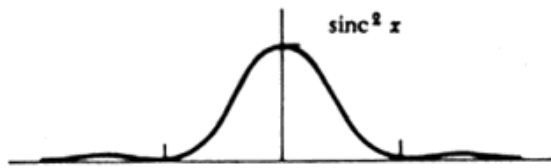


La TF de la somme de deux fonctions est la somme de leurs TF

Paires de Fourier 1D

	Fonction $f(t)$		Transformée de Fourier $F(\nu)$
Uniform		1	
Impulse		$\delta(t)$	1
Rectangular		$\text{rect}(t)$	$\text{sinc}(\nu)$
Exponential		$\exp(- t)$	$\frac{2}{1+(2\nu)^2}$
Gaussian		$\exp(-\pi t^2)$	$\exp(-\pi \nu^2)$
Sum of $M=2S+1$ impulses		$\sum_{n=-S}^S \delta(t-n)$	$\frac{\sin(M\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}$
Infinite sum of impulses		$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-n)$

Paires de Fourier 1D (2)



Propriétés de la TF (1D)

- Produit de convolution:

$$\mathcal{F}(f * g) = F \times G$$

$$\mathcal{F}^{-1}(F * G) = f \times g$$
- Intégration:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)G(k)dk$$
- Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(k)|^2 dk$$
- Composition:

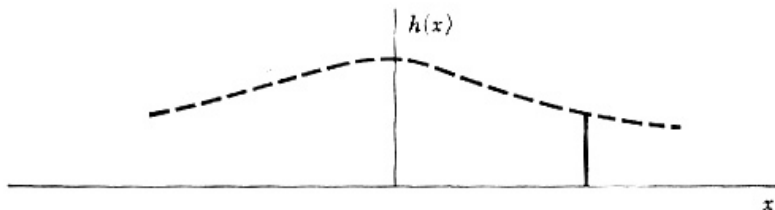
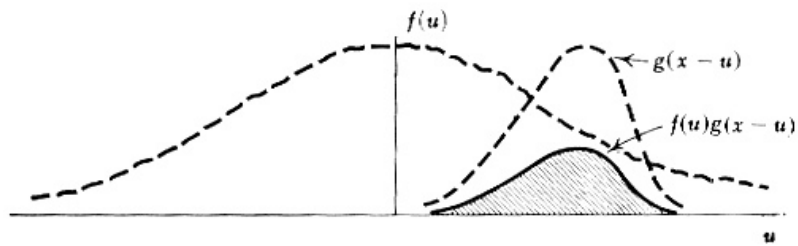
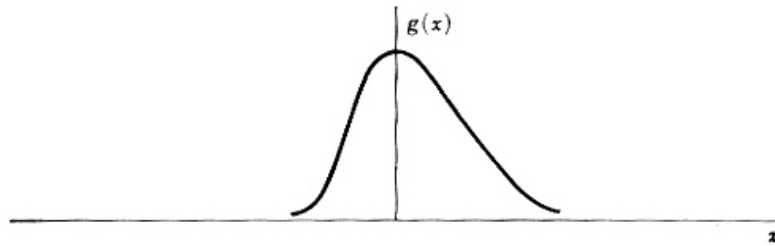
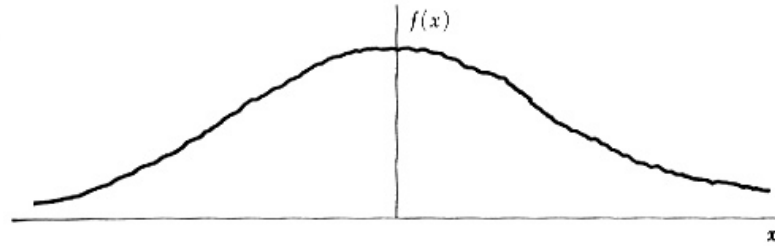
$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f(x))) = 2\pi f(-x)$$
- Dérivation:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = i2\pi k F(k)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F'(k)\} = -i2\pi x f(x)$$

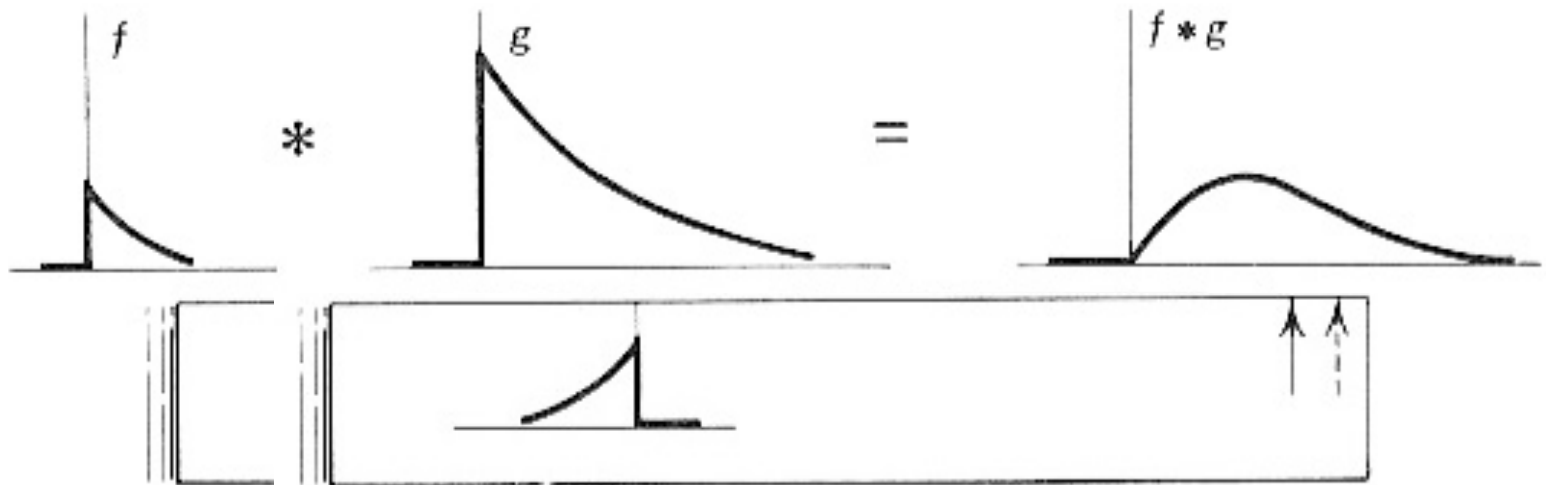
Convolution de deux fonctions

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t)dt$$



Convolution de deux fonctions

Il existe un moyen simple pour visualiser une convolution:



Cette méthode est utile pour vérifier qu'un résultat de calcul est raisonnable...

Le produit de convolution est « **plus doux** » que chacune des deux fonctions

Champ diffracté et transformée de Fourier

Le champ diffracté à l'infini s'écrit (diffraction de Fraunhofer):

$$E(x, y) = \frac{\exp(ikr)}{i\lambda r} \exp\left[i\frac{k}{2r}(x^2 + y^2)\right] \int \int_{-\infty}^{+\infty} E(X, Y) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda r}(xX + yY)\right] dX dY$$

On peut oublier le terme de phase pour notre application:

$$E(x, y) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} E(X, Y) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda r}(xX + yY)\right] dX dY$$

Pour une pupille éclairée par une source à l'infini, l'amplitude du champ diffracté dans une direction est la transformée de Fourier de la fonction pupille. Les variables conjuguées sont la direction angulaire et les coordonnées réduites x/λ et y/λ .

$$I(x, y) = |E(x, y)|^2 = E(x, y) E^*(x, y)$$

$I(x, y)$ est la **Fonction d'Étalement de Point** (FEP), ou en anglais **Point Spread Function** (PSF)

Intensité diffractée

- On a vu que la relation suivante permet d'obtenir le champ diffracté E par une pupille t :

$$E = \mathcal{F}\{t\}$$

- Ce qui nous intéresse généralement, c'est de connaître l'intensité:

$$I = |E|^2$$

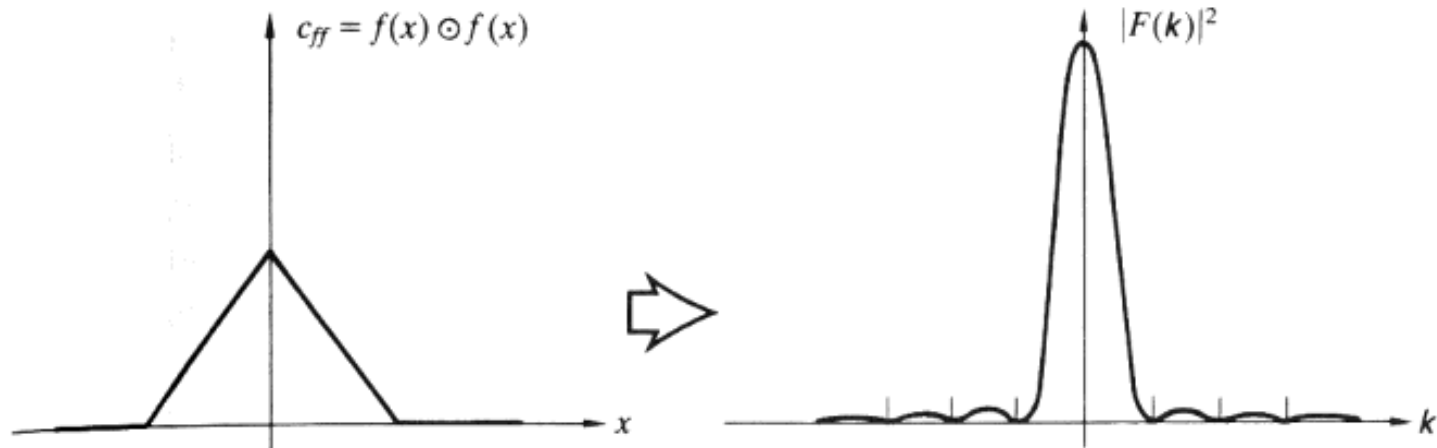
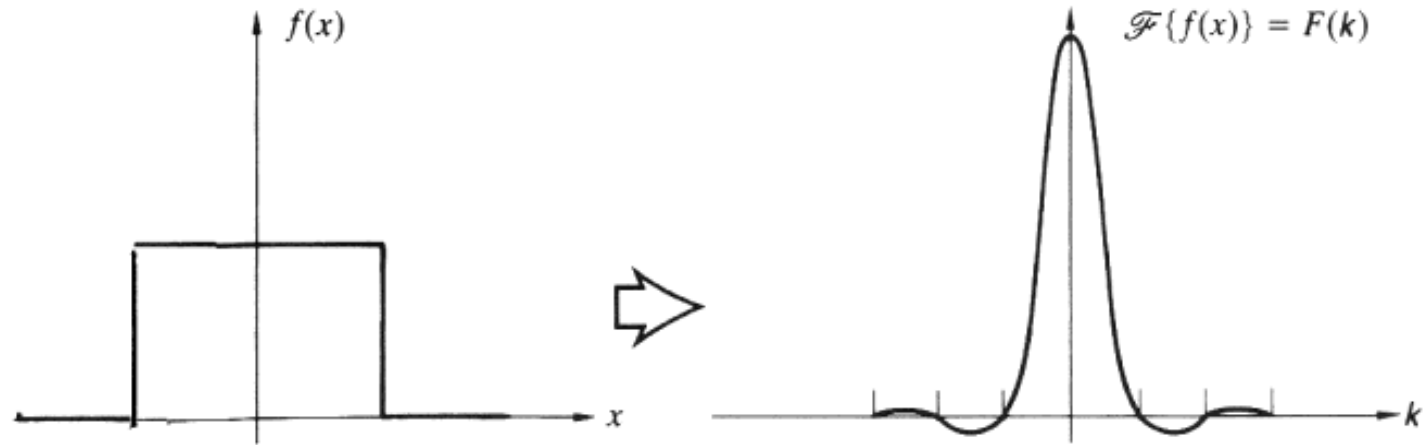
- Comment aboutir directement à l'intensité depuis la fonction pupille t ?
on utilise la propriété de **convolution** de la transformation de Fourier, ou plus précisément **l'autocorrélation**

$$\mathcal{F}\{t * t\} = |E|^2 = I$$

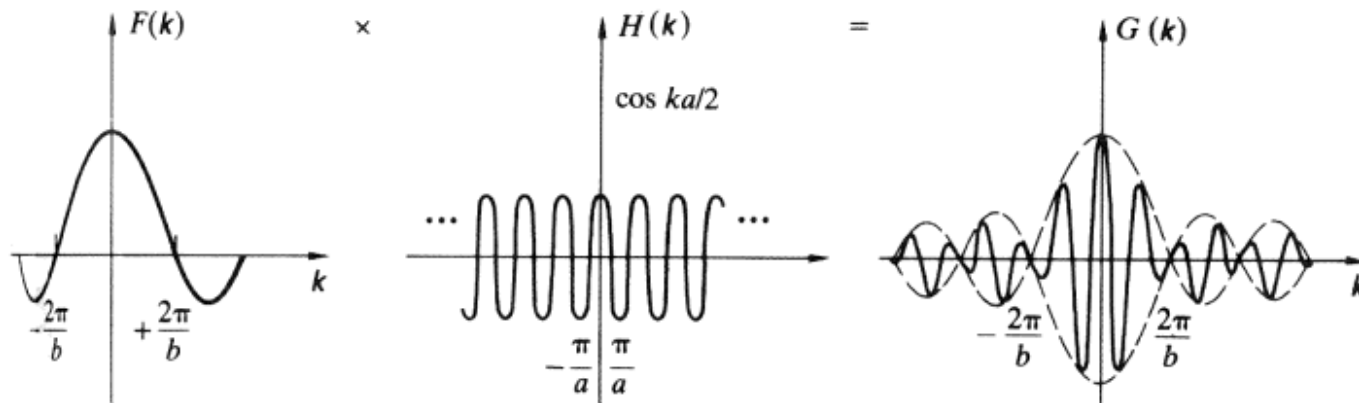
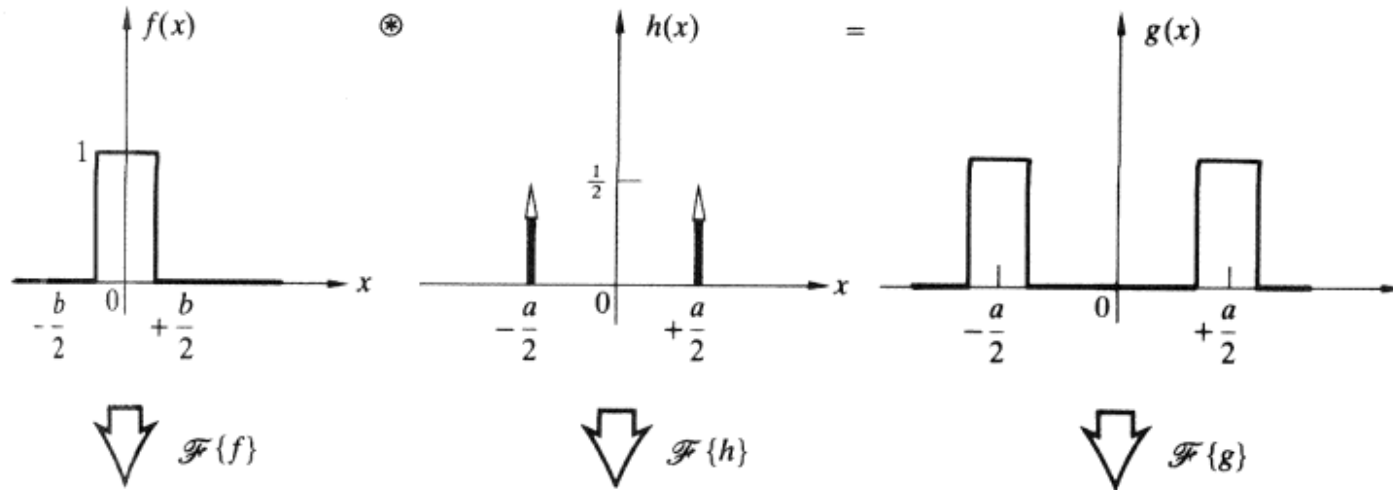
L'intensité (en fait l'*irradiance*) diffractée à l'infini par une pupille est égale à la transformée de Fourier de son autocorrélation (autoconvolution si pupille non centro-symétrique)

Il n'est donc pas toujours nécessaire de calculer E pour obtenir I

Intensité diffractée



Interférences produites par une double fente



Les pupilles compliquées sont souvent la superposition d'éléments plus simples

Propriétés de la TF (2D)

- La plupart des propriétés de la TF 1D se retrouvent pour la TF bidimensionnelle:

$$\mathcal{F}\{\lambda f(x, y) + \nu g(x, y)\} = \lambda F(u, v) + \nu G(u, v)$$

$$\mathcal{F}\{f(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

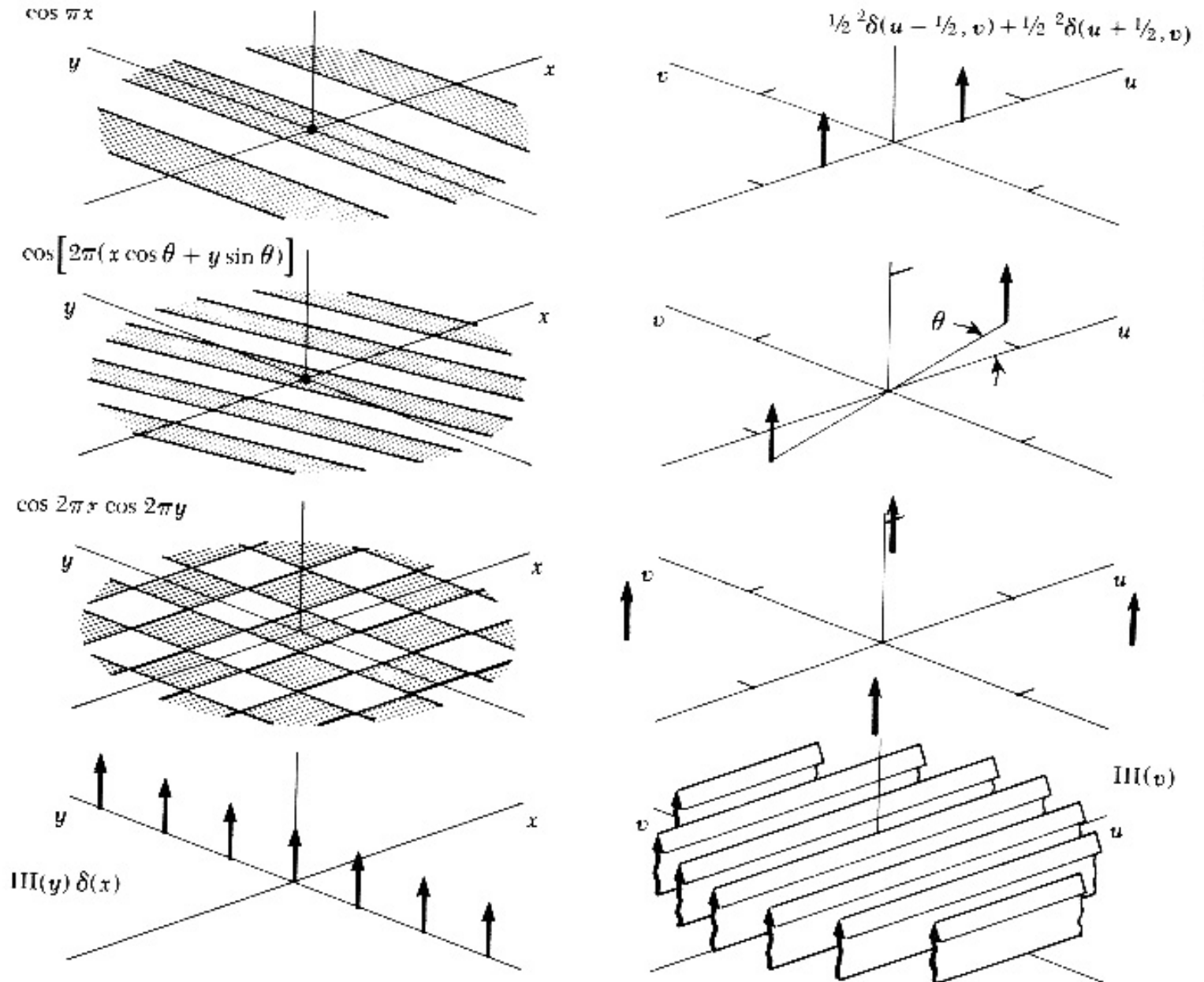
$$\mathcal{F}\{f(x - a, y - b)\} = \exp[-i2\pi(au + bv)] F(u, v)$$

$$\mathcal{F}\{f(x, y) * g(x, y)\} = F(u, v) \times G(u, v)$$

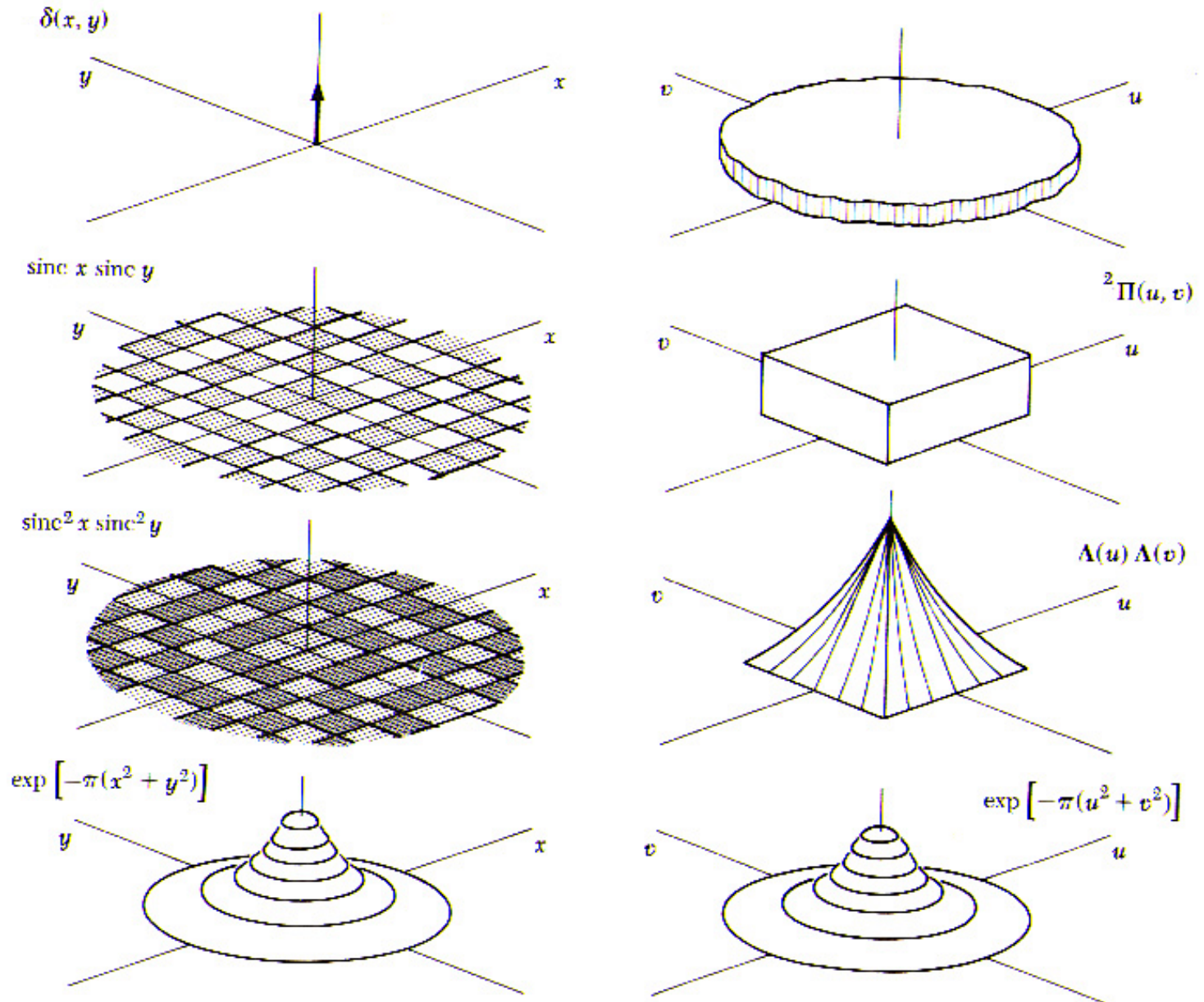
$$\mathcal{F}\{f(x, y) * f^*(x, y)\} = |F(u, v)|^2$$

Si on peut écrire: $f(x, y) = g(x)h(y)$ (variables séparables)
alors les calculs sont beaucoup plus simples !

Paires de Fourier 2D (1)



Paires de Fourier 2D (2)



La transformation de Hankel

- Il s'agit d'une variante de la transformation de Fourier, pour une fonction à symétrie circulaire telle que:

$$f(x, y) = f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

- F est également à symétrie circulaire, et on peut l'écrire sous la forme:

$$F(q) = 2\pi \int_0^{+\infty} f(r) J_0(2\pi qr) r dr$$

$$f(r) = 2\pi \int_0^{+\infty} F(q) J_0(2\pi qr) q dq$$

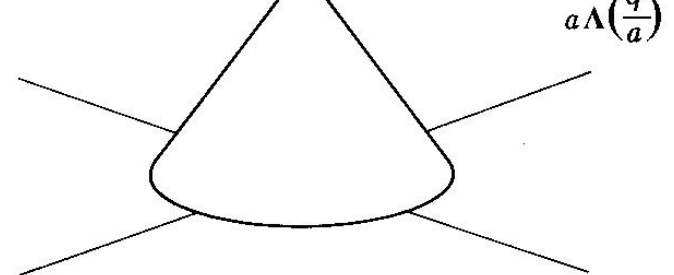
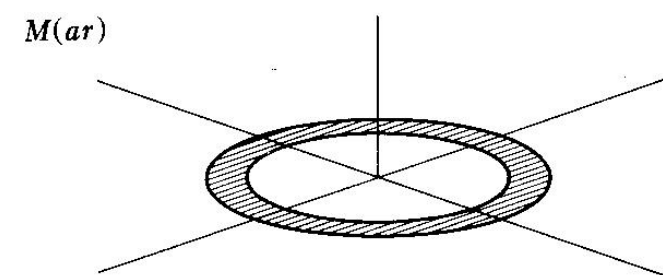
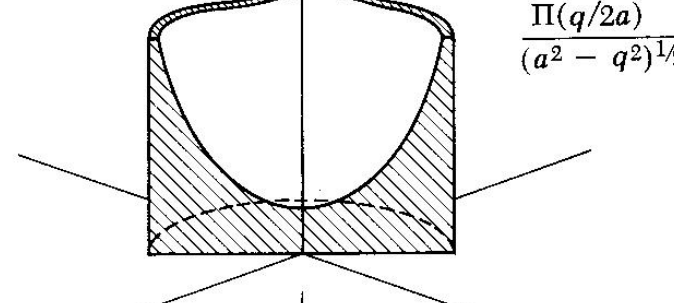
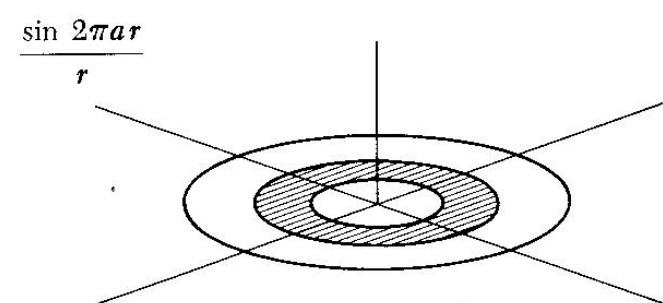
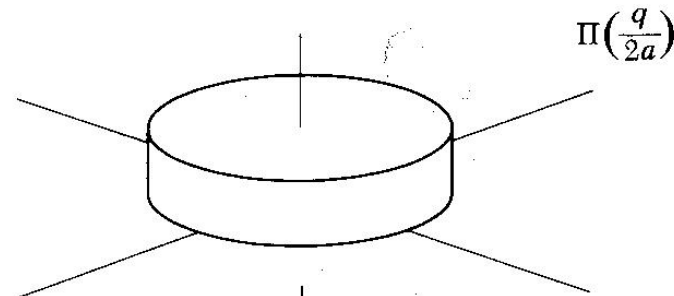
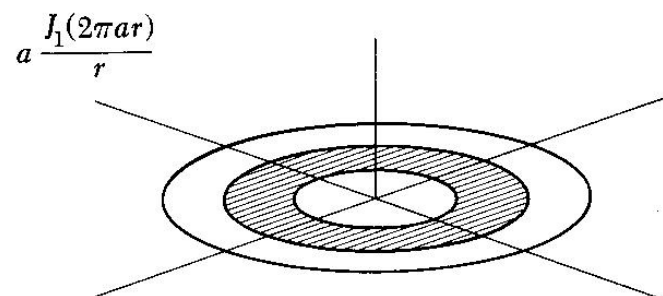
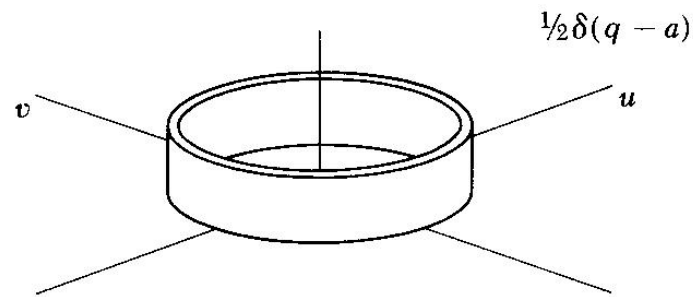
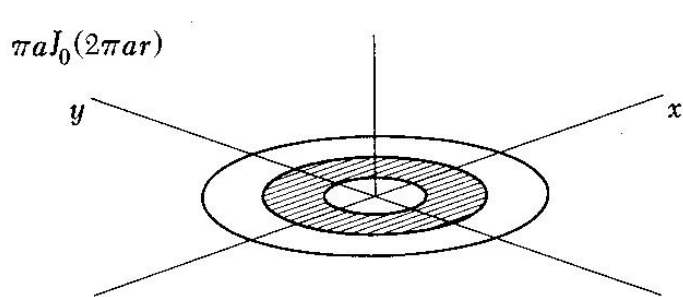
Jo fonction de Bessel d'ordre zero.

- Cette transformation est linéaire et la loi d'échelle donne

$$\mathcal{H}\{f(ar)\} = \frac{1}{a^2} F\left(\frac{q}{a}\right)$$

- La plupart des propriétés de la TF classique se retrouvent

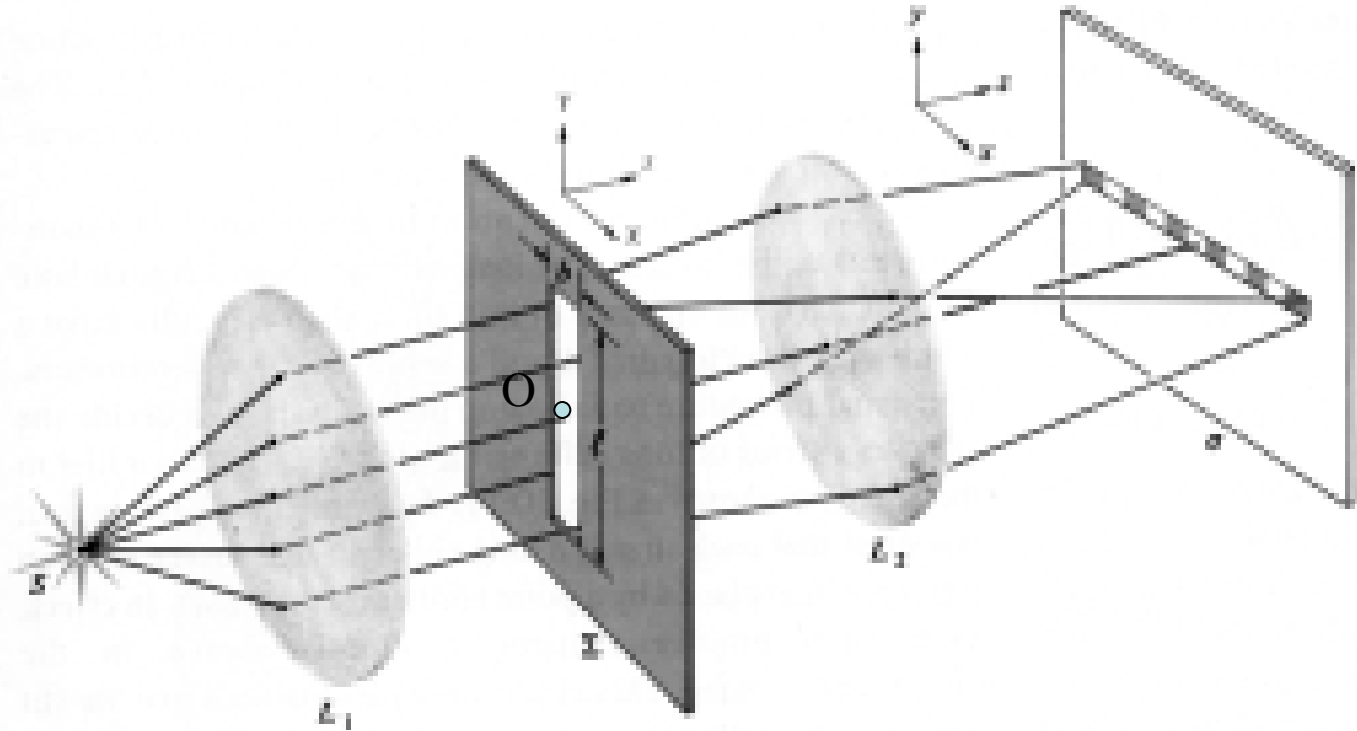
Paires de Hankel



Paires de Hankel

$f(r)$	$F(q)$
$\frac{\Pi\left(\frac{r}{2a}\right) \sin 2\pi ar}{r}$	$\frac{aJ_1(2\pi aq)}{q}$
$\frac{1}{2} \delta(r - a)$	$\frac{\Pi(q/2a)}{(a^2 - q^2)^{\frac{1}{2}}}$
$\frac{1}{r}$	$\pi a J_0(2\pi aq)$
e^{-ar}	$\frac{1}{q}$
$\frac{e^{-ar}}{r}$	$\frac{2\pi a}{(4\pi^2 q^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$
$\frac{\delta(r)}{\pi r} = {}^2\delta(x,y)$	$\frac{2\pi}{(4\pi^2 q^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$
$\frac{\Pi\left(\frac{r}{2a}\right)^{*2}}{2a^2}$	1
$= \left[\cos^{-1} \frac{r}{2a} - \frac{r}{2a} \left(1 - \frac{r^2}{4a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \Pi\left(\frac{r}{4a}\right)$	$\frac{[J_1(2\pi aq)]^2}{2a^2}$

Pupille rectangulaire



- On se place dans les conditions de Fraunhofer (grâce à la lentille L_2). La fente a une longueur l et une largeur b finies.

Exercice:

- 1) exprimer la fonction pupille $t(X, Y)$ correspondante
- 2) calculer le champ $E(x, y)$ et l'intensité $I(x, y)$ diffractés
- 3) décrire l'allure générale de la figure obtenue en insérant L_2

Diffraction par une pupille rectangulaire

1) La fonction pupille s'écrit:

$$-\frac{b}{2} \leq X \leq \frac{b}{2} \text{ et } -\frac{l}{2} \leq Y \leq \frac{l}{2} \Rightarrow t(X, Y) = 1$$

$t(X, Y) = 0$ ailleurs

2) On reprend l'équation intégrale du champ (conditions de Fraunhofer)

$$E(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(X, Y) \exp \left[-\frac{2j\pi}{\lambda r} (xX + yY) \right] dXdY$$

$$k_x = -\frac{2\pi x}{\lambda r} \quad k_y = -\frac{2\pi y}{\lambda r}$$

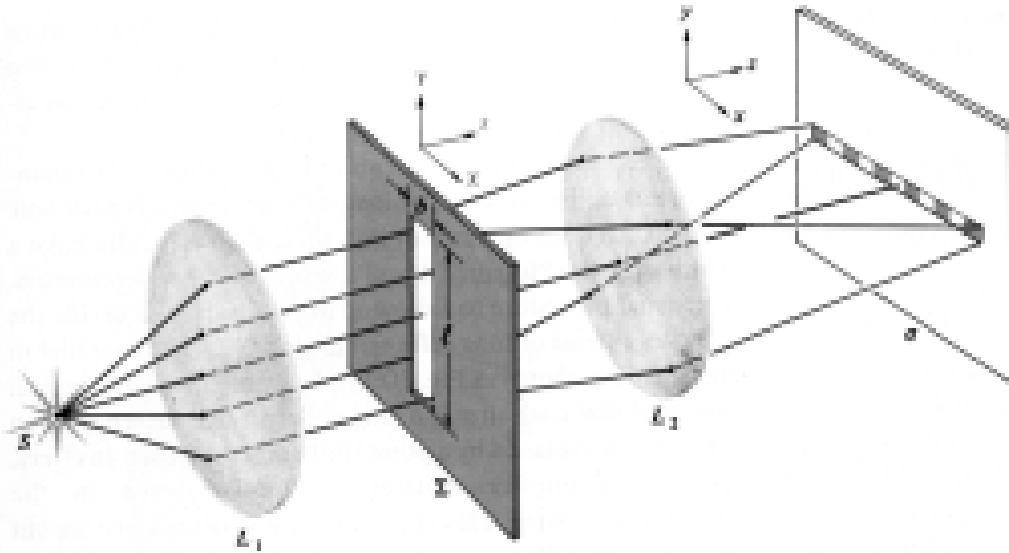
$$E(M) = \int_{-l/2}^{+l/2} \int_{-b/2}^{+b/2} \exp [j(k_x X + k_y Y)] dXdY$$

$$E(M) = \int_{-b/2}^{+b/2} \exp(jk_x X) dX \int_{-l/2}^{+l/2} \exp(jk_y Y) dY$$

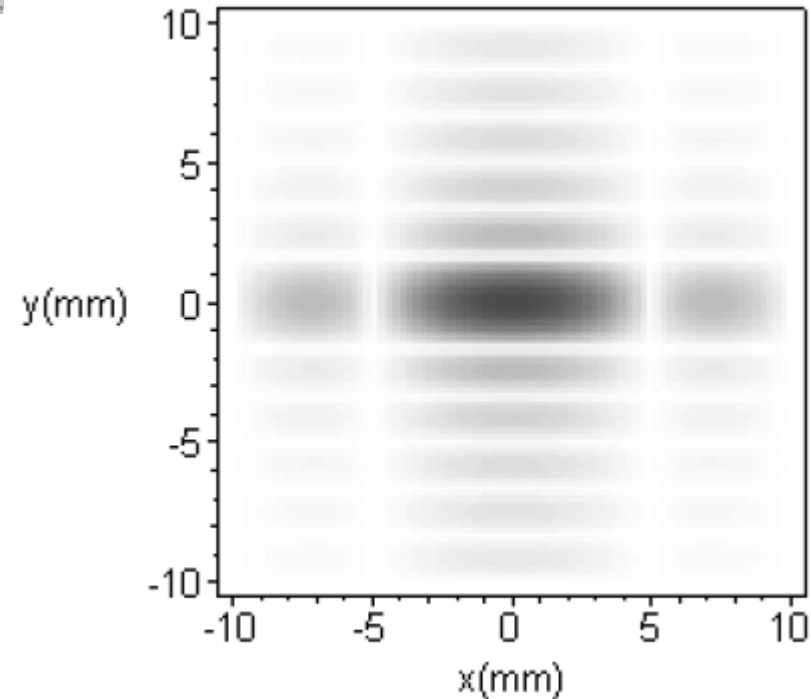
$$E(M) = bl \operatorname{sinc} \left(\frac{k_x b}{2} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{k_y l}{2} \right)$$

$$\frac{I(M)}{I(0)} = \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b x}{\lambda r} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi l y}{\lambda r} \right)$$

Diffraction par une pupille rectangulaire

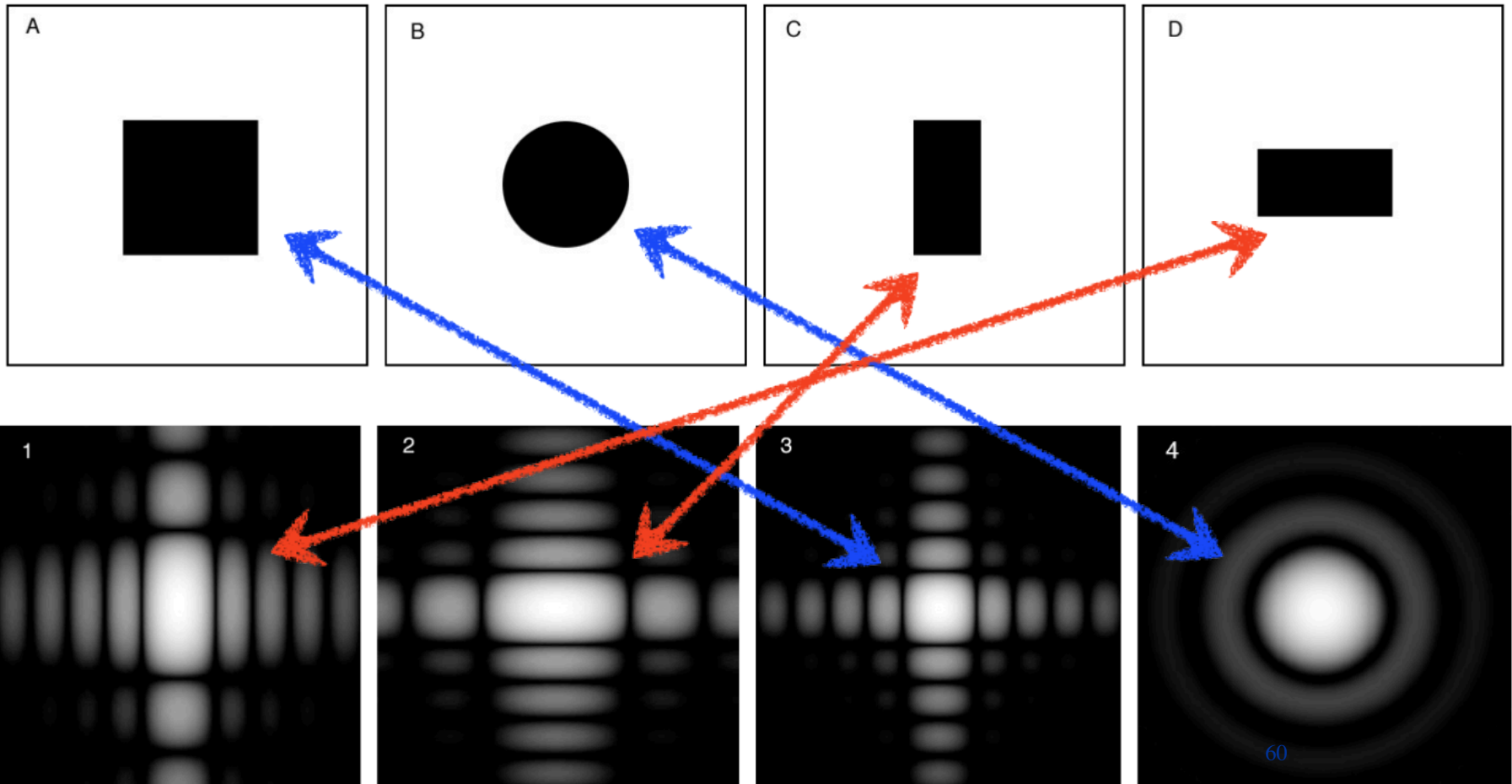


- 3)** Simulation de la figure de diffraction de Fraunhofer (en visible) obtenue avec une ouverture rectangulaire de côtés $b=0,1 \text{ mm}$ et $l=0,3 \text{ mm}$. La lentille L_2 a une distance focale de $f=1 \text{ m}$.



Exercice: relation pupille-image

- Associer les pupilles ci-dessous aux figures de diffraction correspondantes:



Télescope

- La pupille circulaire est **le cas le plus répandu en astronomie**, essentiellement pour des raisons de fabrication des optiques
- Mais c'est souvent une **approximation**, car les pupilles des télescopes sont plus complexes, notamment du fait de la présence du support du miroir secondaire (araignée)



La pupille circulaire

- L'intégrale de Fourier à calculer est:

$$E(M) = K'' \iint t(X, Y) \exp \left[-\frac{2j\pi}{\lambda r} (xX + yY) \right] dXdY$$

$$F(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

Avec $k_x = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{r}$ et $k_y = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{y}{r}$

- Avec la fonction pupille suivante, notée $f(x, y)$ (au lieu de t précédemment):

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \\ 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > a \end{cases}$$

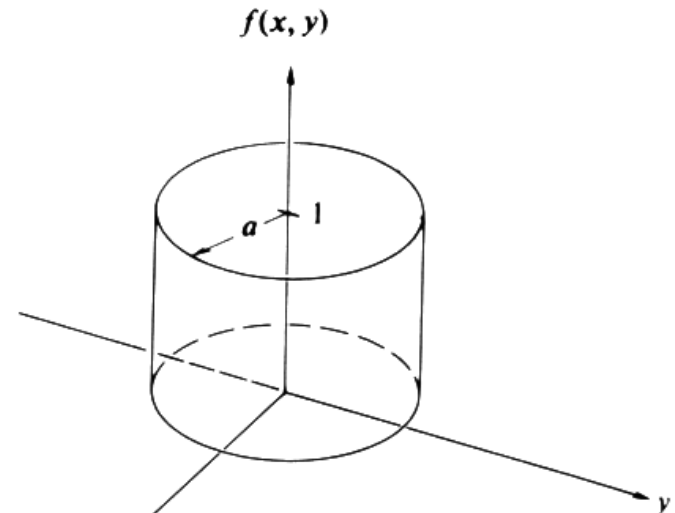
- On passe en coordonnées polaires:

$$k_x = k_\alpha \cos \alpha$$

$$k_y = k_\alpha \sin \alpha$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$



$$F(k_\alpha, \alpha) = \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} e^{ik_\alpha r \cos \theta} d\theta \right] r dr$$

(Ne pas oublier $dx dy = r dr d\theta$)

Les fonctions de Bessel

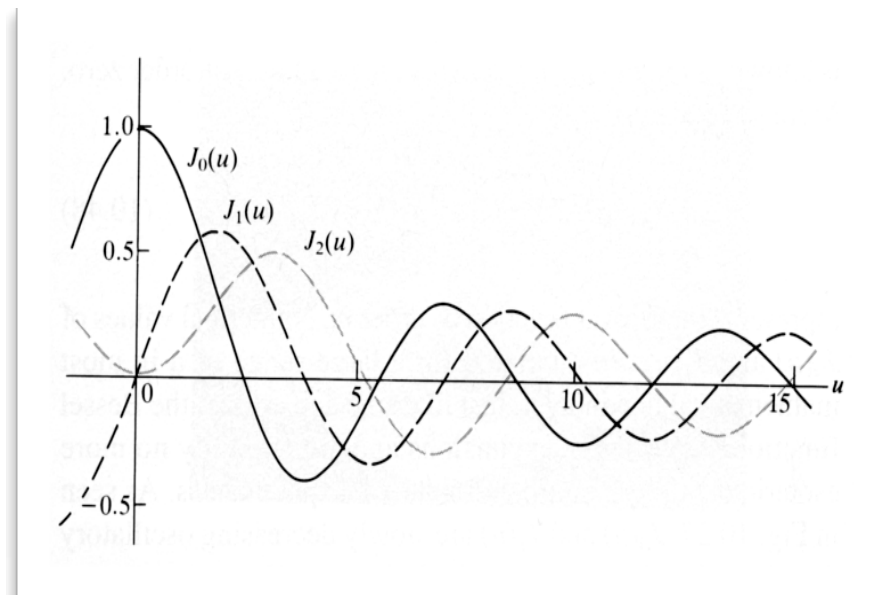
$$F(k_\alpha, \alpha) = \int_0^\alpha \left[\int_0^{2\pi} e^{ik_\alpha r \cos \theta} d\theta \right] r dr$$

- Or, les **fonctions de Bessel** de 1ère espèce (J) et d'ordre m sont:

$$J_m(u) = \frac{i^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(mv + u \cos v)} dv$$

- Soit à l'ordre $m = 0$:

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iu \cos v} dv$$



On a donc:

$$F(k_\alpha) = 2\pi \int_0^a J_0(k_\alpha r) r dr$$

Champ diffracté

$$F(k_\alpha) = 2\pi \int_0^a J_0(k_\alpha r) r dr$$

- On a de plus (relation de récurrence):

$$\frac{d}{du} [u^m J_m(u)] = u^m J_{m-1}(u) \quad \text{soit avec } m = 1:$$

$$\int_0^u u' J_0(u') du' = u J_1(u)$$

- Changement de variable:

$$k_\alpha r = w \quad \text{soit} \quad dr = k_\alpha^{-1} dw$$

- On reconnaît dans l'intégrale une fonction de Bessel de 1er ordre:

$$\frac{1}{k_\alpha^2} \int_{w=0}^{k_\alpha a} J_0(w) w dw$$

- Ce qui donne finalement:

$$F(k_\alpha) = 2\pi a^2 \left[\frac{J_1(k_\alpha a)}{k_\alpha a} \right]$$

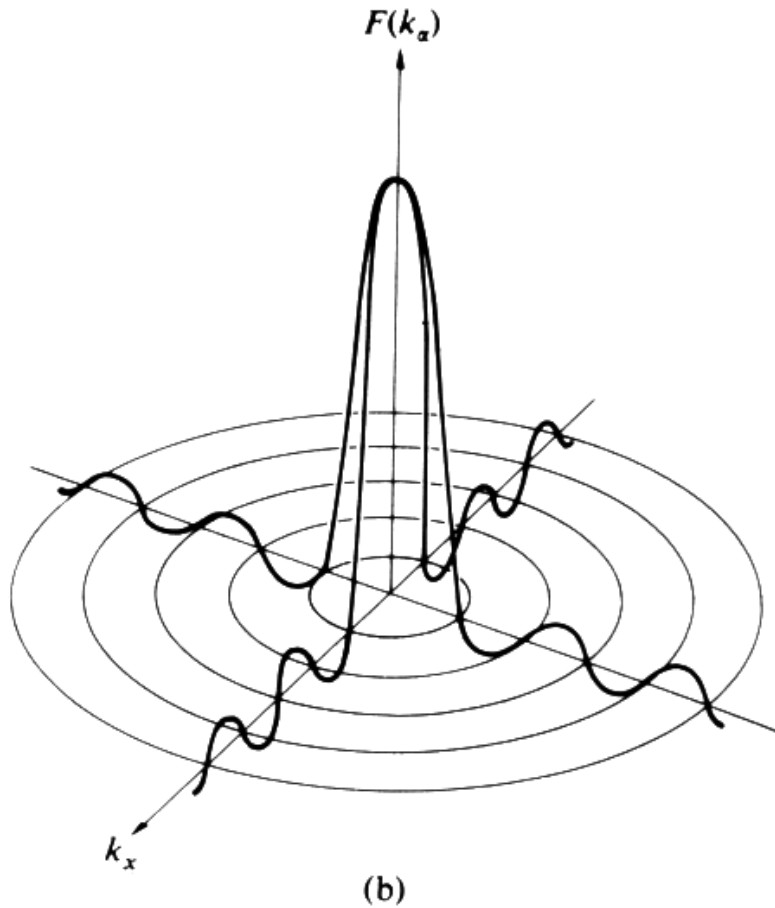
Intensité diffractée

- L'intensité diffractée par la pupille circulaire de rayon a dans une direction angulaire α est donnée par la **fonction d'Airy**:

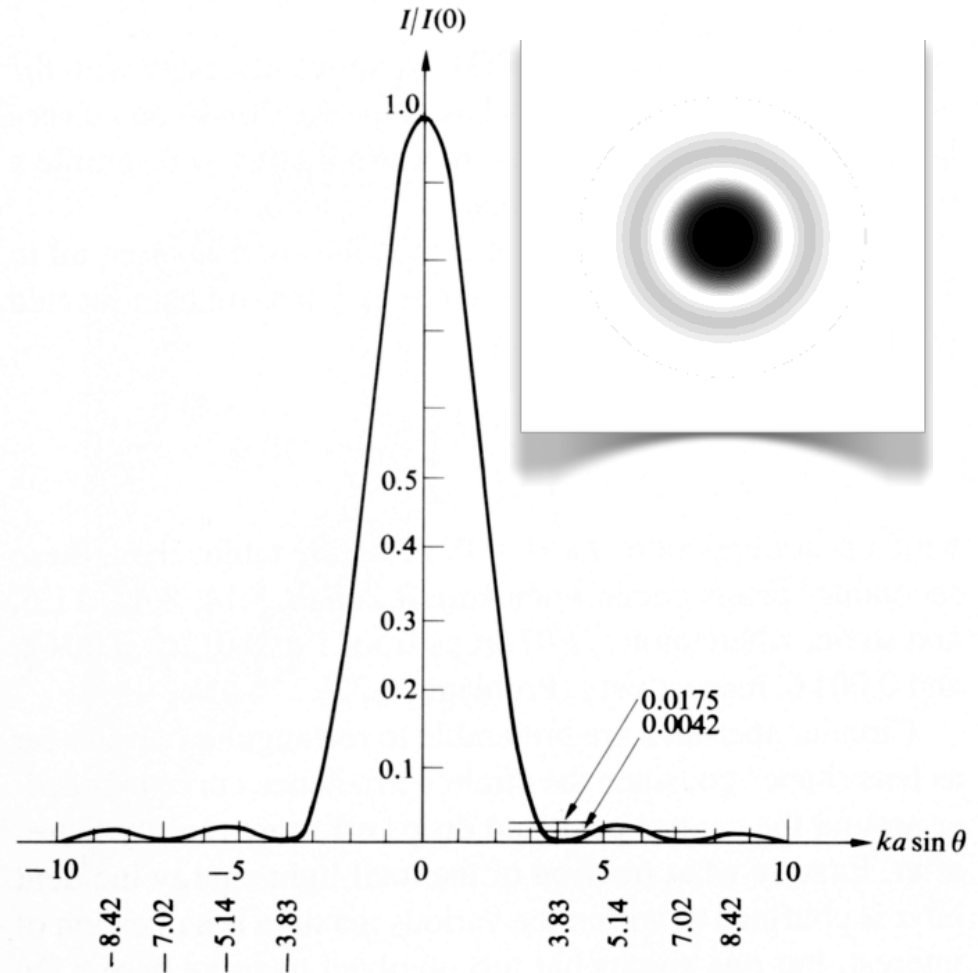
$$I(\alpha)/I(0) = |F(k_\alpha a)/F(0)|^2 = \left| \frac{J_1(2\pi a\alpha/\lambda)}{2\pi a\alpha/\lambda} \right|^2$$

- Elle est importante car elle correspond à l'**image d'une source non résolue** (comme une étoile) par un télescope parfait
- C'est la **fonction d'étalement de point** de la pupille circulaire
- Le premier minimum est pour un angle α tel que $2\pi a\alpha/\lambda \approx 3.83$
- Soit $\alpha = 1,22 \lambda/(2a)$

Champ et intensité diffractés par une pupille circulaire

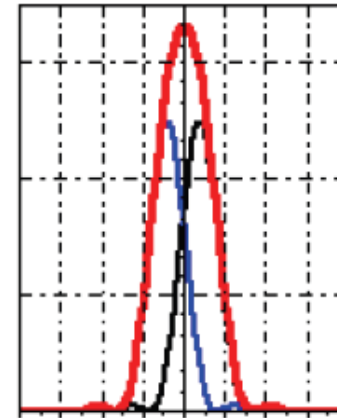
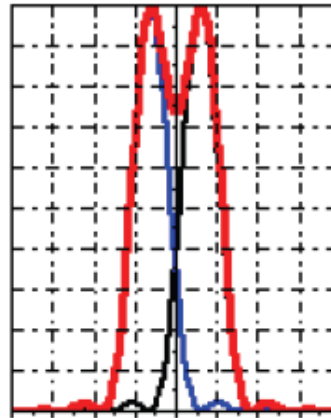
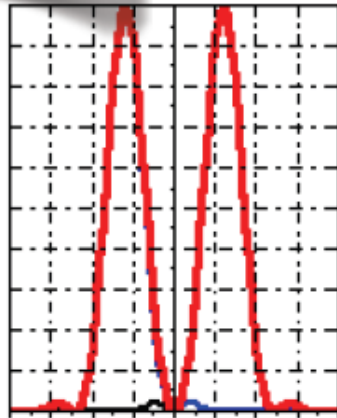
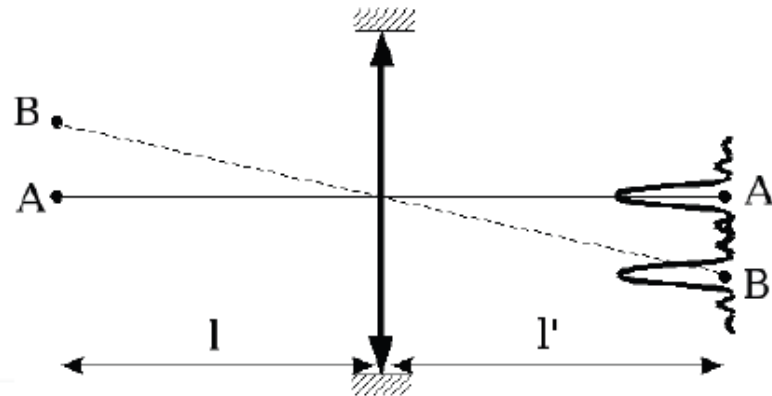
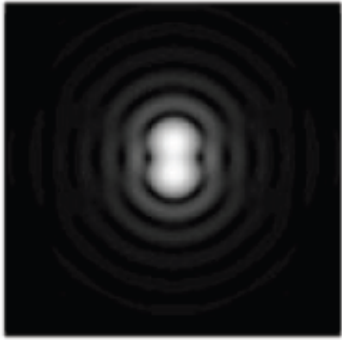


Champ électrique



Intensité

Critère de résolution de Rayleigh



$\alpha = 1,22 \lambda / (2a)$

- Le **pouvoir de résolution** ou simplement la **résolution** d'un télescope est sa capacité à séparer deux sources A et B
- pour $\lambda=550\text{nm}$, **résolution[arcsec] = 0,138 / diamètre[m]**

Formulaire

Pour un télescope parfait hors atmosphère:

diamètre D [m], focale f [m], longueur d'onde λ [m]

- Image d'une étoile (\sim ponctuelle) = tache d'Airy
- Diamètre angulaire de l'image au premier zéro (Rayleigh) :
 - θ [radians] = $1,22 \lambda / D$
 - θ [arcsec] = $0,13837 / D$ à $\lambda = 550$ nm (visible)
- Taille de l'image d'une étoile au premier zéro sur le détecteur :
 - d [m] = $1,22 \lambda f / D$
- Taille de l'image d'une étoile à mi-hauteur :
 - d [m] = $0,98 \lambda f / D$

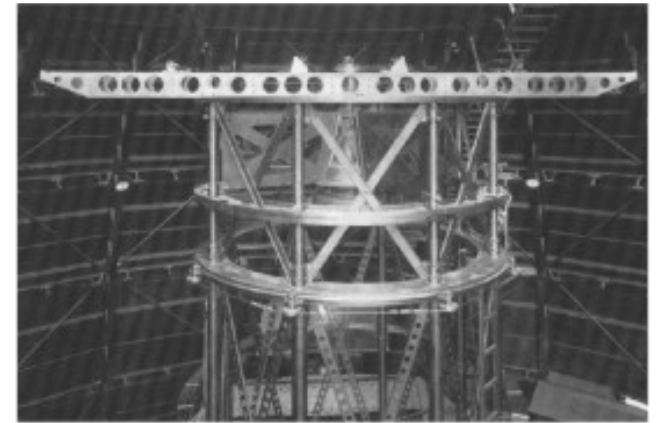
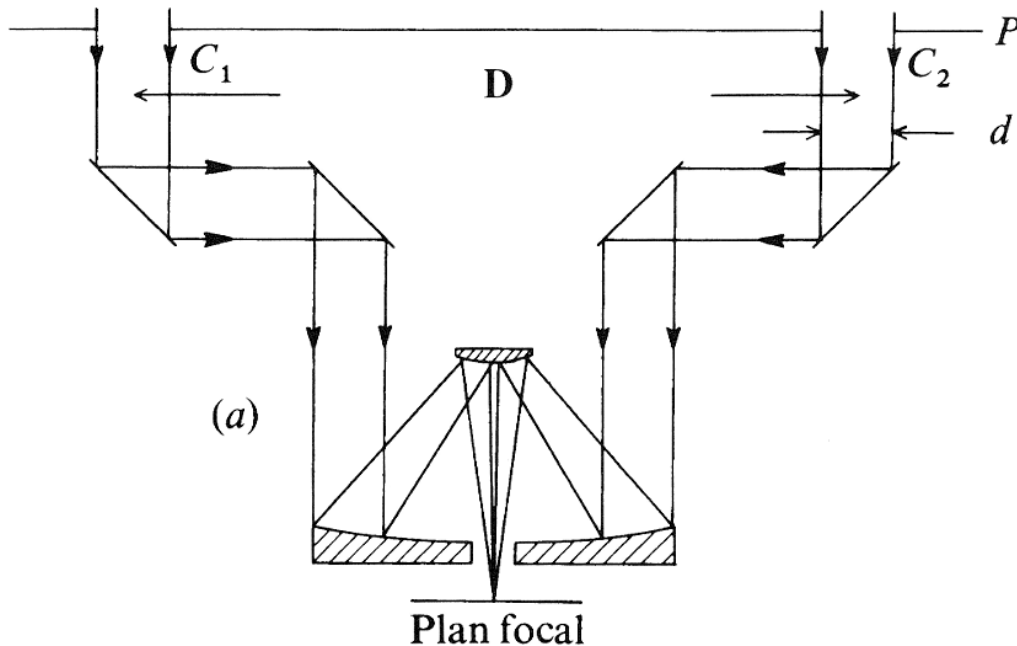
Pour un télescope parfait avec atmosphère:

seeing σ [secondes d'angle], longueur d'onde λ [m]

- Image d'une étoile \sim racine(Airy 2 + seeing 2)
- Diamètre angulaire à mi-hauteur :
 - θ [arcsec] $\sim \sigma$ pour $D > 0,1$ m et λ en visible
 - pour $D \ll 0,1$ m en visible = télescope hors atmosphère
- Taille de l'image d'une étoile à mi-hauteur :
 - d [m] $\sim \sigma f$ pour $D > 0,1$ m et λ en visible

Exercice: interféromètre à 2 ouvertures

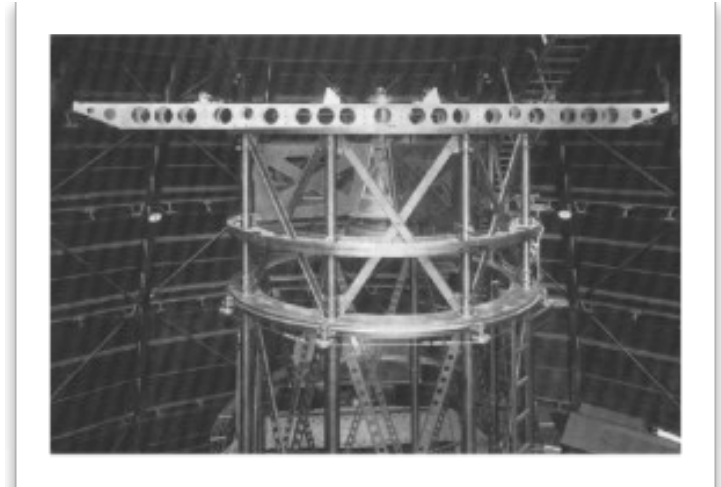
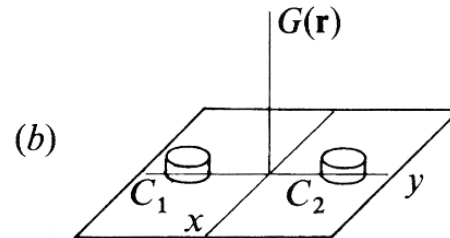
On considère l'interféromètre utilisé par en 1921 par Michelson pour mesurer la taille angulaire de Betelgeuse (0,04 secondes d'angle):



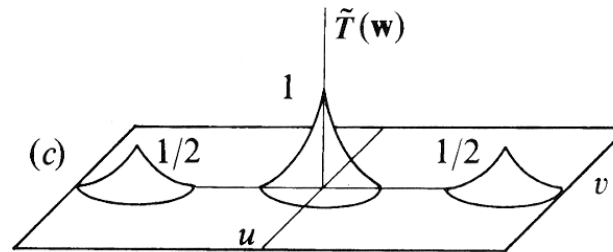
1. Décrire la fonction pupille de cet instrument
2. Dessiner l'autocorrélation de cette pupille
3. Dessiner l'image d'un point source par cet instrument (FEP) pour $D=5d$

Solution

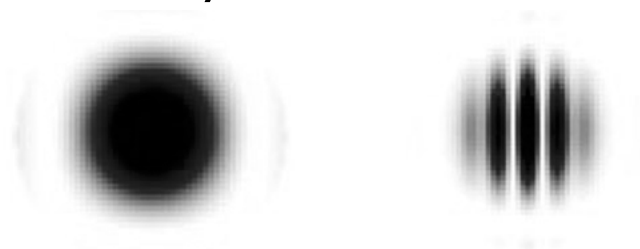
1. La fonction pupille est la suivante:



2. L'autocorrélation s'obtient soit « visuellement », soit par convolution

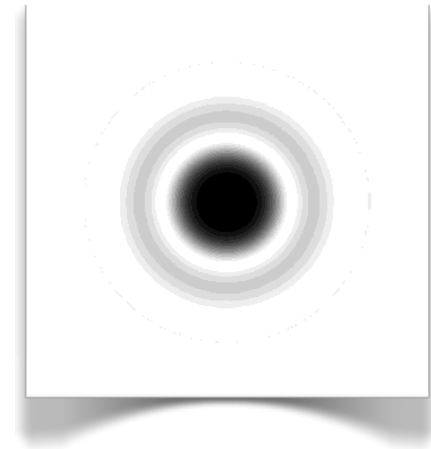
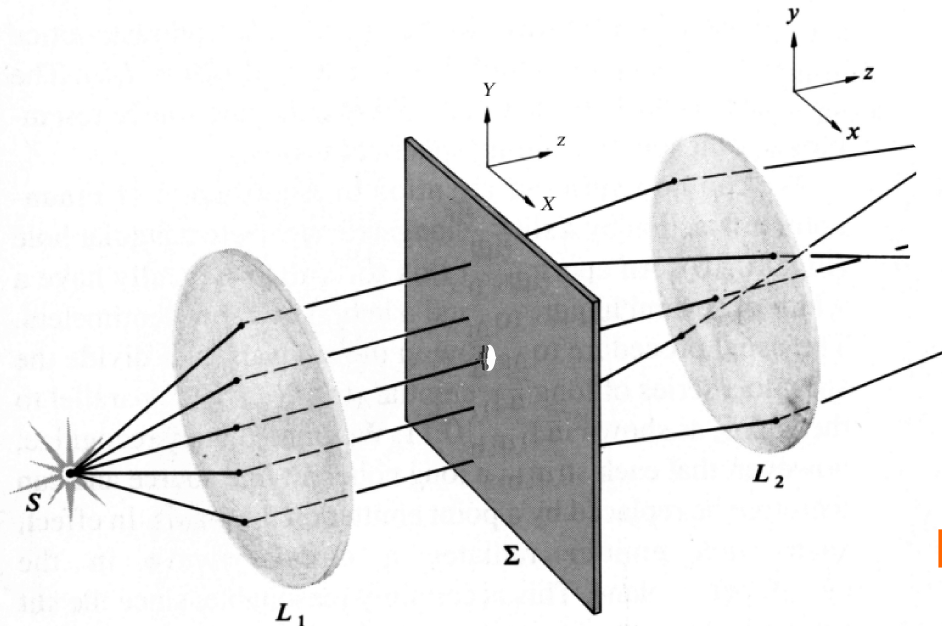


3. L'image produite par ce montage est une série de franges superposées à la tache d'Airy



Une petite expérience...

- On utilise une source lumineuse **suffisamment petite** pour qu'elle émette une onde pratiquement plane à une distance raisonnable, sans avoir besoin de lentille L_1 .
- La pupille doit être **suffisamment petite** pour produire une tache de diffraction assez grande (dimensions en rapport inverse !)
- La lentille L_2 c'est notre **cristallin**



Formation d'une *figure d'Airy*

Et deux ouvertures ?

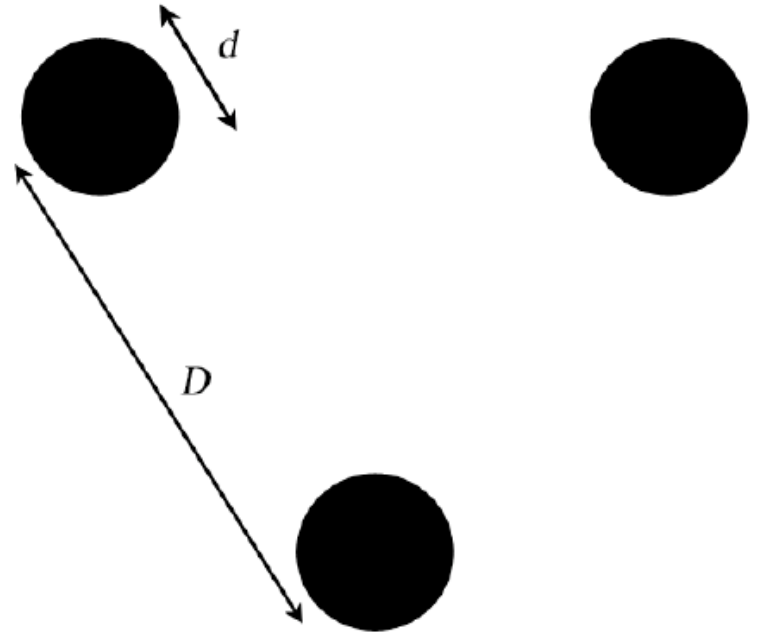
- Avec deux trous, on aboutit à l'expérience des **trous d'Young**



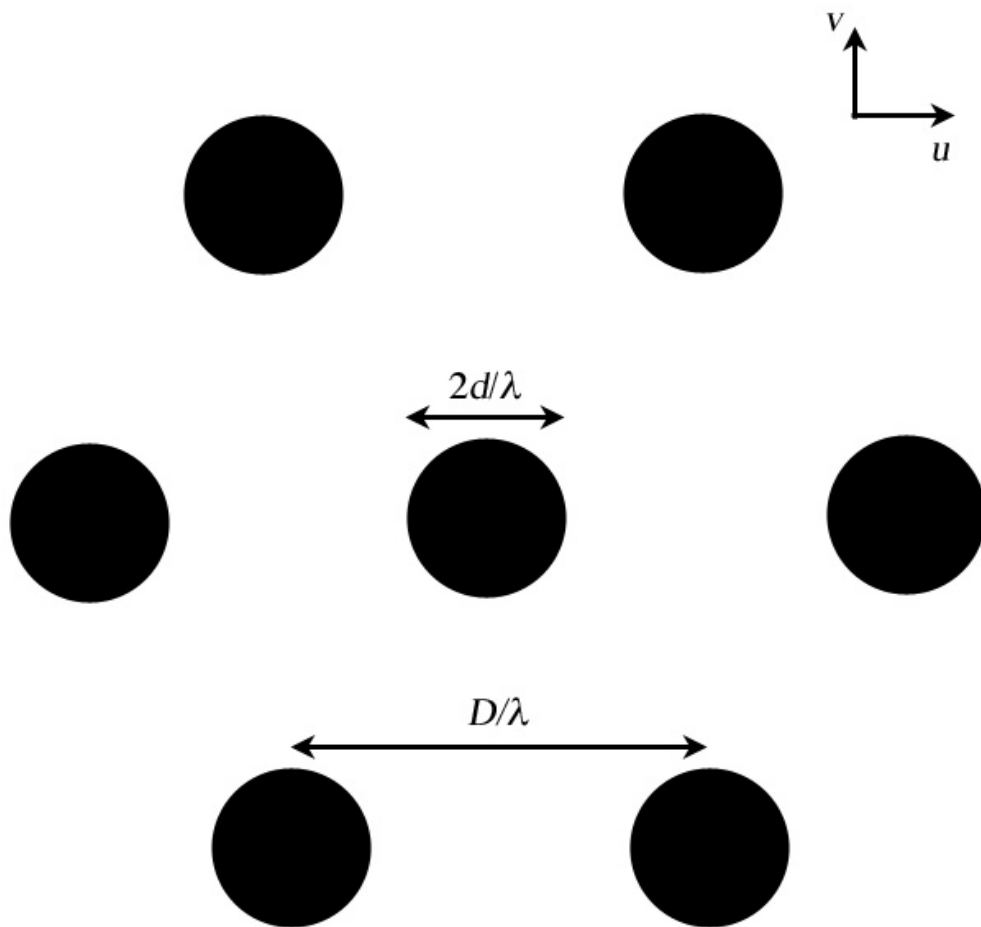
Exercice: Interféromètre à 3 ouvertures

- Dessiner la FTM de l'interféromètre à trois télescopes de la figure jointe (ouvertures de diamètre d aux sommets d'un triangle équilatéral de côtés D).

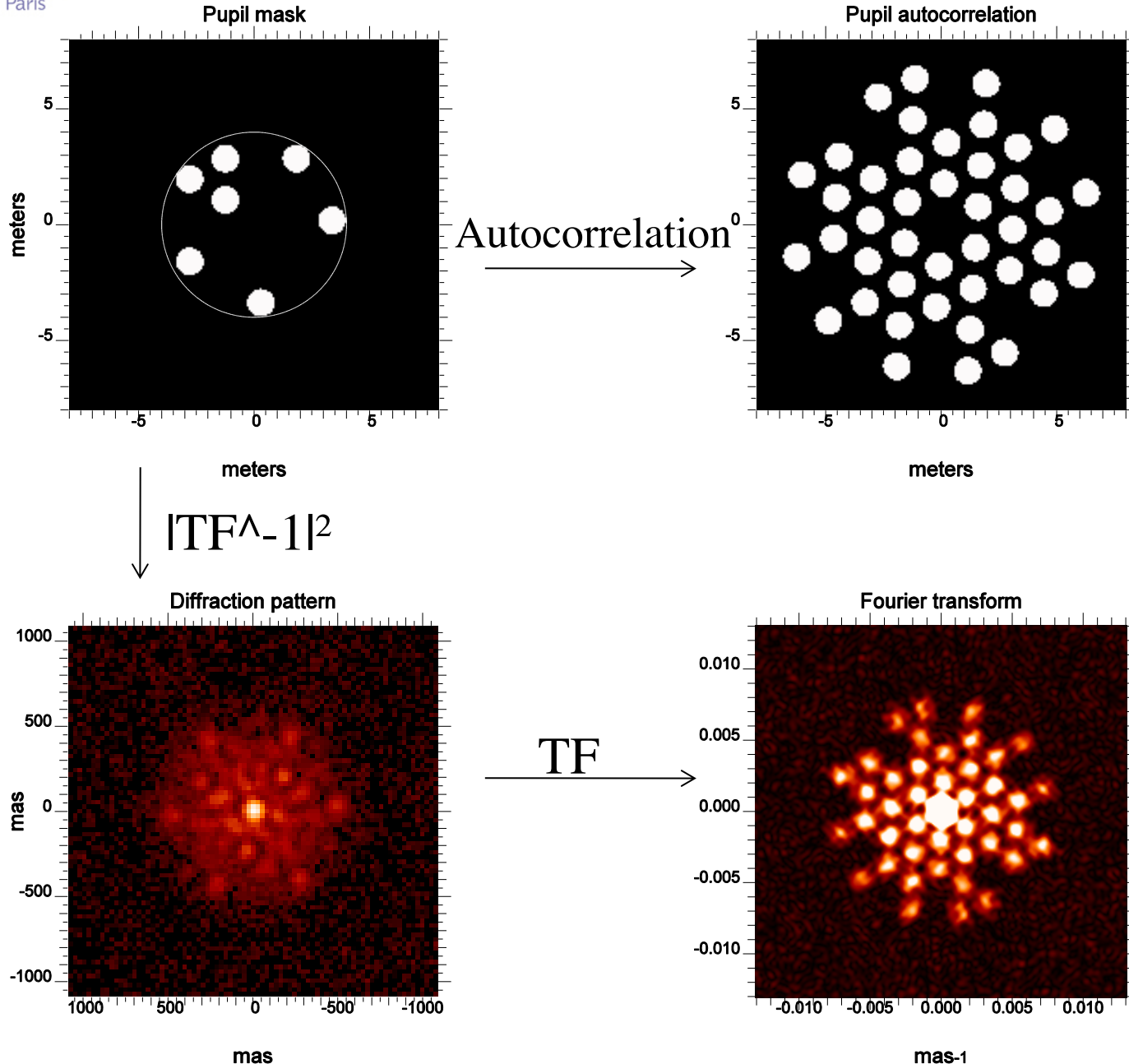
Pour simplifier, on se limitera à représenter la FTM en deux dimensions, en grisant les zones correspondant aux fréquences spatiales transmises (même partiellement).



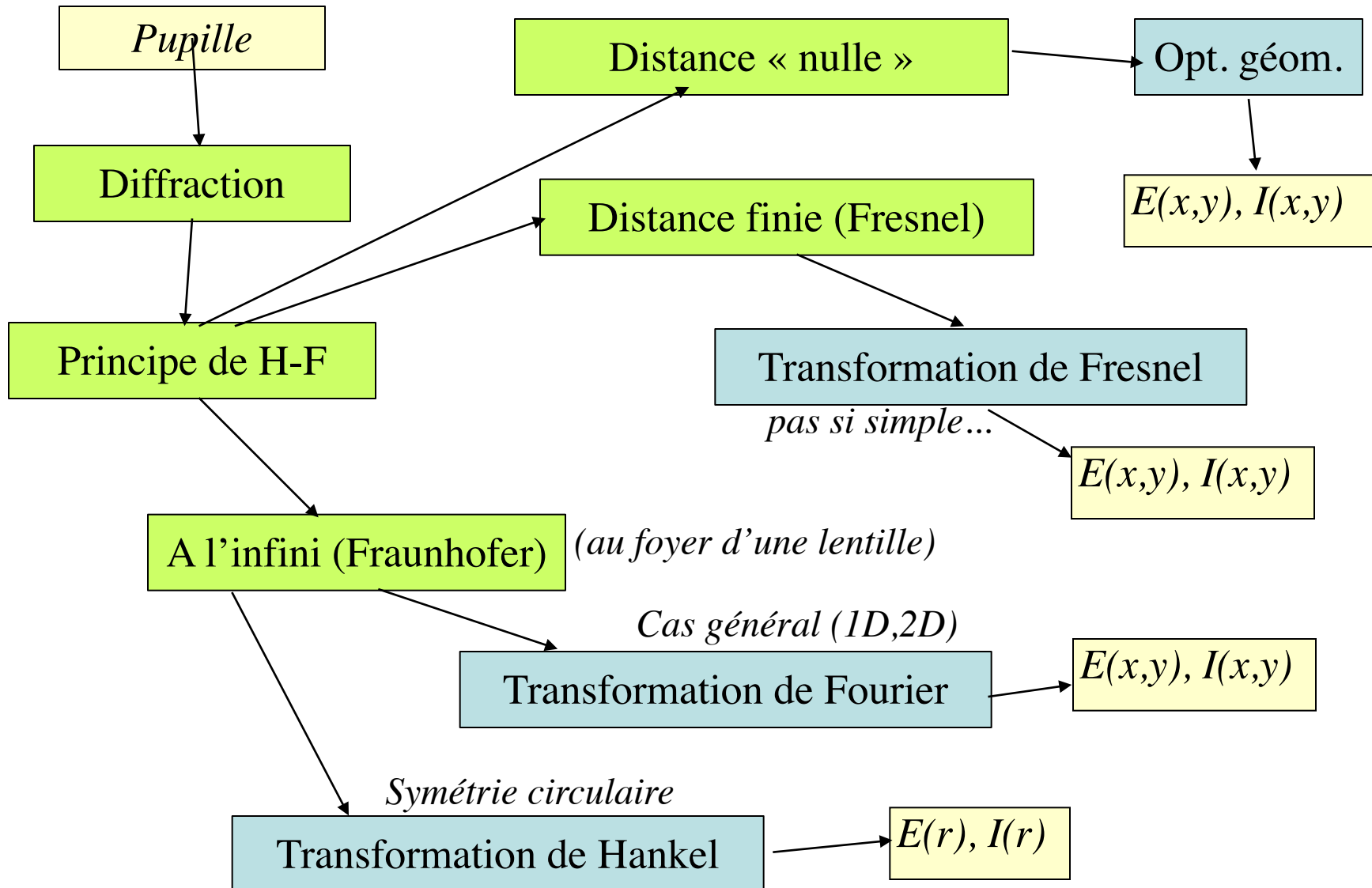
Solution



Introduction au masquage de pupille



Traitement de la diffraction



Prochain cours

- Atmosphère / Aberrations optiques
 - Optique Adaptative
 - Cohérence

