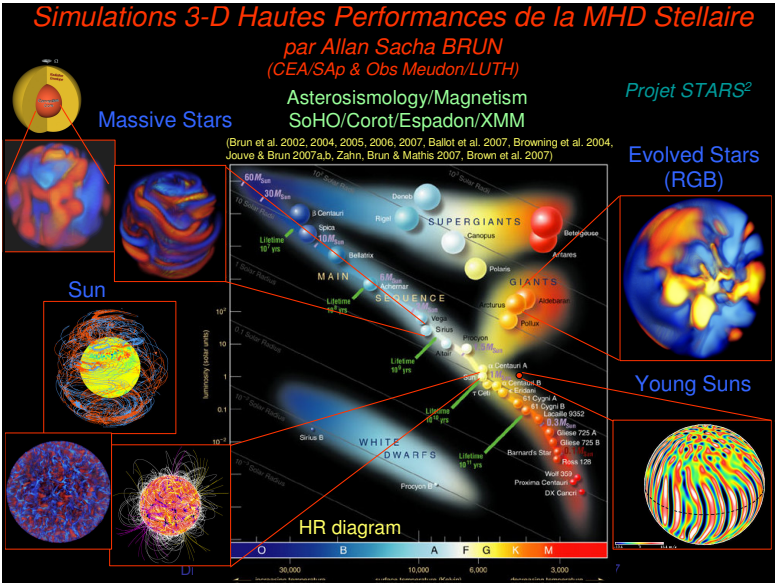


Modélisation de la structure, de l'évolution et de la magnétohydrodynamique des Etoiles: Vers un modèle 3-D intégré

En Astrophysique, l'expérimentation directe est impossible, il faut donc reposer l'étude des objets célestes, comme les étoiles ou les galaxies, sur des observations, la théorie, des expériences de Laboratoire (ex laser) et la simulation/modélisation numérique.

La Physique fondamentale constitue le pilier théorique de l'Astrophysique, en particulier la physique nucléaire, des particules, atomique, la dynamique des fluides et des plasmas, etc…

L'étude de la structure interne des étoiles à commencer dans les années 20 (Eddington 1926) Ces modèles d'étoiles reposent sur les équations dites de la structures internes.

Mais c'est réellement au début des années 30 que les chaines nucléaires pp et le cycle CNO, convertissant 4 atomes d'Hydrogène en 1 atome d'Helium, et fournissant ainsi l'énergie aux étoiles sur des millions voir des milliards d'années, ont été définitivement établit.

Il a fallut attendre les années 40-50 pour que les premiers modèles d'étoiles, et du Soleil en particulier, soient calculés sur ordinateurs (de la puissance d'une petite calculatrice de nos jours).

Modélisation de la structure, de l'évolution et de la magnétohydrodynamique des Etoiles: Vers un modèle 3-D intégré

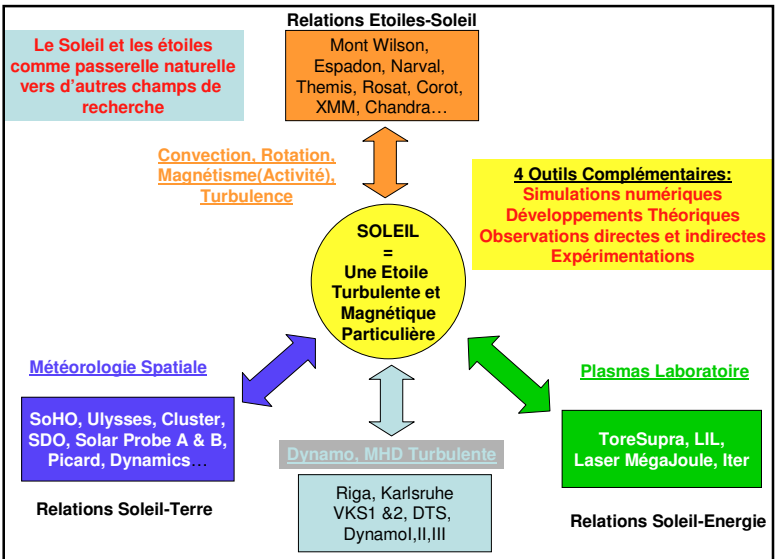
Ensuite la description microphysique a du être améliorer, notamment le taux des réactions nucléaires afin d'affiner le nbre de neutrinos produit, car pour le Soleil, la prédiction du taux de neutrinos était supérieure aux premières détections (nous savons depuis 2002 et les expériences SNO et SuperKamiokande, que c est du au fait que les neutrinos sont massifs et oscillent, changeant ainsi de saveur vers ν_τ, ν_μ et ainsi devenaient indétectables). Les abondances, les opacités, l'équation d'état du plasma solaire et par extension stellaire aussi ont et sont toujours l'objet de beaucoup d'études.

L'avènement de l'Héliosismologie au début des années 80 et surtout depuis les années 90 avec le satellite Soho et le réseau sol Gong, ont permi d'inverser la vitesse du son et ainsi contraindre fortement les modèles 1-D. Plus récemment la détection précise du profil de rotation, de la circulation méridienne, impose de forte contrainte sur les modèles 3-D mais aussi sur les modèles 1-D qui commencent à inclure les processus de mélange ailleurs que dans les zones convectives.

Avec l'augmentation de la puissance de calcul, les premiers modèles d'étoiles 2-D sur des temps longs (> 1 Mans) et bientôt 3-D voient le jour. Il faut toujours faire un choix entre la qualité de la Microphysique considérée et la description turbulente et non linéaire des mouvements macroscopiques.

Une multitude de méthodes numériques sont maintenant à notre disposition pour participer au Développement d'un modèle 3-D intégré des étoiles; différences finies, éléments finis, volume finis, Méthodes spectrales (basée sur la FFT quand possible), éléments spectraux (bcp d'avenir, allie précision numérique des méthodes spectrales avec la flexibilité des éléments finis)

Dr. A.S. Brun, Ecole Magnétisme Stellaire, La Rochelle – 25/09/07

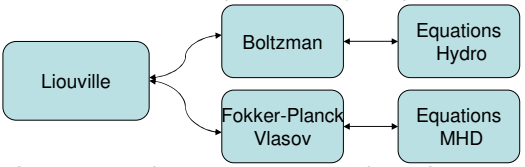


Dr. A.S. Brun, I **Relations Soleil-Effet Dynamo** 9 – 25/09/07

Plan Général du Cours

1ere partie: du microscopique au macroscopique

Courte introduction/dérivation des équation de la dynamique des fluides et des plasmas



2eme partie: Outils pour Modéliser les Etoiles et Magnétisme Stellaire

A) Modèles 2-D: Meilleur compromis pour micro et macro, mais pas encore au niveau des 2 autres approches, et surtout fluides en 2-D =/= fluides 3-D!

B) Modèles 3-D: Description simpliste de la microphysique, traitement fluides ou MHD des mouvements macroscopiques et des instabilités (permet l'étude du développement nonlinéaire des instabilités, phénomènes de saturation), difficulté d'atteindre les bons régimes, donc utilise approche LES-SGS

Le traitement précis de la microphysique (réactions nucléaires, eos, transfert de rayonnement) se développe de plus en plus, défis du début du 21eme siecle

C) Le Soleil comme étoile référence

D) Magnétisme au travers du diagramme de Hertzsprung-Russell (HR)

1ere Partie: Dérivation des Equations du Mouvement des Fluides et des Plasmas

Les fluides et les gaz sont faits d'atomes et de molécules: On peut soit les voir comme un continuum suivant des équation macroscopiques dynamiques ou comme une collection de particules individuelles influencées par des forces agissant sur elles. En particulier dans un plasma de laboratoire (gaz chargé) comme un Tokamak certains comportements/phénomènes physiques sont mieux décrit par une approche particulaire.

Notre but est donc de développer un théorie dynamique des fluides et plasmas, c.a.d une théorie physique à partir de laquelle l'évolution temporelle d'un système peut être étudiée. Cela nécessite 2 conditions:

1) Il nous faut une méthode permettant de décrire l'état du système à partir d'un jeu de variables
2) Il nous faut un jeu d'équations donnant la dérivée temporelle de ces variables

Dérivation des Equations du Mouvement des Fluides et des Plasmas

Hiérarchie des Différentes Théories

Niveaux	Fluides Neutres	Plasmas
0	N particules quantiques $\Psi(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_N)$ Eq de Schrödinger	idem fluides neutres
1	N particules classiques $(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_N; \vec{u}_1, ..., \vec{u}_N)$ Eq de Liouville Lois de Newton (eq d'Hamilton)	Idem fluides neutres
2	Fonction de distribution $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$ Eq de Boltzmann	Fonction de distribution $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$ Eq de Vlasov, Fokker-Planck
2 1/2	N/A	Modèle à deux fluides ions (massifs) et électrons $f_i(\vec{x}, \vec{u}, t), f_e(\vec{x}, \vec{u}, t)$
3	Modèle continu $\rho(\vec{x}, t), T(\vec{x}, t), \vec{u}(\vec{x}, t)$ Eq Hydrodynamiques	Modèle a un fluide $\rho(\vec{x}, t), T(\vec{x}, t),$ $\vec{u}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t)$ Eq Magnétohydrodynamiques

Rem: Dans un plasma il est possible d'avoir un champ magnétique B. Comme les plasmas sont de bons conducteurs, le champ électrique E peut être ignoré (E=0) à l'intérieur, par une réorganisation des charges. Ceci n'est cependant pas toujours vrai, alors le plasma est vu comme deux fluides un chargé positivement et un négativement => description niveau 2 ½ pour les plasmas

Dérivation des Equations du Mouvement des Fluides et des Plasmas

Hiérarchie des Différentes Théories

Peut on tjrs passer du niveau 0 à 1? Non si les effets quantiques sont importants, les e- dans les métaux, l'équation d'état des naines blanches par exemple.

$\lambda = h/p \sim h/\sqrt{mk_BT}$

Par contre si les paquets d'ondes ne se superposent pas (afin de réduire les interférences quantiques), se qui se traduit par:

$hn^{1/3}/\sqrt{mk_BT} << 1, \text{avec } n \text{ la densité des particules}$

Théorème d'Ehrenfest: si cette inégalité est satisfaite les paquets d'ondes se comportent comme des particules classiques.

Ensemble dans l'Espace des Phases, Théorème de Liouville

Soit un système dynamique de N particules décrit par les coordonnées générales de position et d'impulsion dans *l'espace des phases* (qs, ps ; s =1,…,N) et qui évolue selon les équations d'Hamilton:

$$\frac{\partial q_s}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_s} \; ; \; \frac{\partial p_s}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \text{ , avec } H(q_s, p_s, t) \text{ l'Hamiltonien} \qquad (1)$$

Remarque: La formulation Hamiltonienne ne peut pas être appliquée à toutes les théories, par exemple les systèmes dissipatifs, mais au niveau microscopique 1, les N particules peuvent suivre un traitement Hamiltonien (car à ce niveau la dissipation = aux mouvements aléatoires des particules).

Définition d'un ensemble: cela signifie un jeu de plusieurs répliques du même système, qui sont identiques sous tous les aspects excepté d'être dans un état différent à un instant t donné. Dès lors chaque point dans *l'espace des phases* est un membre d'un *ensemble* et leur évolution forme une trajectoire dans cet espace.

Soit ρ_{ens}(qs, ps, t) la densité des points d'ensemble à une localisation dans l'espace des phases;
(i.e. (qs(t), ps(t)) représente la trajectoire et ρ_{ens}(qs, ps, t) la mesure en ce point).
On peut alors démontrer que:

Théorème de Liouville:

$$\frac{D\rho_{ens}}{Dt} = 0 = \frac{\partial \rho_{ens}}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial q_s}{\partial t}\frac{\partial \rho_{ens}}{\partial q_s} + \sum_s \frac{\partial p_s}{\partial t}\frac{\partial \rho_{ens}}{\partial p_s} \qquad (1)$$

Corollaire: supposons que l'ensemble des points soit initialement à l'intérieur d'un élément de volume $d^nqs\, d^nps$ remplisse qqles instants plus tard le volume $d^nqs'\, d^nps'$. La conservation du nombre de points d'ensemble implique: $\rho_{ens}\, d^nqs\, d^nps = \rho_{ens}'\, d^nqs'\, d^nps'$. Or $\rho_{ens}=\rho_{ens}'$ (Liouville) ⇔ $d^nqs\, d^nps = d^nqs'\, d^nps'$ c'est-à-dire que le volume dans l'espace des phases le long de la trajectoire est constant.

Equation Boltzmann sans collision

Soit N particules classiques (similaires): Un état de notre système de N particules est décrit par 6N coordonnées de position et vitesse dans l'espace des phases (Γ-espace). Soit l'espace μ-space $(\vec{x}, \vec{u})$ à 6 dimensions (à 1 particule correspond 1 point dans le μ-espace).
Un point de Γ-espace correspond à N points dans μ-space. L'évolution temporelle du système forme une trajectoire dans le Γ-espace ou N trajectoires dans le μ-espace. Soit $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$ une fonction de distribution dans le μ-espace (ρ_{ens} dans Γ-espace). Si δN est le nombre de points dans un petit volume δV du μ-espace alors:

$$f(\vec{x}, \vec{u}, t) = \lim_{\delta V \to 0^+} \frac{\delta N}{\delta V}$$ (passage du niveau 1 à 2)

On peut obtenir une équation « à la Louiville » pour $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$ seulement si les trajectoires des points dans le μ-espace peuvent être déduite d'un Hamiltonien $H(\vec{x}, \vec{u}, t)$ tel que:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} H \; , \; \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{\nabla}_{\vec{u}} H \text{ , avec } \vec{\nabla}_{\vec{u}} = \frac{\partial}{\partial u_x}\hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial u_y}\hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial u_z}\hat{e}_z \qquad (1)$$

Pour que cela soit possible, il faut négliger les interactions mutuelles. On peut alors déduire:

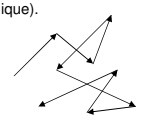
Equation de Boltzmann (cas sans collisions/interactions mutuelles):

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} f + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{u}} f = 0 \qquad (1)$$

Si ces interactions ne sont pas négligeables alors on se doit de modifier l'équation de Boltzmann sans collision. C'est plus facile pour les neutres (equation de Botlzmann avec terme de collisions) que pour des particules chargées, à cause des forces électromagnétiques à longues portées (equations de Lénard-Balescu, Fokker-Planck).

Intégrale de Collisions, Equation de Boltzmann

Collisions dans un gaz dilué neutre: ($na^3 << 1$, n densité de particules, a rayon)
Dans un gaz neutre il n'y pas d'interactions longues distances comme dans les plasmas, les particules interagissent uniquement quand elles se rencontrent (collision), c.a.d. quand leur séparation est < 2a.
Une particule se déplace librement en ligne droite entre chaque collision (cf. graphique).
Note: dans un gaz dilué on peut négliger les collisions multiples.



La distance moyenne parcourue est appelée le libre parcours moyen:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi a^2} => \lambda >> a$$

D'après l'équation de Boltzmann sans collision, il est clair que $f(\vec{x},\vec{u},t)$ ne change pas si les collisions sont absentes. Par contre $f(\vec{x},\vec{u},t)$ peut changer si

1) Certaines particules avec une vitesse change leur vitesse après collisions, donc f décroit
2) Certaines particules avec des vitesses différentes de , change pour un vitesse , donc f croit.

Nous devons donc modifier l'équation pour prendre en compte cette variation:

$$\frac{Df}{Dt}d^3xd^3u = -C_{out} + C_{in},$$

avec C_{in} et C_{out} les intégrales de collisions. Supposons que 2 particules avec vitesses u et u_1 changent u' et u_1' après une collision. On peut déduire une expression pour l'intégrale de collision et on obtient alors l'équation de Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}f + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{u}}f = \int d^3u_1 \int d\Omega|\vec{u}-\vec{u}_1|\sigma(\Omega)(ff_1^{'} - ff_1)$$

$$f = f(\vec{x},\vec{u},t)\quad f^{'} = f(\vec{x},\vec{u}^{'},t)\quad f_1 = f(\vec{x},\vec{u}_1,t)\quad f_1^{'} = f(\vec{x},\vec{u}_1^{'},t)$$

Théorème H, Equation de Conservation

Théorème H: $H = \int d^3u\, f\log f => \frac{dH}{dt} \leq 0$

Le système évolue et se relaxe (via les collisions) jusqu'à ce qu'il atteigne un état d'équilibre où H a atteint une valeur minimale, les particules possédant alors une distribution Maxwellienne:

$$f(\vec{u}) = n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\exp[-\frac{m(\vec{u}-\vec{u}_0)^2}{2k_B T}]$$ avec u_0 = <u> (moyenne) et $n = \int d^3u f(\vec{u})$

Cette distribution est la solution d'équilibre de l'équation de Boltzmann.

Soit une quantité conservée χ(**u**) pendant des collisions binaires => χ(**u**) + χ(**u$_1$**) = χ(**u'**) + χ(**u$_1$'**)
Multiplions l'équation de Boltzmann par χ(**u**) et intégrons sur d^3u

$$\int d^3u\chi\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}f + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{u}}f\right) = \int d^3u\int d^3u_1\int d\Omega|\vec{u}-\vec{u}_1|\sigma(\Omega)(ff_1^{'}-ff_1)\chi$$

$$\int d^3u\int d^3u_1\int d\Omega|\vec{u}-\vec{u}_1|\sigma(\Omega)(ff_1^{'}-ff_1)\chi =$$

$$\frac{1}{4}\int d^3u\int d^3u_1\int d\Omega|\vec{u}-\vec{u}_1|\sigma(\Omega)(ff_1^{'}-ff_1)(\chi+\chi_1-\chi^{'}-\chi_1^{'}) = 0$$

$$=> \int d^3u\chi\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}f + \frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{u}}f\right) = 0$$

Equation de Conservation

$$\int d^3u\,\chi\left(\frac{\partial f}{\partial t}+u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{F_i}{m}\frac{\partial f}{\partial u_i}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\int d^3u\,\chi f+\frac{\partial}{\partial x_i}\int d^3u\,\chi u_i f - \int d^3u\,u_i f\frac{\partial \chi}{\partial x_i}+\frac{1}{m}\int d^3u\,\frac{\partial}{\partial u_i}(\chi F_i f) - \frac{1}{m}\int d^3u\,\frac{\partial \chi}{\partial u_i}F_i f-\frac{1}{m}\int d^3u\,\chi\frac{\partial F_i}{\partial u_i}f=0$$

Rem: $\int d^3u\,\frac{\partial}{\partial u_i}(\chi F_i f)=0$, théorème de Gauss change l'intégrale de volume en intégrale de surface et parce que f-> 0 à l'infini

Définissons la moyenne d'une quantité Q associée à chaque particule:

$$< Q >= \frac{1}{n}\int d^3u\,Qf,\ \text{avec } n=\int d^3u\,f\ \text{, la densité numérique par volume unité}$$

$$=> \int d^3u\,Qf = n < Q >,$$ est la quantité totale par volume unité de la quantité Q

$$\frac{\partial}{\partial t}n<\chi>+\frac{\partial}{\partial x_i}n<\chi u_i>-n<u_i\frac{\partial \chi}{\partial x_i}>-\frac{n}{m}<\frac{\partial \chi}{\partial u_i}F_i>-\frac{n}{m}<\chi\frac{\partial F_i}{\partial u_i}>=0$$

Les Equations aux Moments

L'équation de conservation précédente joue un rôle important pour lier la description microscopique à la description macroscopique quand il est possible de traiter les particules comme un continuum. Comme la masse, l'impulsion et l'énergie (dans le gas d'un gaz monoatomique) sont conservées dans les collisions binaires, nous pouvons les introduire dans l'équation, par ex pour χ=m, on obtient l'équation de continuité (conservation de la masse) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(nm)+\frac{\partial}{\partial x_i}(nm<u_i>)=0$$

Nombre de Knudsen
K = λ/L, si K <<1 alors approche fluide valide

$$<=> \frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)=0\ \text{, avec } \rho=nm \text{ et } v_i=<u_i>$$

Rem: **u** – **v**, est la vitesse (relative) d'une particule par rapport à l'écoulement moyen.
Pour χ=mu$_j$ l'impulsion, et pour χ=0.5m|**u**-**v**|² l'énergie cinétique de translation, on obtient:

$$\rho\left(\frac{\partial v_j}{\partial t}+v_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=-\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i}+\frac{\rho}{m}F_j$$

$$\rho\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t}+v_i\frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+P_{ij}\Lambda_{ij}=0$$

avec

$$\epsilon=0.5<|u-v|^2>\ ,\ P_{ij}=nm<(u_i-v_i)(u_j-v_j)>=nm[<u_iu_j>-v_iv_j]$$

$$\vec{q}=<(\vec{u}-\vec{v})|\vec{u}-\vec{v}|^2>\ ,\ \Lambda_{ij}=0.5\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

On les appelle équations aux moments, car nous utilisons les puissances 0, 1, 2 de u. Cependant nous avons 14 variables pour 5 équations, ce n'est donc pas une théorie dynamique en l'état! Il nous relier les quantités entre elles, afin d'obtenir nbre de var = nbre d'eq.

Equations d'Euler et de Navier-Stokes

Les collisions jouent un rôle important pour établir un comportement fluide on peut s'attendre à ce que les distributions soient Maxwelliennes.

$$P_{ij} = p\delta_{ij} \quad p = nk_BT \ , \ q = 0 \qquad P_{ij}\Lambda_{ij} = 0.5p\delta_{ij}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = p\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\rho}{m}F_j \ , \ \rho\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + v_i\frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}\right) + p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$$

Rem: 5 var = 5 eq, nous avons donc obtenu une théorie dynamique. Mais q=0 (pas de flux de chaleur) et Pij est diagonal, donc pas de viscosité, ce n'est donc pas totalement un fluide….

Il est nécessaire de considérer des écart à la distributions Maxwelliennes afin de développer une théorie des processus de transport: $P_{ij} = p\delta_{ij} + \pi_{ij}$ $\pi_{ij} = -2\mu[\Lambda_{ij}\Lambda_{ij} - 1/3(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})^2]$ (cas μ cst) $\vec{q} = -K\vec{\nabla}T$

Cas plus réaliste $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0$

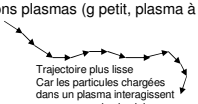
$$\rho\left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\left[\nabla^2 v_j + 1/3\frac{\partial}{\partial x_j}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\right] + \frac{\rho}{m}F_j$$

$$\rho\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + v_i\frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}\right) - \vec{\nabla}\cdot(K\vec{\nabla}T) + p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - 2\mu[\Lambda_{ij}\Lambda_{ij} - 1/3(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})^2] = 0$$

Cas des Plasmas (g < 1)

Interactions entre particules chargées plus compliqué à traiter. Collisions ions-neutres, similaire au cas neutres-neutres, par contre les collisions ions-ions, font intervenir la force de Coulomb. Le rôle des interactions longues distances p/r aux interactions courtes portées (assimilées à des collisions) et crucial pour déterminer le comportement du plasma (le parametre plasma g est utile pour évaluer cela). Il peut y avoir des mouvements collectifs des particules, comme des oscillations plasmas (g petit, plasma à faible densité), et toute un nouvelle gamme d'instabilités.

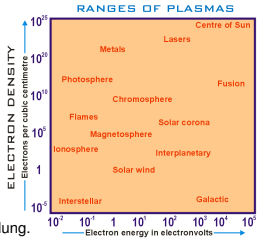
Longueur de Debye: $\lambda_D = \left(\frac{k_BT}{8\pi ne^2}\right)^{1/2}$

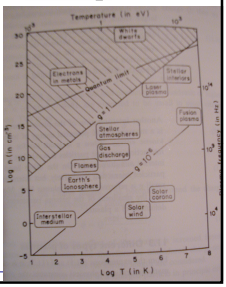


$n\lambda_D^3$ particules interagissent dans un volume de Debye. Les effets d'écrantage font qu'au dela de la longueur de Debye, le plasma peut etre considéré comme neut

Fréquence plasma: $\omega_p = \left(\frac{4\pi ne^2}{m_e}\right)^{1/2}$ Paramètre Plasma: $g = \frac{1}{n\lambda_D^3}$

Pas de séparation de charges au delà de λ_D ou plus longtemps que $1/\omega_p$.
Le comportement macroscopique d'un plasma est différent de celui d'un fluide, est le fait qu'une force électromotrice appliqué à un plasma peut générer de large courant en faisant circuler les ions et les e- en sens opposé. Des plasmas peuvent donc soutenir de large courant tout en étant quasi-neutre.
La collision de particules chargées génèrent un rayonnement Bremsstrahlung. Rayt Synchotron (part spirale autour d'une ligne de champ B)





Hierarchie BBGKY, Equation de Vlasov

Hierachie BBGKY (Bogoliubov, Born & Green, Kirkwood, Yvon): une approche vers une theorie cinétique des systèmes comme les plasmas dans lesquels les interaction entre plusieurs particules sont importantes.

Soit un système de N particules, et un espace des phase G, une configuration ⇔ 1 point dans G. Soit $\rho_N(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, .., \mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n, t)$ la densité des points d'ensemble. Nous cherchons la probabilité associée $f_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, .., \mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n, t)$ telle que les particules 1 à K aient les coordonnées (x1, u1), .., (xn, un) au temps t. Nous pouvons la calculer en intégrant ρ_N sur le nombre de particules restantes K+1 à N.
Comme ρ_N satisfait l'équation de Liouville, on peut démontrer que f_k suit l'équation suivante:

$$\frac{\partial f_K}{\partial t} + \sum_{r=1}^{K} \vec{u}_r \cdot \vec{\nabla}_{x_r} f_K + \sum_{r=1}^{K} \sum_{s=1, s\neq r}^{K} \frac{\vec{F}_{rs}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{u}_r} f_K + \frac{(N-K)}{V} \sum_{r=1}^{K} \int d\vec{x}_{K+1}\, d\vec{u}_{K+1} \frac{\vec{F}_{r,K+1}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{u}_r} f_{K+1} = 0$$

$\mathbf{F}_{rs}$ est la force excercée par la s^{eme} particule vers la r^{eme} . Nous remarquons que l'équation pour f_k fait intervenir f_{k+1}, et ainsi de suite, résultant en une hiérarchie d'équation. F1 est la distribution de probabilité usuelle. f2 est la probabilité associée que la particule 1 est pour coordonnées (x1, u1) et la particule 2 (X2, u2) en même temps. Si 1 n'influence pas 2, alors f2=f1(1)f1(2). Sinon leur interaction implique: f2(1,2)=f1(1)f1(2)+g(1,2). g(1,2) est la fonction de corrélation à deux particules (points) (pour f 3: f3(1,2,3)=f1(1)f1(2)f1(3)+f1(1)g(2,3)+f1(2)g(1,3)+f1(3)g(1,2)+h(1,2,3), Mayer cluster expansion) .

Quand un plasma est en équilibre thermodynamique, on peut considérer que la fct f1(1) est une Maxwellienne et la fct de corrélation g(1,2) a une forme bien déterminée. Voila l'expression pour K=1:

$$\frac{\partial f_1(1)}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla}_{x_1} f_1(1) + \frac{N}{V} \int d\vec{x}_2\, d\vec{u}_2 \frac{\vec{F}_{12}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{u}_1} [f_1(1) f_1(2) + g(1,2)] = 0$$

Equation de Vlasov

On l'obtient en ignorant la fonction de corrélation à deux points g(1,2):

$$\frac{\partial f_1(1)}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla}_{x_1} f_1(1) + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{u}_1} f_1(1) = 0$$

Où $\vec{F} = N/V \int d\vec{x}_2\, d\vec{u}_2 \vec{F}_{12} f_1(2)$

est une force régulière agissant sur la particule 1 à cause des interactions longues distances de toutes les autres particules.

L'équation de Vlasov ne peut traiter les collisions. Cette équation est utile pour étudier les écarts à un équilibre, elle ne peut faire relaxer un plasma vers un équilibre et la tendances pour les particules à Tendre vers une distribution de Maxwell.

Si on ne néglige pas g(1,2), il faut alors résoudre l'équation pour f2, et trouver une expression pour h(1,2,3). En considérant que h(1,2,3)=0, et que $f_1(1)=f_1(x_1, u_1, t)=f1(u_1,t)$, alors une expression pour g(1,2) peut être écrite et on obtient l'équation de Lenard-Balescu. Dans cette équation, comme les collisions sont prises en compte, la distribution f1 peut relaxer asymptotiquement vers une Maxwellienne.
Cette équation LB est un cas spécial de l'équation de Fokker-Planck.

Modèles deux fluides (e- et p)

Soient les fonctions de distribution $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ et $f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ représentant les ions et les électrons d'un plasma, et faisons l'hypothèse quand suivent chacune l'équation de Vlasov. Si la force F est purement électromagnétique, l'équation de Vlasov, s'écrit:

$$\frac{\partial f_\ell}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f_\ell + \frac{q_\ell}{m_\ell}(\vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{u}} f_\ell = 0$$

avec l = i ou e, et q_e=e, q_i=-e, et m_e et m_i la masse respectivement des électrons et des ions. Multiplions par $\chi(u)$ et intégrons (cf. dérivation de l'eq Boltzmann):

$$\frac{\partial}{\partial t} n_\ell < \chi > + \frac{\partial}{\partial x_i} n_\ell < \chi u_i > - \frac{n_\ell}{m_\ell} < \frac{\partial \chi}{\partial u_i} F_i >= 0$$

Si χ=1 alors on obtient l'équation de continuité:

$$\frac{\partial n_\ell}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\ell \vec{v}_\ell) = 0$$

avec $\vec{v}_\ell =< \vec{u} >_\ell$ la vitesse moyenne de la particule de type l.

Si χ=$m_i u_j$, nous obtenons après qqles manipulations à l'équation d'Euler pour les ions et les e- (en considérant la pression comme un scalaire):

cold plasma approxim.

$$m_\ell n_\ell \left(\frac{\partial \vec{v}_\ell}{\partial t} + (\vec{v}_\ell \cdot \nabla)\vec{v}_\ell \right) = -\nabla p_\ell + q_\ell n_\ell \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_\ell}{c} \times \vec{B} \right) \qquad p_\ell = 0$$

16 scalaires

10 equations

$$p_\ell = n_\ell k_B T_\ell \quad (T_i \text{ \& } T_e \text{ cst})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi(n_i - n_e)e, \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad p_\ell = C n_\ell^\gamma$$

Processus adiabatiques

équations de Maxwell

=> + 6 équations

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \ \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(n_i \vec{v}_i - n_e \vec{v}_e)e + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

16 variables = 16 equations ⇔ théorie dynamique, Modèles deux fluides.

Valable pour les plasmas sans collision

Approche fluide unique, Equations d'Induction

Quand on considère des phénomènes dans un plasma ayant des échelles spatiales bien plus grandes que la longueur de Debye λ et des échelles temporelles bien plus longues que l'inverse de la fréquence plasma ω_p , la séparation de charge peut etre négligé dans le plasma

=> qu'un gaz complétement ionisé peut etre traité comme un fluide unique (niveau 2 1/2 -> 3) .

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \qquad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (7)$$

A partir des équations de Maxwell (5) et (7), en négligeant le courant de déplacement (valable si v << c):

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \mathbf{E} \text{ et } \mathbf{J} = \frac{c}{4\pi}(\nabla \times \mathbf{B}),$$

et de loi d'Ohm, pour un fluide conducteur en mouvement à la vitesse $\mathbf{v}$: $\mathbf{J} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}\right)$

on peut déduire l'équation d'induction:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \left(\frac{c\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

$$= -\nabla \times \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B})}$$

avec $\eta = c^2/4\pi\sigma$ la diffusivité magnétique,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}, \text{ si } \eta = cst.$$

Equations de la Magnétohydrodynamique

Continuité, Navier-Stokes, Energie (+ force de Laplace + diffusion Ohmique):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho \mathbf{v}), \quad \boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0}$$

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} - \boldsymbol{\nabla}P + \rho\mathbf{g} - 2\rho\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{o}\times\mathbf{v} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{D}} + \boxed{\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}},$$

$$\rho T\frac{\partial S}{\partial t} = -\rho T(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})S + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\kappa_r\rho c_p\boldsymbol{\nabla}T) + \boxed{\frac{4\pi\eta}{c^2}\mathbf{J}^2} + 2\rho\nu\left[e_{ij}e_{ij} - 1/3(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})^2\right] + \boxed{\rho\epsilon},$$

Source de chaleur si nécessaire, cœur d'étoile A par ex.

plus induction:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) - \boldsymbol{\nabla}\times(\eta\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) \qquad (8)$$

L'Effet Dynamo qu'est ce que c'est?

La source principale de champs magnétiques dans l'Univers est due à l'effet dynamo.

Une définition: c'est la propriété que possède un fluide conducteur de générer un champ magnétique par ses mouvements (par auto-induction) et d'entretenir ce champ contre la dissipation Ohmique

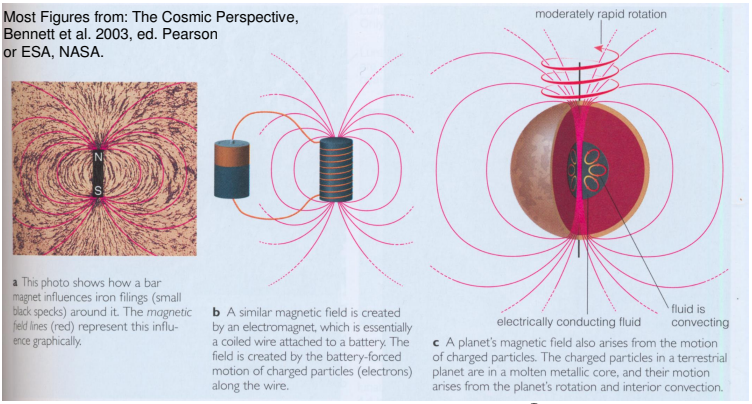
C'est un effet tri dimensionnel, il y a par exemple un théorème anti-dynamo de Cowling interdisant une dynamo purement axisymétrique

Quelsques livres de référence:

MHD: Cowling (1957), Moffatt (1978), Radler & Krause (1981), Parker (1989), Chouduri (1997), Davidson (2000),
Magnétisme cosmique: Zeldovich et al. (1983), Parker (1989), Hollerbach & Rudiger (2004),
Dynamique des fluides et turbulence: Kundu & Cohen (2003), Rieutord (1995), Lesieur 1999, Frisch 1999

Champ magnétique et effet dynamo

Most Figures from: The Cosmic Perspective, Bennett et al. 2003, ed. Pearson or ESA, NASA.



a This photo shows how a bar magnet influences iron filings (small black specks) around it. The *magnetic field lines* (red) represent this influence graphically.

b A similar magnetic field is created by an electromagnet, which is essentially a coiled wire attached to a battery. The field is created by the battery-forced motion of charged particles (electrons) along the wire.

c A planet's magnetic field also arises from the motion of charged particles. The charged particles in a terrestrial planet are in a molten metallic core, and their motion arises from the planet's rotation and interior convection.

Champ magnétique B, décroit en un temps Ohmique: $\tau_\eta = \frac{R^2}{\eta}$
Ce temps est long sauf en laboratoire et dans les petits corps célestes comme les satellites naturels (lunes) ou planètes, donc la présence de B dans les planètes et la variabilité de B dans certains corps (étoiles, galaxies) => effet dynamo

Quelques Remarques sur l'Equation d'Induction

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}$$

Si le fluide est au repos, l'équation se réduit à: $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \Delta \mathbf{B}$
Ceci est une équation de diffusion, le champ magnétique **B** décroit dans une sphère uniforme de rayon R en un temps Ohmique: $\tau_\eta = \frac{R^2}{\pi^2 \eta}$

Dans les conducteurs en laboratoire, τ_η est petit (10 s pour une sphère de cuivre de 1m), mais dans les conducteurs cosmiques il peut être gigantesque (> 10^{10} d'années)

Par contre si le fluide est en mouvement (et que sa résistance est négligeable), l'équation devient: $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$

Cela signifie que les lignes de champ magnétique sont « gelées » dans le fluide

Quelques Remarques sur l'Equation d'Induction

Le nombre de Reynolds magnétique Rm=vL/η permet de connaître le régime dans lequel le système étudié se trouve, il est généralement petit dans les expériences de laboratoires (Rm ~1 et < 50) & grand dans les objets cosmiques. Il y a théoriquement effet dynamo si Rm est suffisamment grand

Cela signifie que bien que le courant électrique dans les conducteurs de laboratoires soit principalement déterminé par la conductivité σ, dans un corps cosmique σ n'a que très peu d'influence sur l'amplitude des courants circulant, un changement par ex d'un facteur 10 de σ, n'induisant pas de changement significatif de **B**. La conductivité ne sert qu'à déterminer le champ électrique **E** (faible) nécessaire à la présence de ses courants (Cowling 1957).

Remarque: le premier terme de l'équation d'induction peut être décomposé en 2 parties,

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

un terme (le 1er) de distortion et d'étirement de **B** et un terme de transport advectif.

Kinematic Mean Field Theory

Starting point is the magnetic induction equation of MHD:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B},$$

where **B** is the magnetic field, **u** is the fluid velocity and η is the magnetic diffusivity (assumed constant for simplicity).

Assume scale separation between large- and small-scale field and flow:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{u},$$

where **B** and **U** vary on some large length scale L, and **u** and **b** vary on a much smaller scale l.

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{B}_0, \quad \langle \mathbf{U} \rangle = \mathbf{U}_0,$$

where averages are taken over some intermediate scale $l \ll a \ll L$.

For simplicity, ignore large-scale flow, for the moment.

Induction equation for mean field:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}_0,$$

where mean emf is $\mathcal{E} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$.

This equation is exact, but is only useful if we can relate $\mathcal{E}$ to $\mathbf{B}_0$.

Consider the induction equation for the fluctuating field:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) + \nabla \times \mathbf{G} + \eta \nabla^2 \mathbf{b},$$

Where $\mathbf{G} = \mathbf{u} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$. "pain in the neck term"

Si, G est petit, alors la force électromotrice moyenne (mean emf), peut être développée en fonction de <B>ϕ :

$$< \mathcal{E}_i >_\phi = < (u \times b)_i >_\phi = \alpha_{ij} < B_j >_\phi + \beta_{ijk} \frac{\partial < B_j >_\phi}{\partial x_k} + \ldots$$

BASIC PROPERTIES OF THE MEAN FIELD EQUATIONS

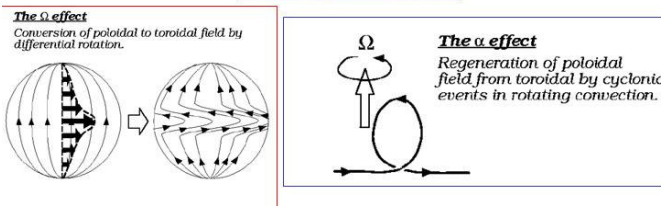
Add back in the mean flow U_0 and the mean field equation becomes

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\alpha \mathbf{B}_0 + \mathbf{U}_0 \times \mathbf{B}_0) + (\eta + \beta) \nabla^2 \mathbf{B}_0.$$

ici α et β considérés isotropes

Now consider simplest case where $\alpha = \alpha_0 \cos\theta$ and $U_0 = U_0 \sin\theta\, \mathbf{e}_\phi$

In contrast to the induction equation, this can be solved for axisymmetric mean fields of the form $\mathbf{B}_0 = B_{0t} \mathbf{e}_\varphi + \nabla \times (A_{0P} \mathbf{e}_\varphi)$



Modèles de Dynamo cinématique
2-D MHD axisymmétrique du Soleil

- Distributed dynamo: fails
- Interface dynamo:
  1) alpha-omega $\alpha\omega$
  2) Babcock-Leigthon (flux transport)
  3) mixed of both! (best model so far)

Modèles Dynamo Champs Moyens:

- Résolvent équation d'induction en axisymmétrique (donc introduction d'un terme pour satisfaire Cowling anti-dynamo théoreme)
- C'est l'effet alpha , toroidal -> poloidal
- Ou un terme source de surface S, toroidal -> poloidal
- Assument un profil de rotation => effet Omega (pol->tor)
- Régime cinématique (pas de retour sur champ de vitesse)
- Certains modèles prescribent aussi une circulation méridienne

Plus: rapide donc large étude d'espace de paramètres
paramétrisation de alpha permet un réglage fin,
résultats comparable aux observations

Moins: cinématique, prescrit alpha, Omega (éventuellement déduit de l'héliosismologie), MC (si présente) et mag diffusivité de manière non consistante

L'équation d'induction

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \left(\frac{c\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

$$= -\nabla \times \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

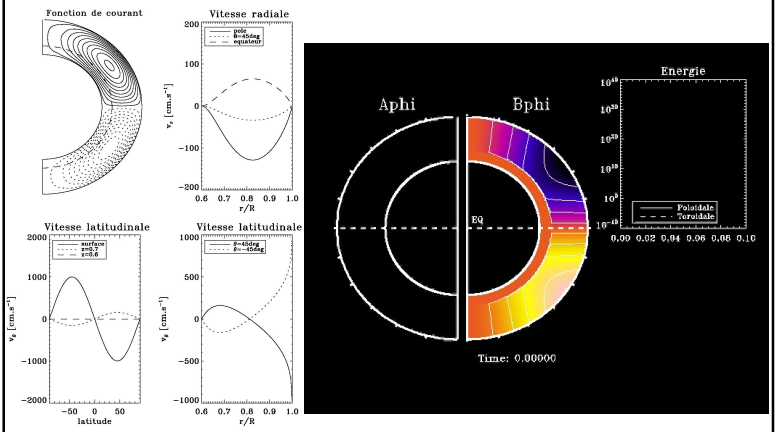
$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B})}$$

avec $\eta = c^2/4\pi\sigma$ la diffusivité magnétique,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}, \text{ si } \eta = cst.$$

2D Mean Field models: Babcock-Leighton

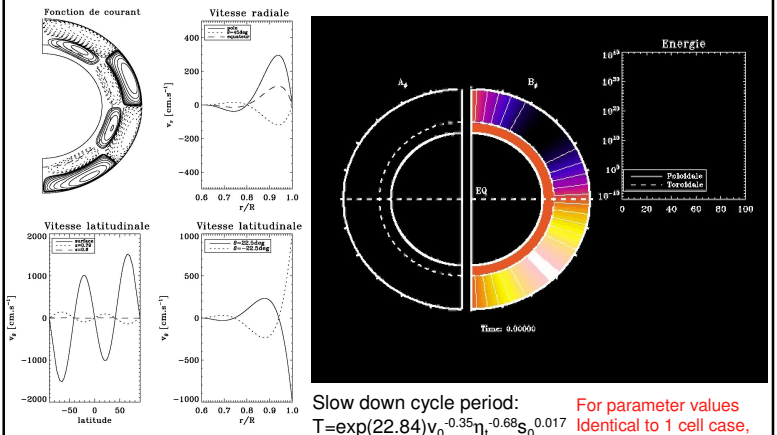
1 single cell per hemisphere



Jouve & Brun, 2005 submitted

2D Mean Field models: Babcock-Leighton

2 cells in latitude, 2 in radius per hemisphere



Slow down cycle period:

$T=\exp(22.84)v_0^{-0.35}\eta_t^{-0.68}s_0^{0.017}$

For parameter values Identical to 1 cell case, find T=37 yr instead of 22

Jouve & Brun, 2005 submitted

Dynamo Champs magnétiques moyens

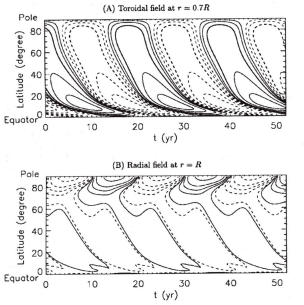


FIG. 7.—Butterfly diagrams for a solar-like solution. The format and contour level spacing is identical to Fig. 3. This solution is produced using parameter values $u_0 = 1500$ cm s^{-1}, $s_0 = 20$ cm s^{-1}, and $\eta_T = 3 \times 10^{11}$ cm^2 s^{-1}, corresponding to $C_\Omega = 4.7 \times 10^4$, $C_\chi = 4.64$, and $R_m = 348$. It is characterized by a cycle period $T = 19.8$ yr, maximum toroidal field strength below the interface, $B_{\phi max} = 10$ kG, and maximum surface polar field $B_{r max} = 140$ G. Note how the surface polar field (b) changes sign as the low-latitude toroidal field on (a) is maximal in amplitude.

(Charbonneau et Dikpati 2001)

(Parker 1955
Babcock 1961
Leighton 1969,
Wang et al. 1971,
Roberts & Stix 1972
Parker 1993
Chouduri et al. 1995
Durney 1995,…
Rudiger & Brandenburg 1995
Charbonneau & Mc Gregor 1996
Tobias 1996
Kuker et al. 2001
Charbonneau et Dikpati 2001
et bien d'autres….)

Dynamo Champs magnétiques moyens

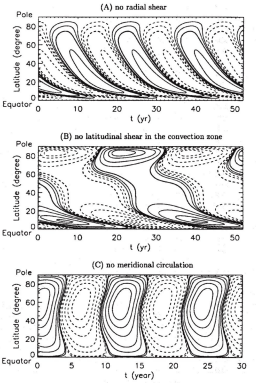


FIG. 4.—Three toroidal field butterfly diagrams resulting from various numerical "surgical" experiments. The format is the same as in Fig. 3a. (*a*) Solution where the radial shear was artificially shut off, with only the latitudinal shear left to contribute to the generation of toroidal fields. (*b*) Opposite experiment, i.e., the latitudinal shear has been artificially shut off. For these two solutions all parameter values are otherwise identical to the reference solution of Figs. 2 and 3. (*c*) Solution where the meridional circulation has been turned off. The resulting butterfly diagram bears a striking resemblance to that produced by mean field interface dynamos (see text).

Diagramme papillon

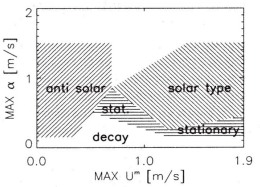


Fig. 11. The different types of solution found for varying strengths of the α-effect and the flow speed. The terms *solar type* and *anti solar* refer to equatorward and poleward drifting field belts, respectively, while *stationary* refers to a stationary field. The magnetic diffusivity always has a value of 10^{11} cm^2/s.

(Charbonneau et Dikpati 2001, Kuker et al. 2002)

Dynamo cinématique vs dynamique (nonlinéaire)

Si la force de Laplace peut être négligé dans l'équation de Navier-Stokes, on parle alors de *dynamo cinématique*, l'instabilité est linéaire avec une croissance exponentielle

Dans le cas contraire (ce qui arrive pour des champs B d'amplitudes finies), on parle de *dynamo dynamique*, il y a rétroaction de la force de Laplace sur les mouvements, l'instabilité sature et le champ magnétique atteint une amplitude finie. L'énergie magnétique ME=$B^2/8\pi$ est proche de l'équipartition avec l'énergie cinétique KE=$0.5\rho v^2$ des mouvements fluides.

Remarque: la force de la Laplace peut se décomposer en 2 parties,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}$$
$$= \boxed{\frac{1}{8\pi}\nabla B^2}_a - \boxed{\frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}}_b$$

Une pression magnétique (terme a) perpendiculaire aux lignes de champ magnétique et une tension magnétique (terme b) le long de celles-ci.

Modèles Dynamo Non-linéaires:

- Résolvent les équations de la Magnétohydrodynamiques (donc pas de terme extra)
- Régime dynamique (retour sur champ de vitesse par Lorentz)
- Modèles avec ou sans convection
- Certains modèles prescribent le cisaillement dans la tachocline

Moins: lent donc petite étude d'espace de paramètres, 'Building block' pas de modèle complet (pour l'instant), donc comparaison avec observations moins directes

Plus: dynamique, effet alpha, Omega et MC de manière consistante, 3D (variations longitudes)

Equations de la Magnétohydrodynamique

Continuité, Navier-Stokes, Energie (+ force de Laplace + diffusion Ohmique):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho \mathbf{v}), \quad \boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0}$$

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} - \boldsymbol{\nabla}P + \rho\mathbf{g} - 2\rho\boldsymbol{\Omega_o}\times\mathbf{v}$$

$$- \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{D}} + \boxed{\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}},$$

$$\rho T\frac{\partial S}{\partial t} = -\rho T(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})S + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\kappa_r\rho c_p\boldsymbol{\nabla}T) + \boxed{\frac{4\pi\eta}{c^2}\mathbf{J}^2}$$

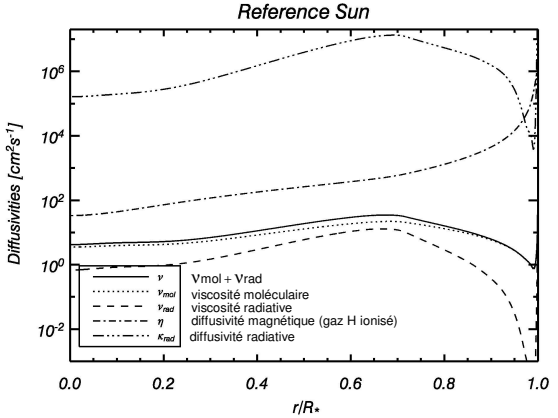
$$+ 2\rho\nu\left[e_{ij}e_{ij} - 1/3(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})^2\right] + \boxed{\rho\epsilon},$$

Source de chaleur

plus induction:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) - \boldsymbol{\nabla}\times(\eta\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) \qquad (8)$$

Diffusivités dans le Soleil

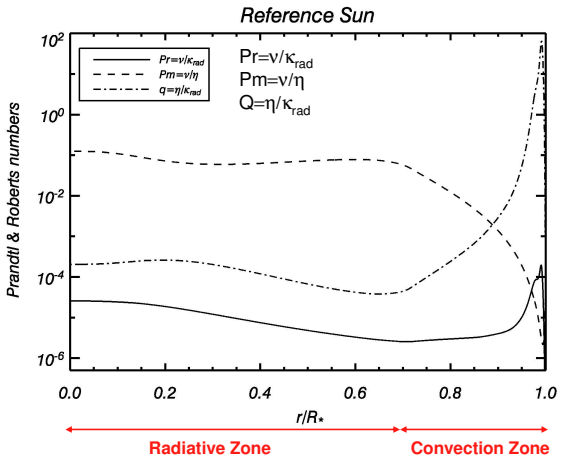


$$\nu_{rad} = \frac{4}{15}\frac{a}{c}\frac{T^4}{\rho^2\kappa_{opa}} \quad \nu_{mol} = \frac{2.2\,10^{-15}\,T^{5/2}}{\ln\Lambda\,\rho} \quad \eta = 5.2\,10^{11}\ln\Lambda\,T^{-3/2}$$

$$\kappa_{rad} = \frac{\chi}{\rho c_p} = \frac{4}{3}\frac{acT^3}{\rho^2 c_p \kappa_{opa}}$$

See Zeldovich et al. 1983, for a discussion of the formula of ν, η, κ

Prandtl & Roberts Number



Model's Hypothesis

Anelastic* approximation filters sound waves** $(\partial\rho/\partial t = 0)$ ***but retains stratification ***(linear expansion of thermodynamic variables):***

$$\rho(r,\theta,\phi,t) \rightarrow \bar{\rho}(r,t) + \rho(r,\theta,\phi,t),$$

Simpler continuity eq: $$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\bar{\rho}\mathbf{v}) = 0$$

Numerical stability (Courant-Friedrich-Lewy) criteria is based on convective velocity instead of sound speed:

$$\Delta t \leq \left|\Delta x / v_{conv}\right|_{min}, \text{ (> 5 minutes)}$$

We assume a Large-Eddy-Simulation (LES) and subgrid scale treatment (SGS): effective (turbulent) diffusivities ν, κ, η and unresolved energy Flux, $F \alpha \kappa dS/dr$

Work in progress with N. Mansour's group to improve subgrid scale modelling
In the spirit of Wong & Lilly 1994, subgrid scale modelling

Anelastic MHD Equations

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\bar{\rho}\mathbf{v}) = 0, \qquad & \boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0}, \\
\bar{\rho}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega}_0\times\mathbf{v}\right) &= -\boldsymbol{\nabla}P + \rho\mathbf{g} \\
+\boxed{\tfrac{1}{4\pi}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}} &- \boldsymbol{\nabla}\cdot\bar{\mathcal{D}} - [\boldsymbol{\nabla}\bar{P} - \bar{\rho}\mathbf{g}], \\
\bar{\rho}\bar{T}\frac{\partial S}{\partial t} + \bar{\rho}\bar{T}\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\bar{S}+S) &= \boxed{\tfrac{4\pi\eta}{c^2}\mathbf{j}^2} + \boxed{\bar{\rho}\epsilon}, \\
+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\kappa_r\bar{\rho}c_p\boldsymbol{\nabla}(\bar{T}+T)) &+ \boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\kappa\bar{\rho}\bar{T}\boldsymbol{\nabla}(\bar{S}+S))} \\
+2\bar{\rho}\nu[e_{ij}e_{ij} &- 1/3(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})^2]
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) - \boldsymbol{\nabla}\times(\eta\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})$$

$$\bar{\mathcal{D}}_{ij} = -2\bar{\rho}\nu[e_{ij} - 1/3(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\delta_{ij}],$$

Case of a Stratified Compressible Fluid
under the influence of Rotation and Magnetic field

Derivation of the Set of Equations to be Solved Numerically

We now express the MHD anelastic equations as they are solved by our numerical algorithm, making use of a toroidal/poloidal decomposition of mass flux and magnetic field :

$$\bar{\rho}\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times(W\hat{\mathbf{e}}_r)+\boldsymbol{\nabla}\times(Z\hat{\mathbf{e}}_r),$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times(C\hat{\mathbf{e}}_r)+\boldsymbol{\nabla}\times(A\hat{\mathbf{e}}_r).$$

Diagnostic equations for the streamfunctions and potentials W, Z, A, and C are obtained by considering:

1) the vertical component of the momentum and induction equations
2) the vertical component of their curl.

We use the energy equation for the specific entropy S.

A Poisson equation for pressure can then be derived by taking the divergence of the momentum equation. However, for numerical accuracy we choose to only take the horizontal divergence of the momentum equations rather than the full divergence.
This results in a diagnostic equation for the horizontal divergence of the velocity field, which is proportional to: $\frac{\partial W}{\partial r}$

Set of Equations Solved in ASH

System of equations of the 17th order

Linear 'nonlinear' terms

$$\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\frac{\partial W_{\ell m}}{\partial t} = \mathcal{L}^W+\mathcal{N}^W$$

$$-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W_{\ell m}}{\partial r}\right) = \mathcal{L}^P+\mathcal{N}^P$$

$$\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\frac{\partial Z_{\ell m}}{\partial t} = \mathcal{L}^Z+\mathcal{N}^Z$$

$$\frac{\partial S_{\ell m}}{\partial t} = \mathcal{L}^S+\mathcal{N}^S$$

$$\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\frac{\partial A_{\ell m}}{\partial t} = \mathcal{L}^A+\mathcal{N}^A$$

$$\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\frac{\partial C_{\ell m}}{\partial t} = \mathcal{L}^C+\mathcal{N}^C$$

See for details Brun, Miesch & Toomre, ApJ, 614, 1073

Numerical Methods

***Spectral Method** (Boyd 1989, Bonazzola et al. 1998, cf Talk Grandclément):*

Horizontal Dimensions: Projection on spherical harmonics $\mathbf{Y_l^m}$ (up to $l=l_{max}=(2N_\theta-1)/3$)

$$W(r,\theta_i,\phi_j,t) = \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} \sum_{\ell=|m|}^{l_{max}(m)} W_\ell^m(r,t) Y_{\ell m}(\theta_i,\phi_j)\,,$$

with $$Y_\ell^m(\theta,\phi) = C_\ell^m P_\ell^m(\cos\theta)\exp^{im\phi}$$

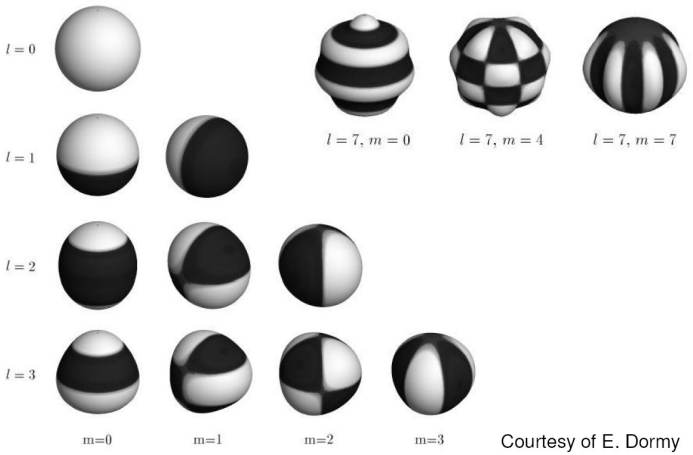
where P_{lm} are the associated Legendre polynomials and the coefficients C_{lm} are defined:

$$C_\ell^m = (-1)^m \left[\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^{1/2}$$

We then need to determined the coefficients $W_{lm}(r,t)$ at the N_θ and N_ϕ Legendre and Fourrier collocation points $\boldsymbol{\phi_j}$ and $\boldsymbol{\theta_i}$,which are (assuming Gaussian quadrature for numerical accuracy when converting integrals into sums) :

$$\phi_j = \frac{2\pi j}{N_\phi} \text{ and } \theta_i = \text{ zeroes of } P_{N_\theta}(\cos\theta)$$

Examples of Spherical Harmonics



Courtesy of E. Dormy

Numerical Methods

***Spectral Method** (Boyd 1989, Bonazzola et al. 1998, cf Talk Grandclément):*

Radial Dimension: Projection on Chebyshev polynomials (N_r Gauss-Lobatto collocation points).

$$W_\ell^m(r_k,t) = \frac{2}{N_r-1}\sum_{n=1}^{N_r\,''} W_{\ell n}^m(t) T_n(r_k)\,, \text{ avec } 1 \le k \le N_r.$$

With $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ and $x \in [-1,1]$

The physical radii r_k is related to collocation gridpoints x_k by: $r_k = 0.5*[(r_{bot}+r_{top})+(r_{top}-r_{bot})x_k]$

For practical reasons, let's use a matrix notation for the above equation

$$W_\ell^m(r_k,t) = \mathcal{T}_{kn} W_{\ell n}^m(t),$$

Numerical Methods

Temporal Evolution: we want to solve an initial value problem

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(y(t),t) \text{ with } f(y_0, t=0) = f_0$$

We can approximate this formula by the following explicit or implicit variations:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta t_i} = f_i \text{ or } \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta t_i} = f_{i+1}$$

Linear Terms: 2nd order Crank - Nicholson (implicit method, weighted average of the forward and backward Euler 1st order approximation):

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta t_i} = \alpha_{CN} f_{i+1} + (1-\alpha_{CN}) f_i$$

NonLinear, Coriolis & Lorentz Terms : 2nd order Adams-Bashforth (multistep explicit method).

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta t_i} = \alpha f_i + \beta f_{i-1} \text{ with } \alpha = 1+\frac{1}{2}\frac{\Delta t_i}{\Delta t_{i-1}} \text{ and } \beta = -\frac{1}{2}\frac{\Delta t_i}{\Delta t_{i-1}}$$

Numerical Methods

Our choice of distribution of what we call linear and nonlinear terms, means that the Linear terms do not depend on l, and we can formaly write:

$$\mathcal{L}^W_{\ell mk}(t) = \mathcal{K}^W_{\ell;mk} W^m_{\ell n}(t),$$

Which gives the following matrix notation for the temporal evolution of the coefficients W_{lmn}:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{T}_{kn} W^m_{\ell n}(t) = \mathcal{K}^W_{\ell;mk} W^m_{\ell n}(t) + \mathcal{N}^W_{\ell mk}(t).$$

Or after temporal discretization:

$$\mathcal{T}_{kn}\left[\frac{W^m_{\ell n}(t_{i+1}) - W^m_{\ell n}(t_i)}{\Delta t_i}\right] = \mathcal{K}^W_{\ell;mk}[\alpha_{CN} W^m_{\ell n}(t_{i+1}) + (1-\alpha_{CN}) W^m_{\ell n}(t_i)] + \mathcal{N}^W_{\ell mk}(t_i) + \frac{1}{2}\frac{\Delta t_i}{\Delta t_{i-1}}[\mathcal{N}^W_{\ell mk}(t_i) - \mathcal{N}^W_{\ell mk}(t_{i-1})],$$

Which after rearranging the terms gives:

$$\left(\mathcal{T}_{kn} - \alpha_{CN}\Delta t_i \mathcal{K}^W_{\ell;mk}\right) W^m_{\ell n}(t_{i+1}) = \left(\mathcal{T}_{kn} + (1-\alpha_{CN})\Delta t_i \mathcal{K}^W_{\ell;mk}\right) W^m_{\ell n}(t_i) + \Delta t_i \mathcal{N}^W_{\ell mk}(t_i) + \frac{1}{2}\frac{\Delta t_i^2}{\Delta t_{i-1}}[\mathcal{N}^W_{\ell mk}(t_i) - \mathcal{N}^W_{\ell mk}(t_{i-1})],$$

Or in matrix notation:

$$\mathcal{A}^W_{\ell;kn} W^m_{\ell n}(t_{i+1}) = \mathcal{B}^W_{\ell mk}$$

We get an equivalent matrix system for all the variables

Main Loop of the ASH Code

- At the beginning of each main temporal step, the dependent variables W, Z, A, C, P and S are in (r, l , m) space

- Spatial derivatives are evaluated, 1st radial derivatives using Chebyshev transform forward (n, l, m) then backward (r, l, m), then horizontal derivatives and we obtain Li (the linear terms)

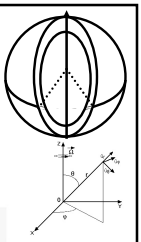
- Then the variables are transformed in physical space (r, θ, ϕ) to evaluate the nonlinear terms Ni, preventing by doing so to evaluate costly convolutions

- Then the nonlinear term is transformed back to (r, l , m) space, where we can now evaluate the right hand side B term (having saved from the previous time step Ni-1) and the matrix operator A

- Finally using a LU decomposition to solve the matrix system, we obtain the updated values at t_{i+1} for all the variables and we can start over.

3D MHD Code ASH (Anelastic Spherical Harmonics)
(Clune et al. 1999, Miesch et al. 2000, Brun et al. 2004)

Numerical Methods



Summary of Parallel Data Configurations:

1. Primary configuration: l in processor and r & m distributed,
2. Implicite solver configuration: r & m in processor & l distributed,
3. Physical space configuration: r & θ distributed and ϕ in processor.

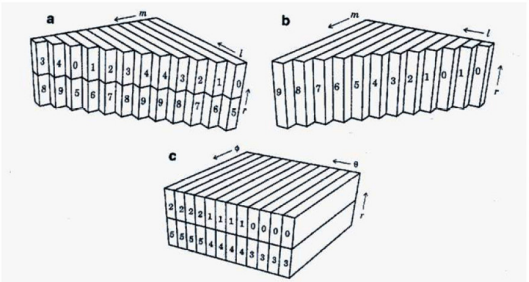
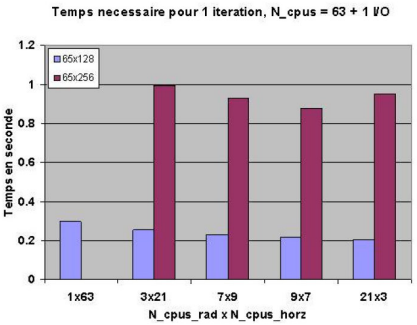


Fig. 1. (a) Primary configuration (l in processor, m and r distributed). The numbers correspond to the computing nodes 0, . . . , 9; in this case $N_{RAD} = 2$, $N_{ANG} = 5$ and $l_{max} = 11$. (b) Corresponding implicit-solve configuration (m and r in processor, l distributed). (c) Physical-space configuration (ϕ in processor, θ and r distributed) for $N_{RAD} = 2$, $N_{ANG} = 3$ and $N_\theta = 12$.

Scalability/Parallelism

(Language of communication MPI):



performance up 900 Mflops/s per nodes on IBM SP4 DataStar (Brun, Miesch & Toomre 2004).

Use of local storage disks can speed up by a factor 2 our I/O and overall speed.

Larger number of cpus used up to now: 1072