cinématique des résonances

résumé des épisodes précédents…

$$\boxed{U(\theta, r) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U_m(r) \cos(m\theta) \quad \text{où} \quad \theta = L - L_s}$$

développement au 1er ordre en excentricité:

$$r = a[1 - e\cos(M)] = a[1 - e\cos(\lambda - \varpi)]$$

$$L = \lambda + 2e\sin(\lambda - \varpi)$$

$$\boxed{\begin{aligned} U(\theta, r) = & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U_m(a) \cos[m(\lambda - \lambda_s)] \\ & -e \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(a) \cos[(m+1)\lambda_s - m\lambda - \varpi] \end{aligned}}$$

où $A_m(a) = \left[2(m+1) + a\dfrac{d}{da}\right] U_{m+1}(a)$

$$\boxed{U(\theta, r) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U_m(r)\cos(m\theta) \quad \text{où} \quad \theta = L - L_s}$$

développement au 1er ordre en excentricité:

$$r = a[1 - e\cos(M)] = a[1 - e\cos(\lambda - \varpi)]$$

$$L = \lambda + 2e\sin(\lambda - \varpi)$$

angle critique de résonance

$$U(\theta, r) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U_m(a)\cos[m(\lambda - \lambda_s)]$$

$$-e\sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(a)\cos[\boxed{(m+1)\lambda_s - m\lambda - \varpi}]$$

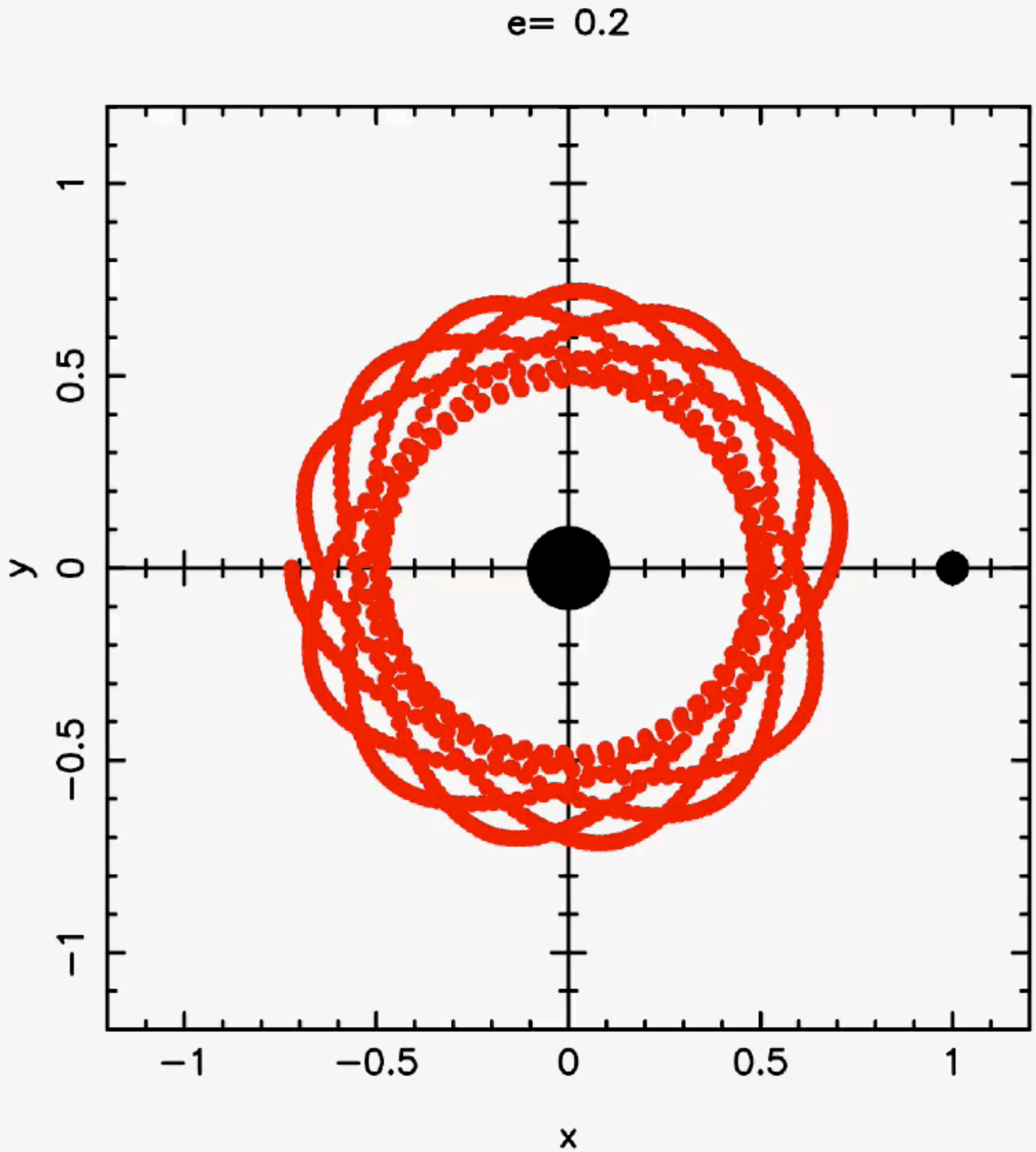
où $A_m(a) = \left[2(m+1) + a\frac{d}{da}\right]U_{m+1}(a)$

questions

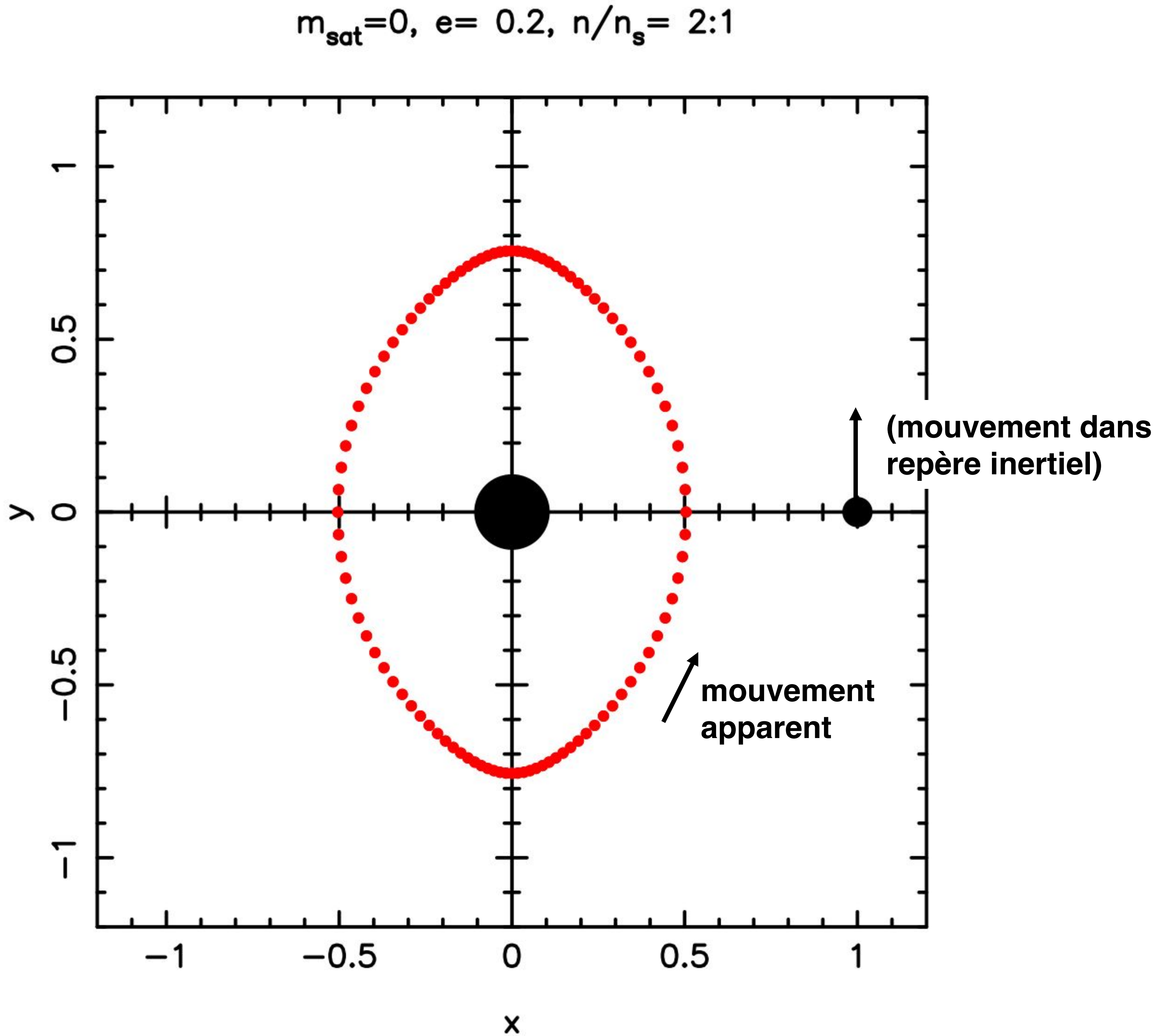
quelle est l'interprétation physique de l'angle critique de résonance?:

$$\Psi_L = (m+1)\lambda_s - m\lambda - \varpi$$

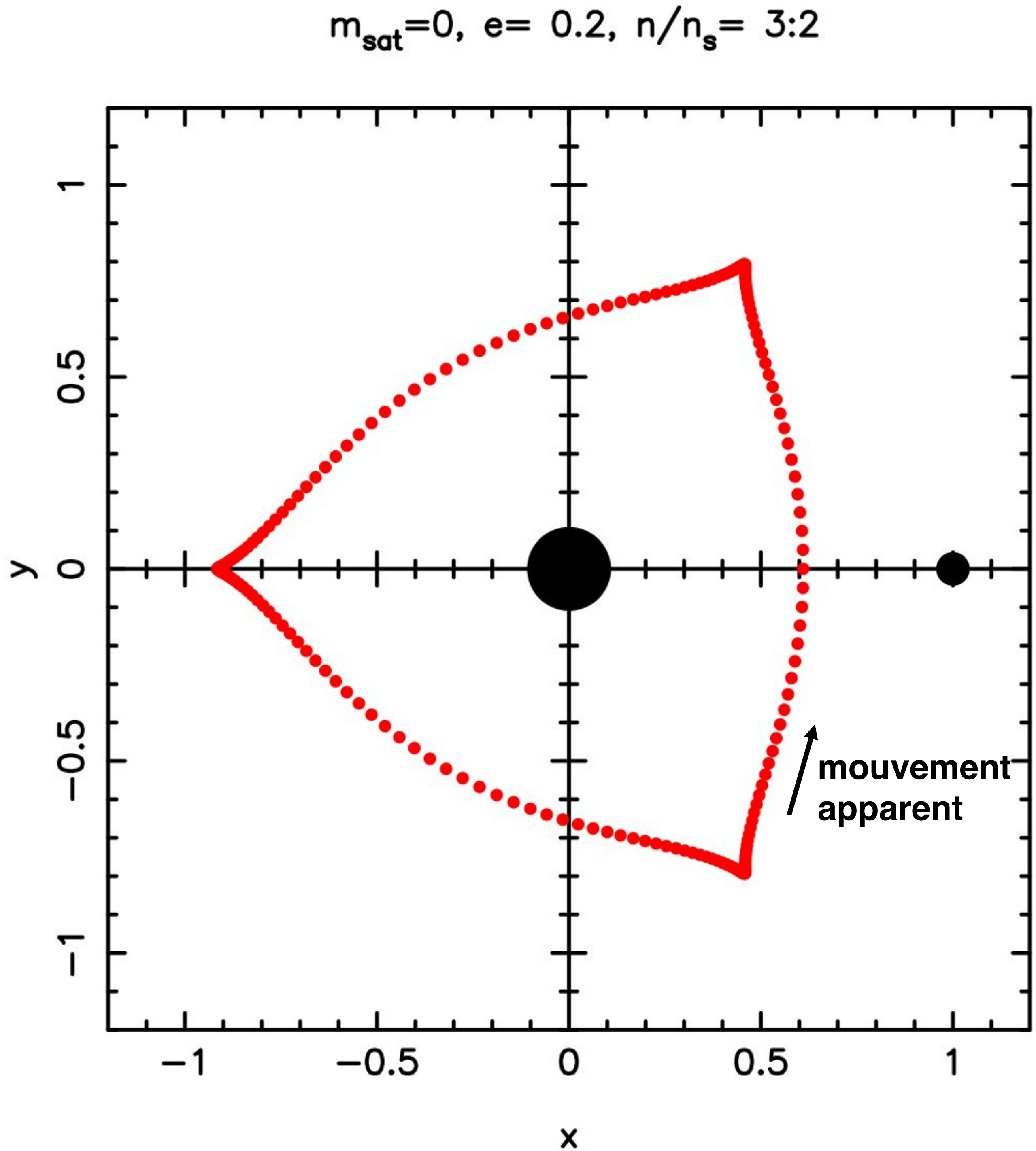
comment évolue-t-il au cours du temps?

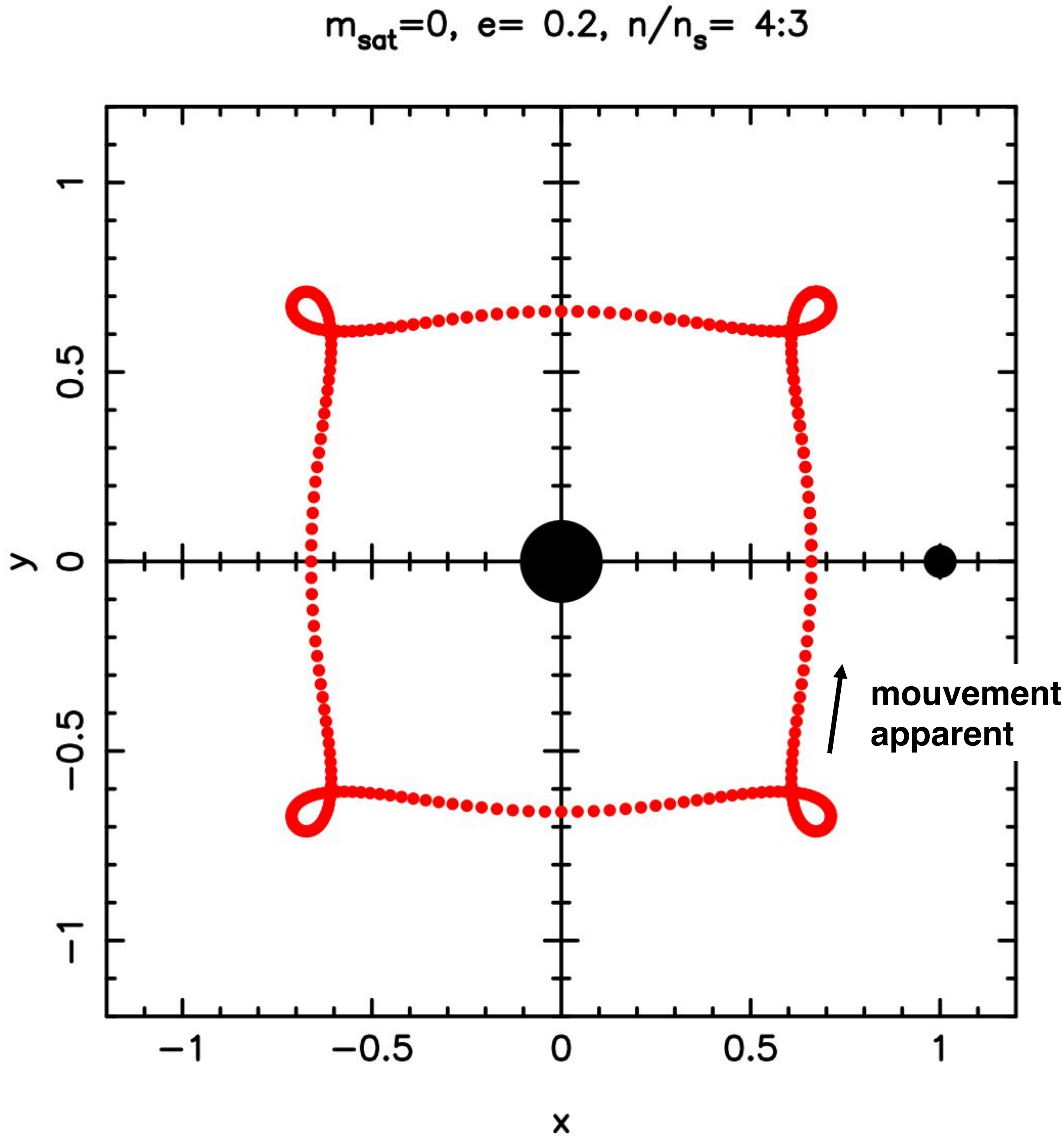


e= 0.2
y
1
0.5
0
−0.5
−1
−1
−0.5
0
0.5
1
x

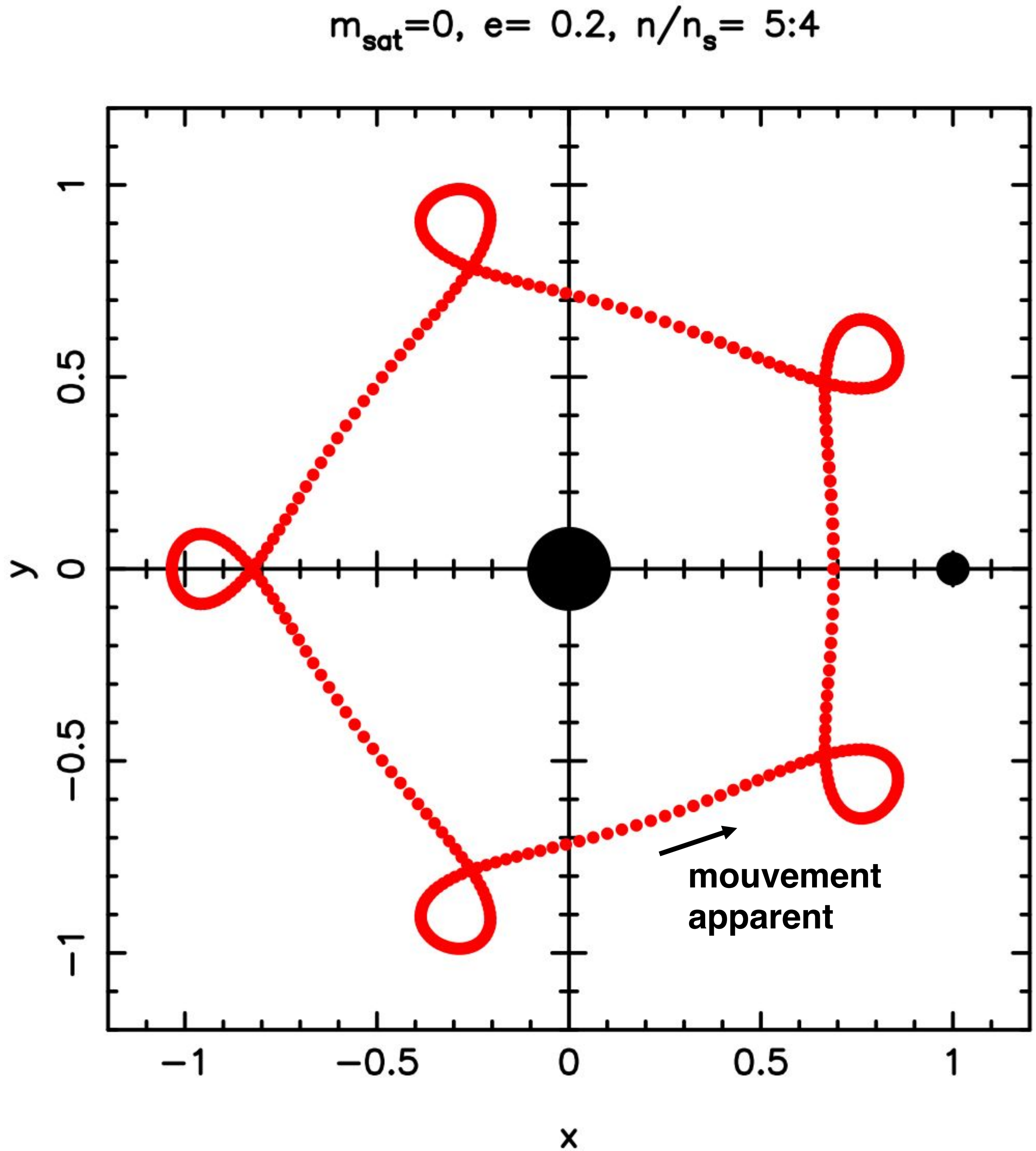


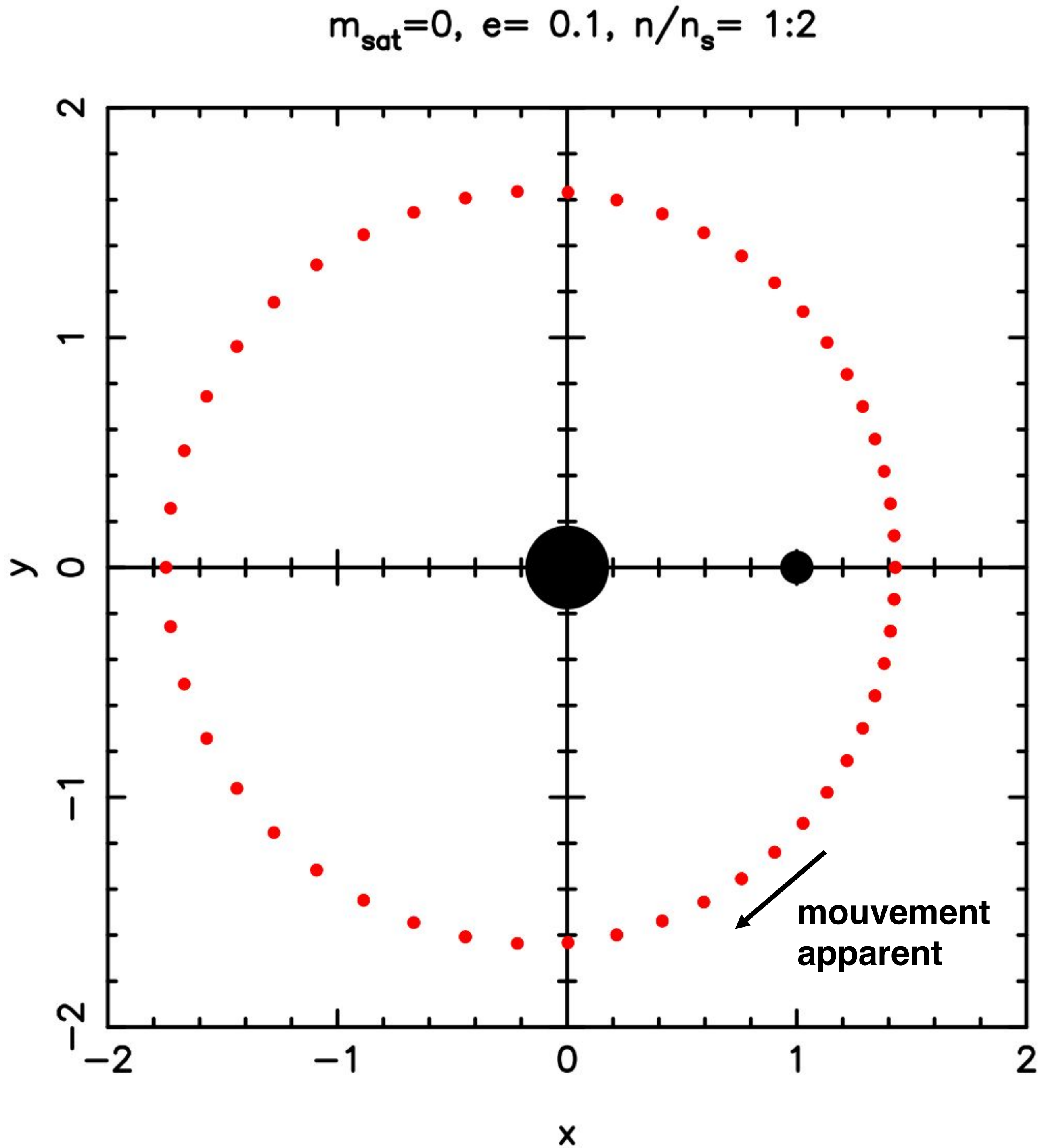
m_sat=0, e= 0.2, n/n_s= 2:1
(mouvement dans
repère inertiel)
mouvement
apparent
x
y
−1
−0.5
0
0.5
1


m_{sat}=0, e= 0.2, n/n_s= 3:2
y
x
1
0.5
0
−0.5
−1
mouvement
apparent

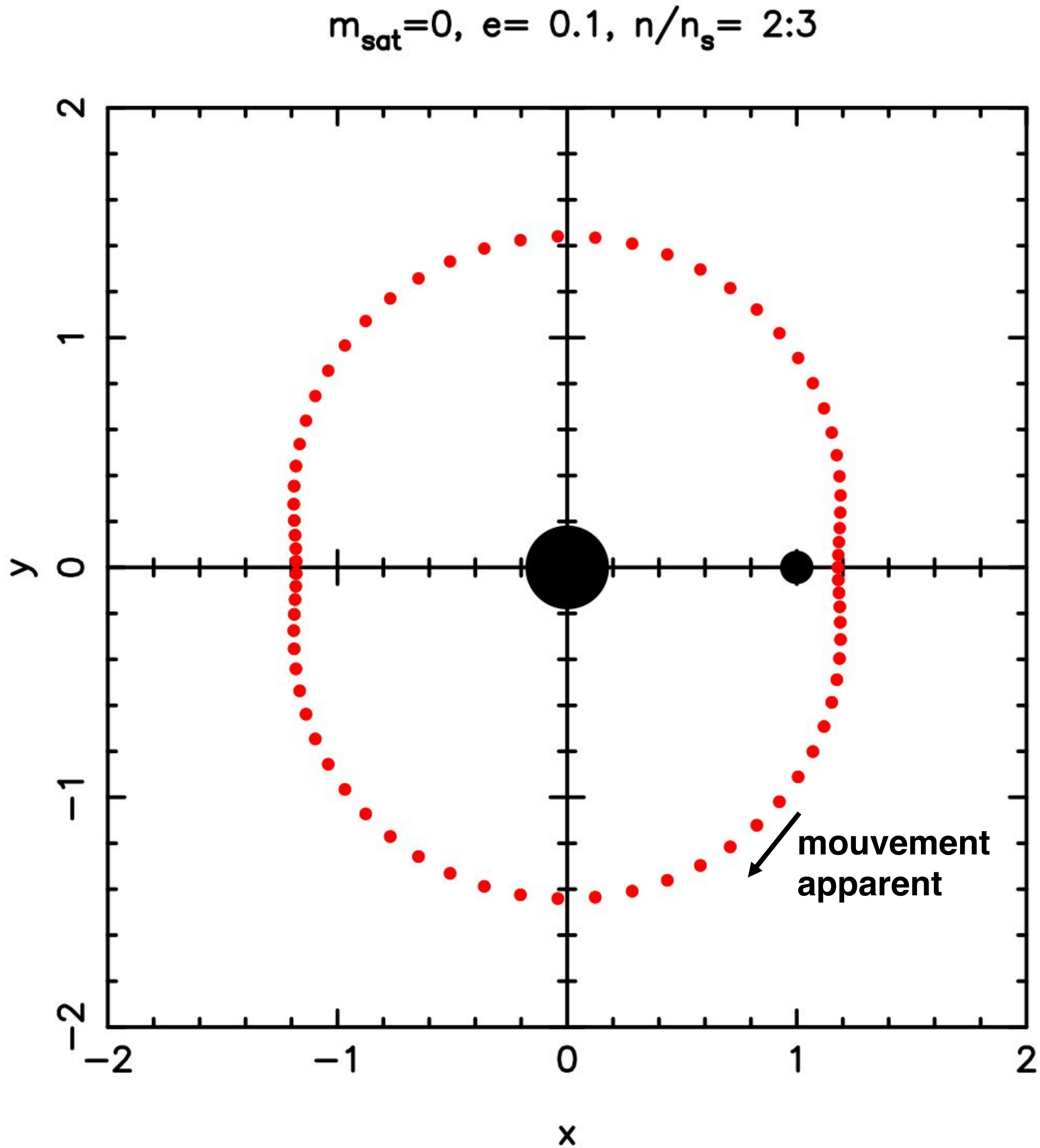


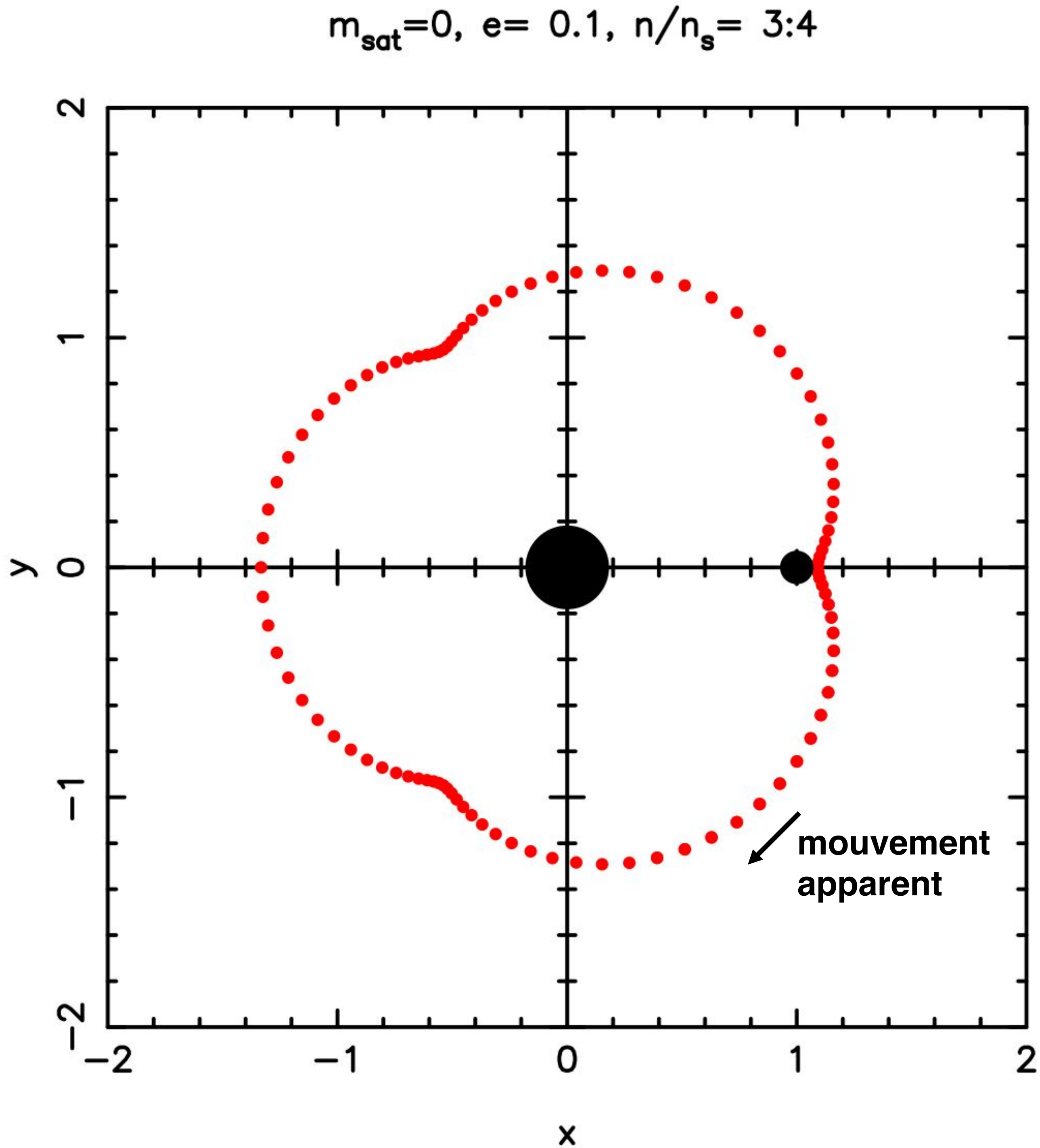
m_sat=0, e= 0.2, n/n_s= 4:3
mouvement
apparent
y
x
−1
−0.5
0
0.5
1

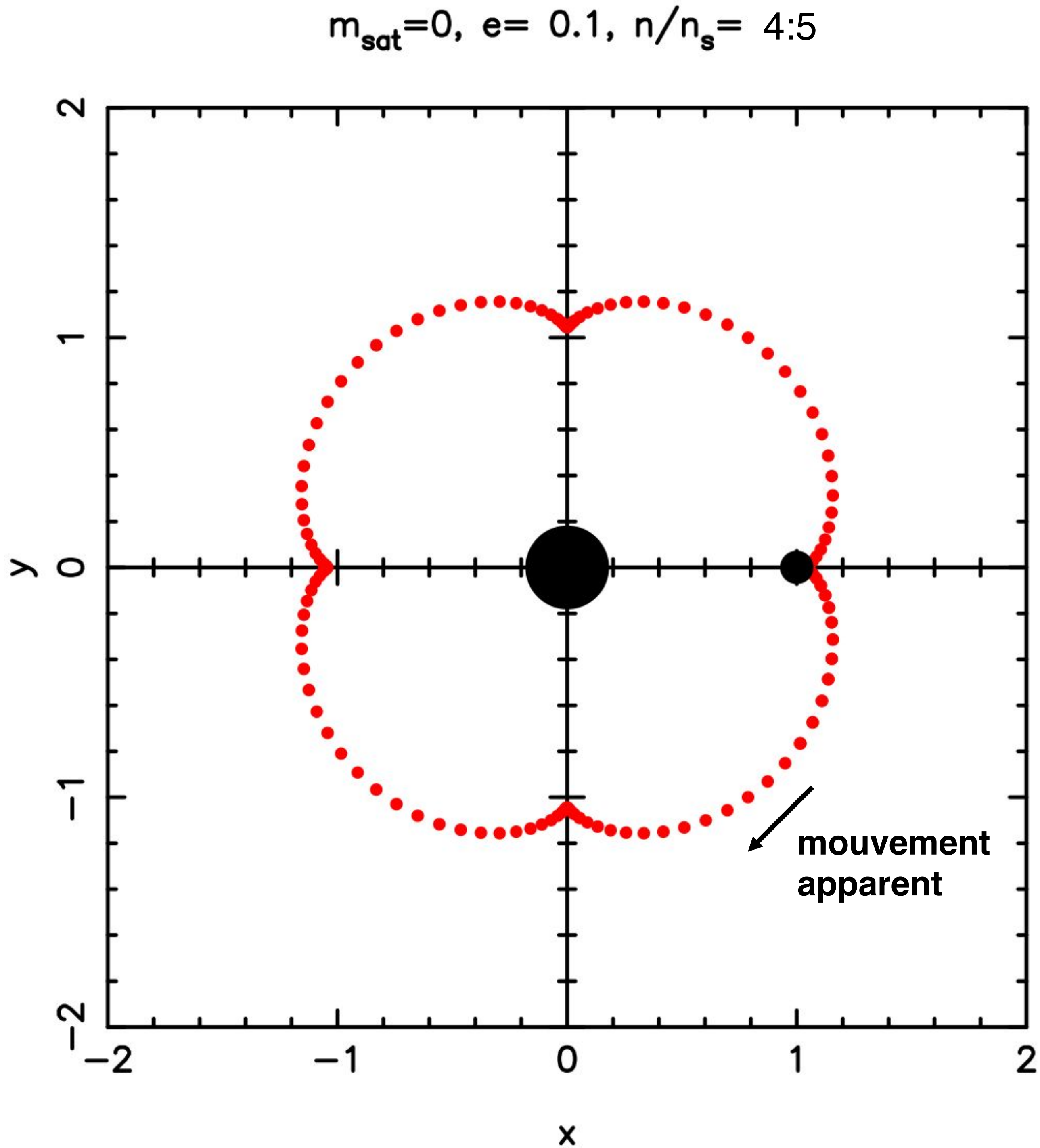

m_{sat}=0, e= 0.2, n/n_s= 5:4
mouvement
apparent
x
y
−1
−0.5
0
0.5
1

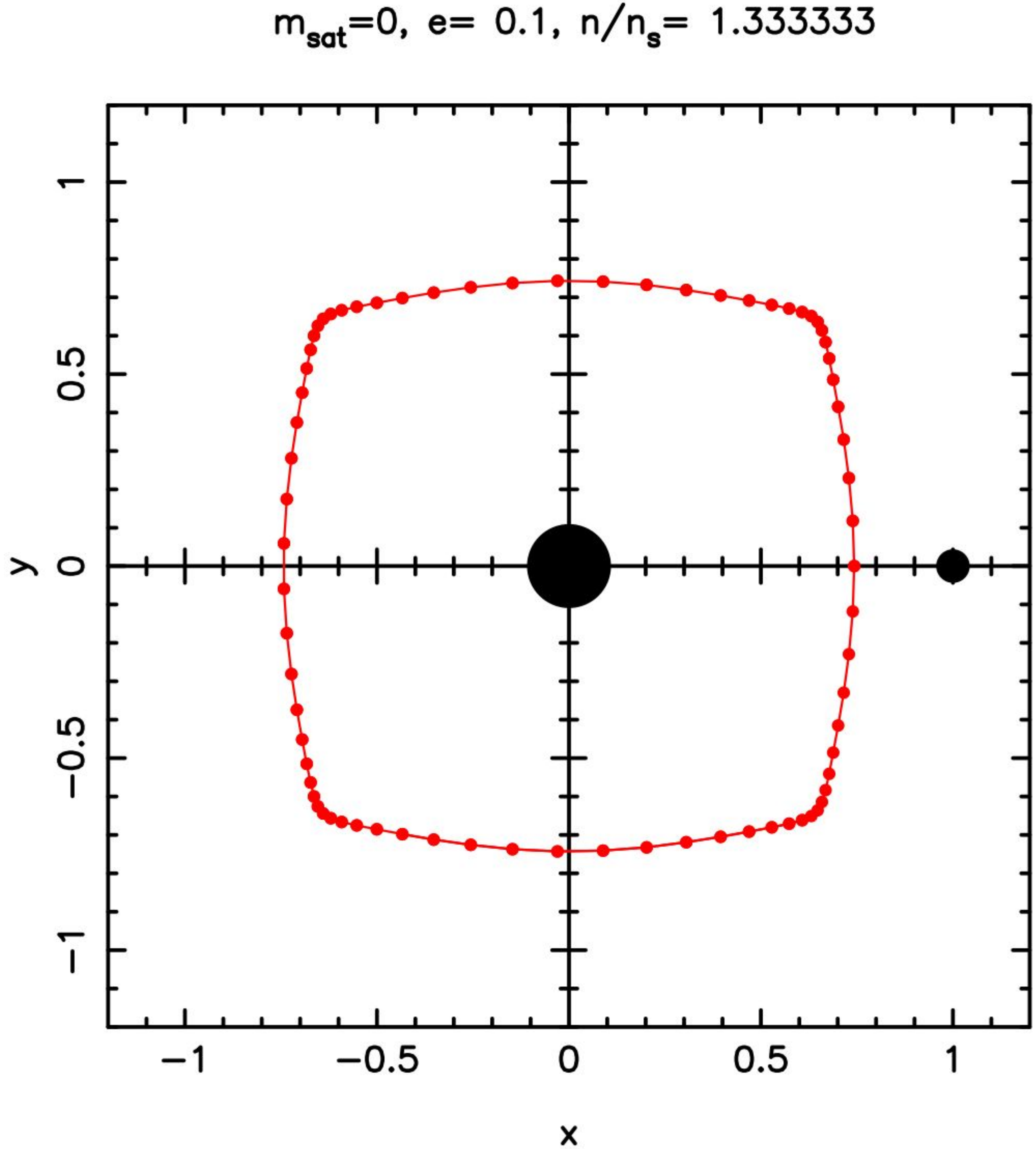


m_{sat}=0, e= 0.1, n/n_s= 1:2
mouvement
apparent
x
y
−2
−1
0
1
2


m_{sat}=0, e= 0.1, n/n_s= 2:3
mouvement
apparent
y
x
2
1
0
−1
−2
−2
−1
0
1
2

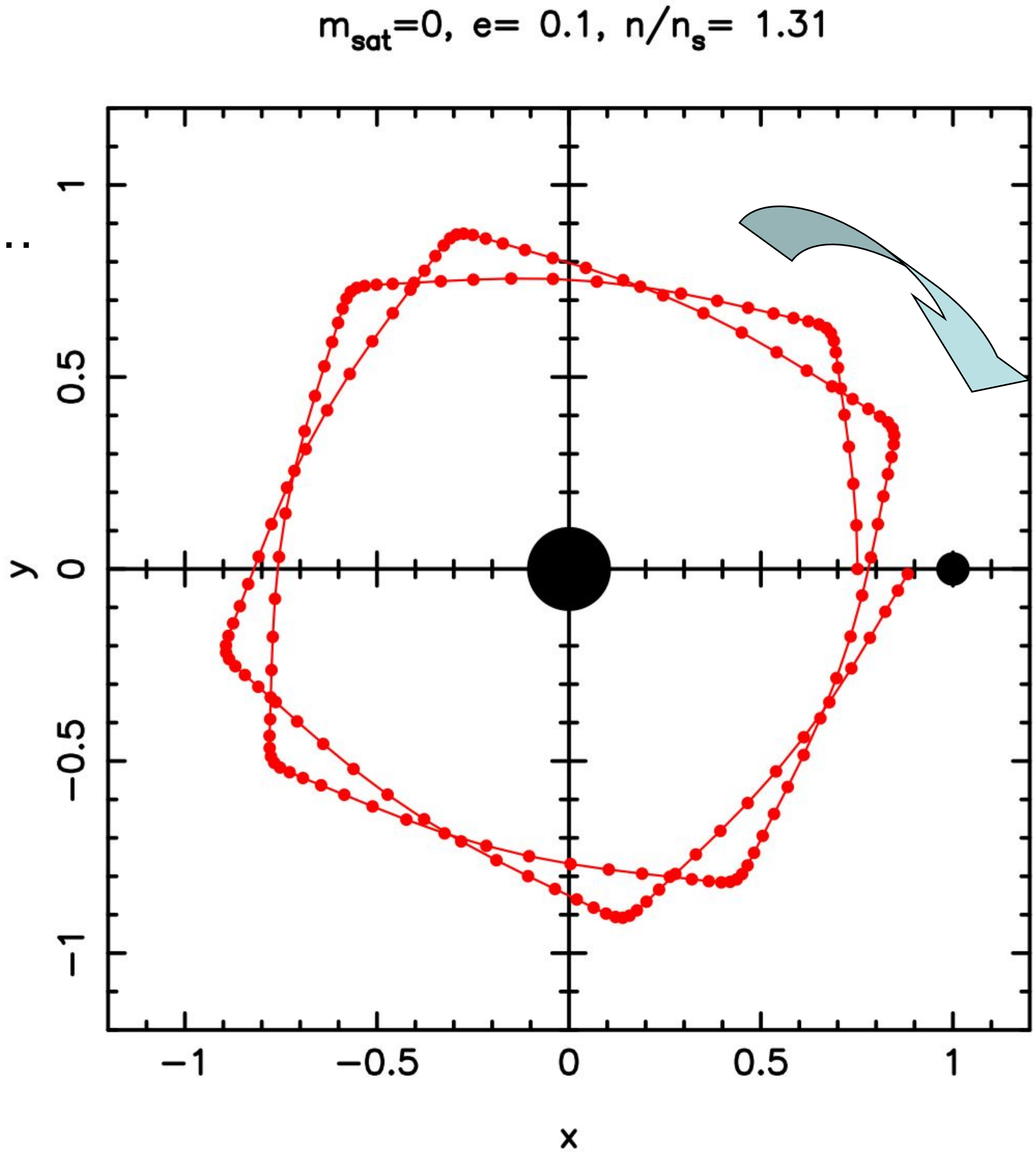

m_{sat}=0, e= 0.1, n/n_s= 3:4
2
1
0
−1
−2
y
−2
−1
0
1
2
x
mouvement
apparent


m_{sat}=0, e= 0.1, n/n_s= 4:5
y
x
2
1
0
−1
−2
−2
−1
0
1
2
mouvement
apparent

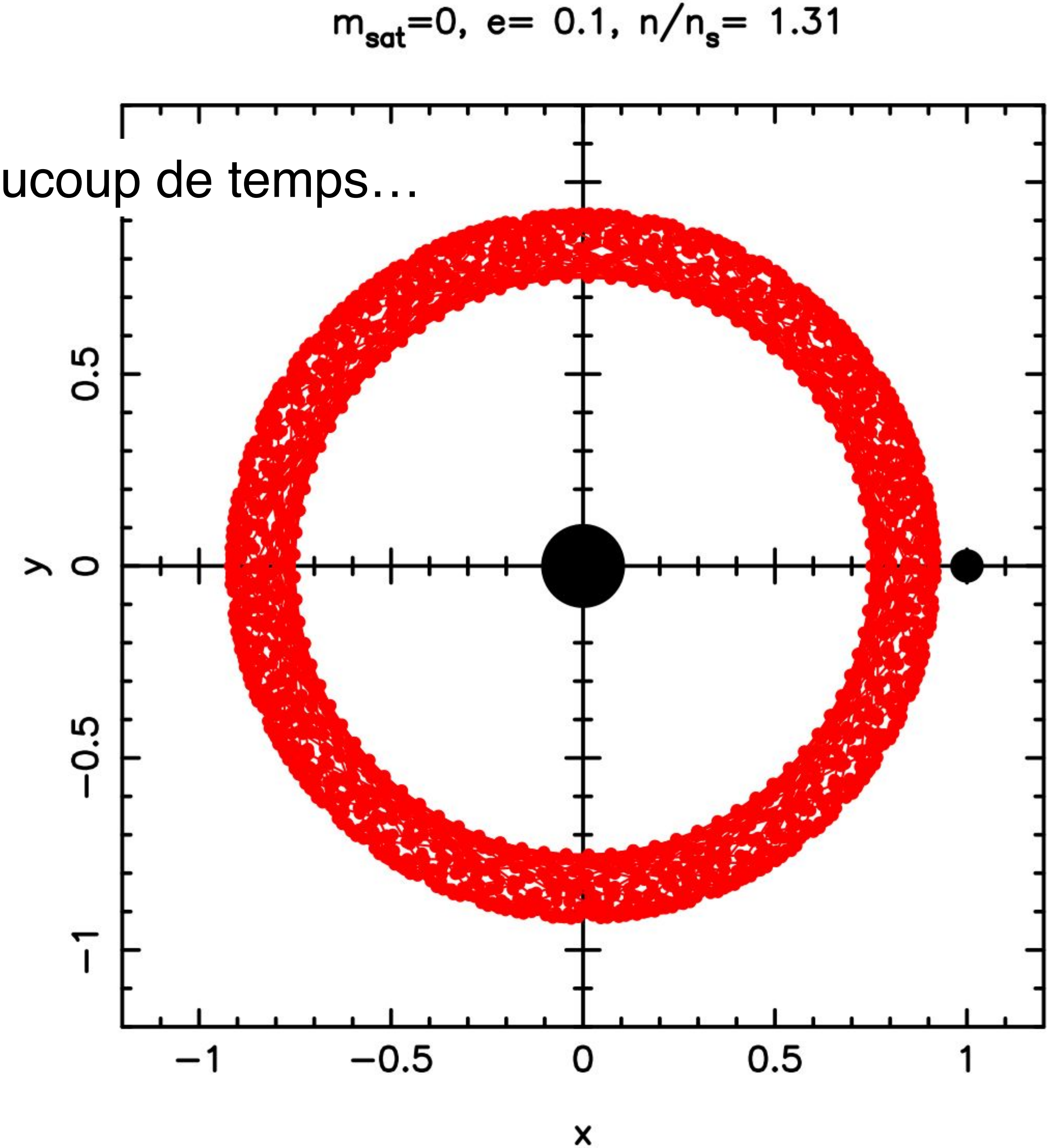


m_{sat}=0, e= 0.1, n/n_s= 1.333333
y
x
1
0.5
0
−0.5
−1

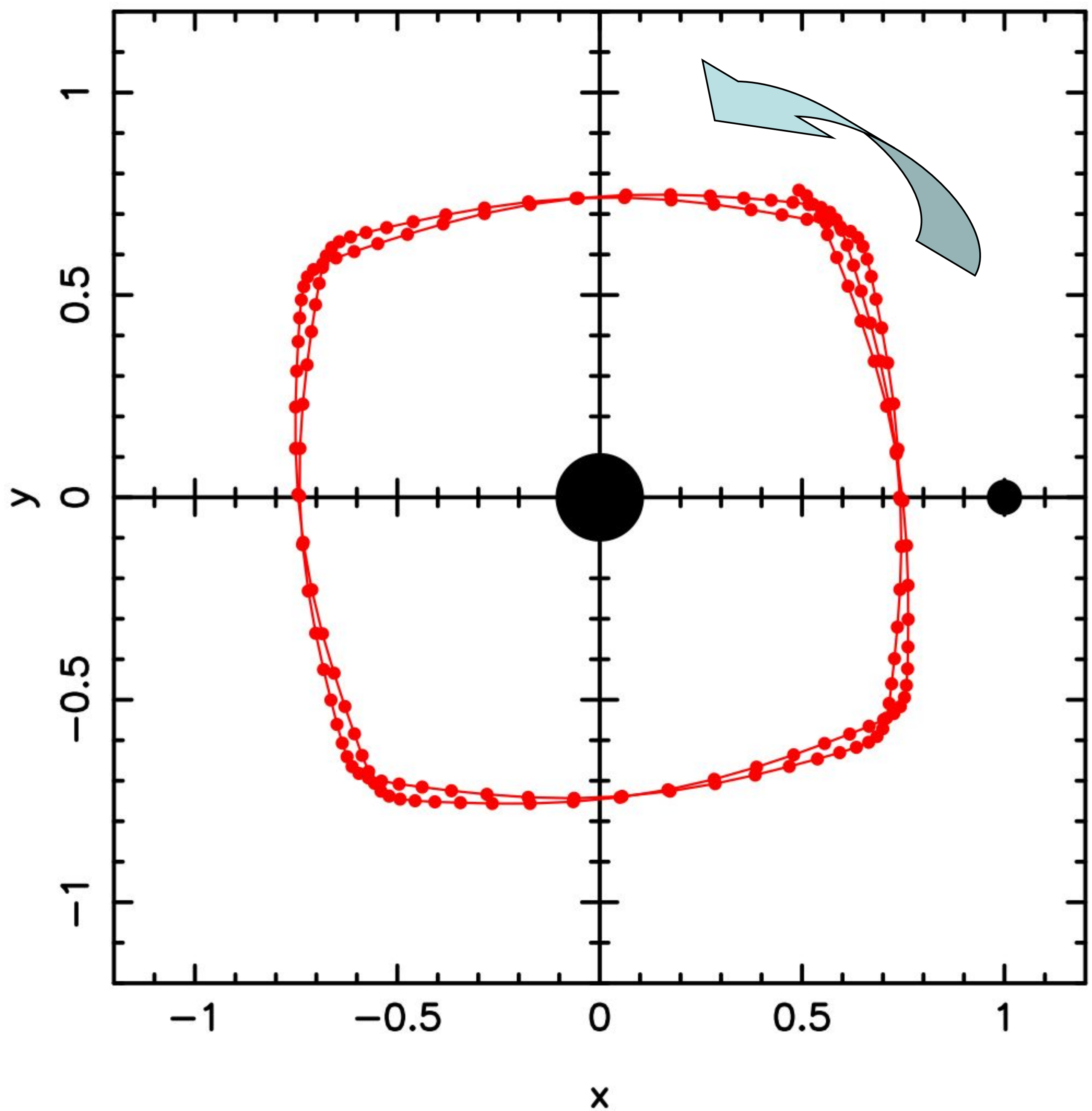
au début…

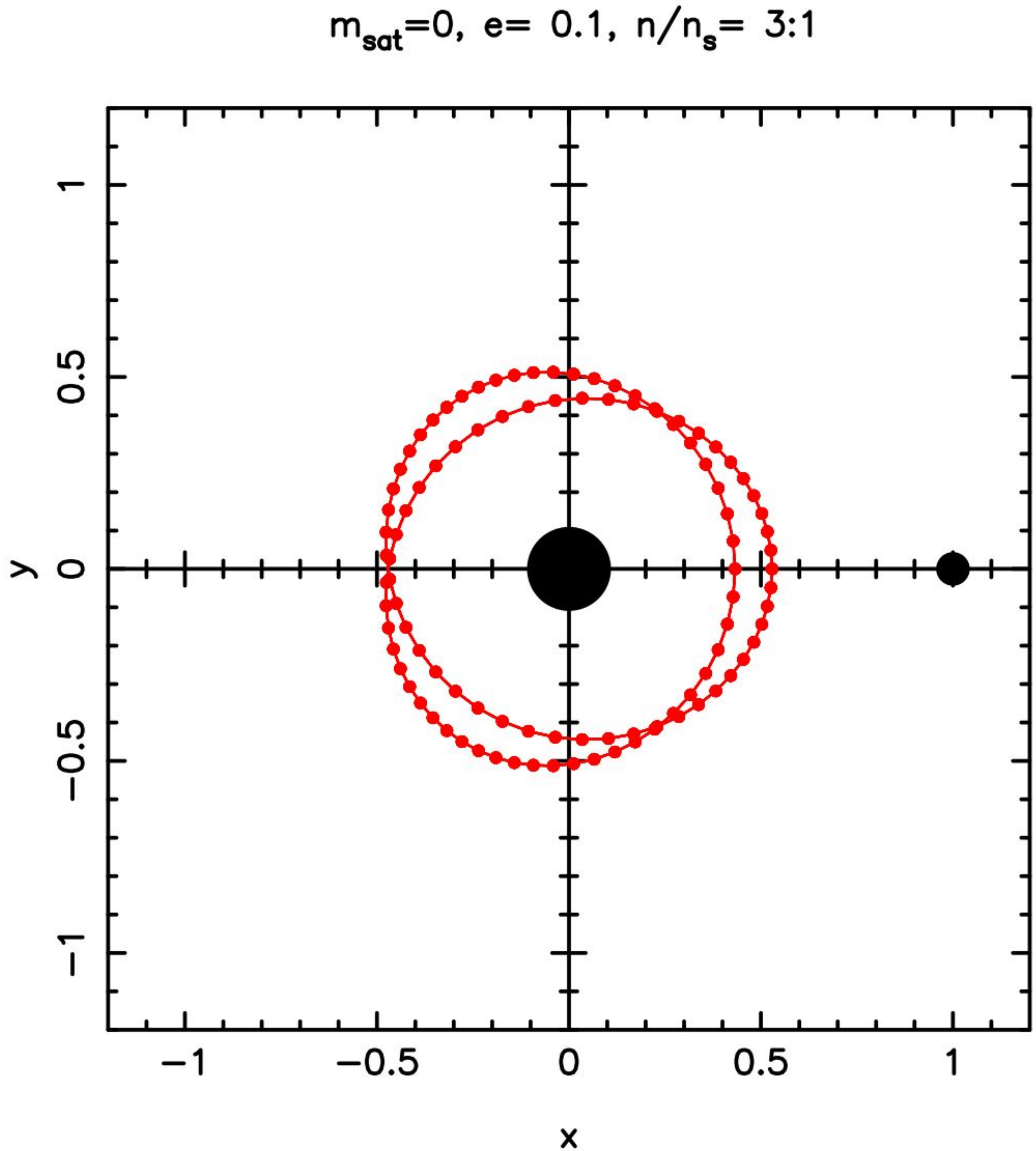


près beaucoup de temps…

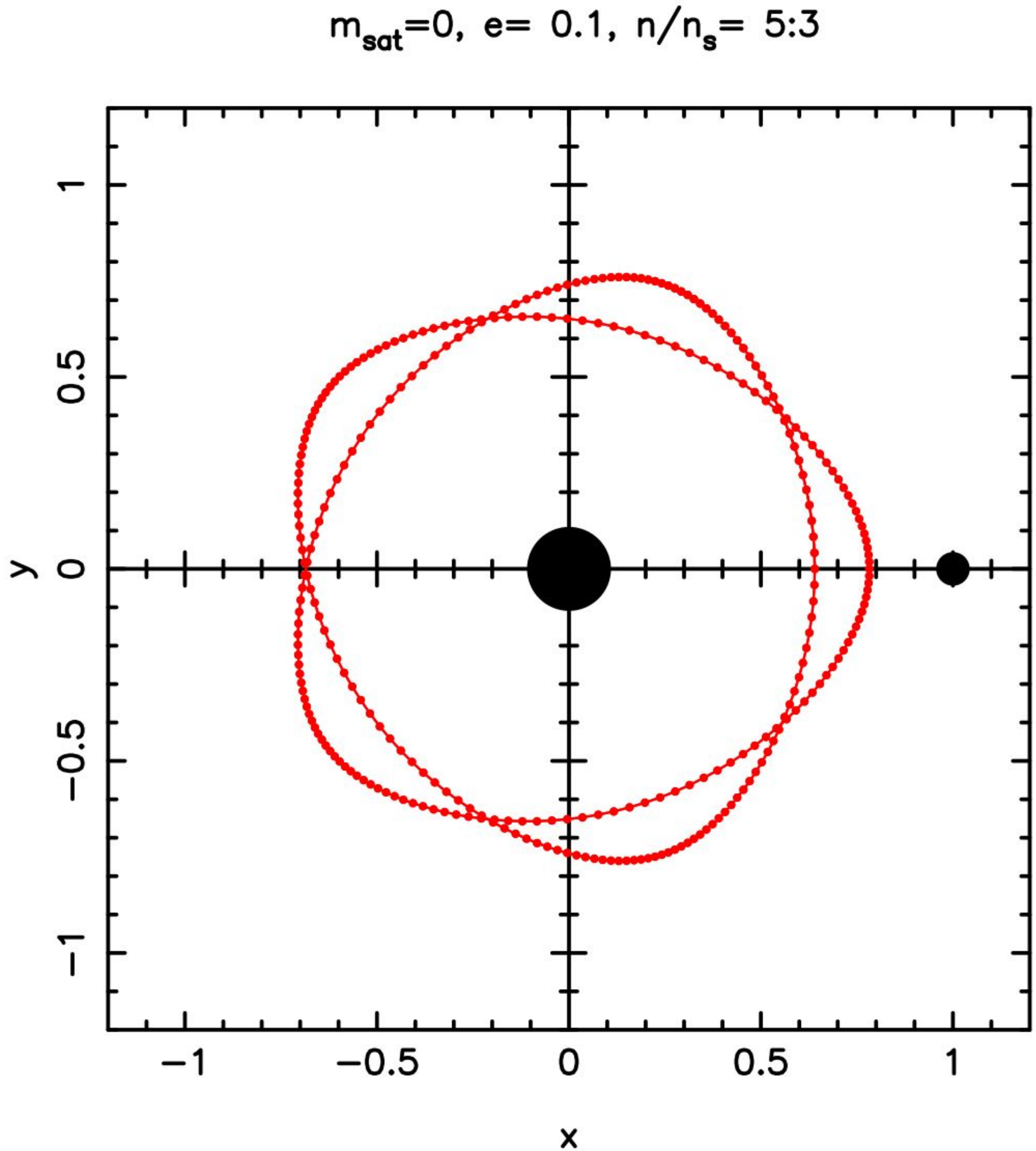


m_{sat}=0, e= 0.1, n/n_s= 1.34



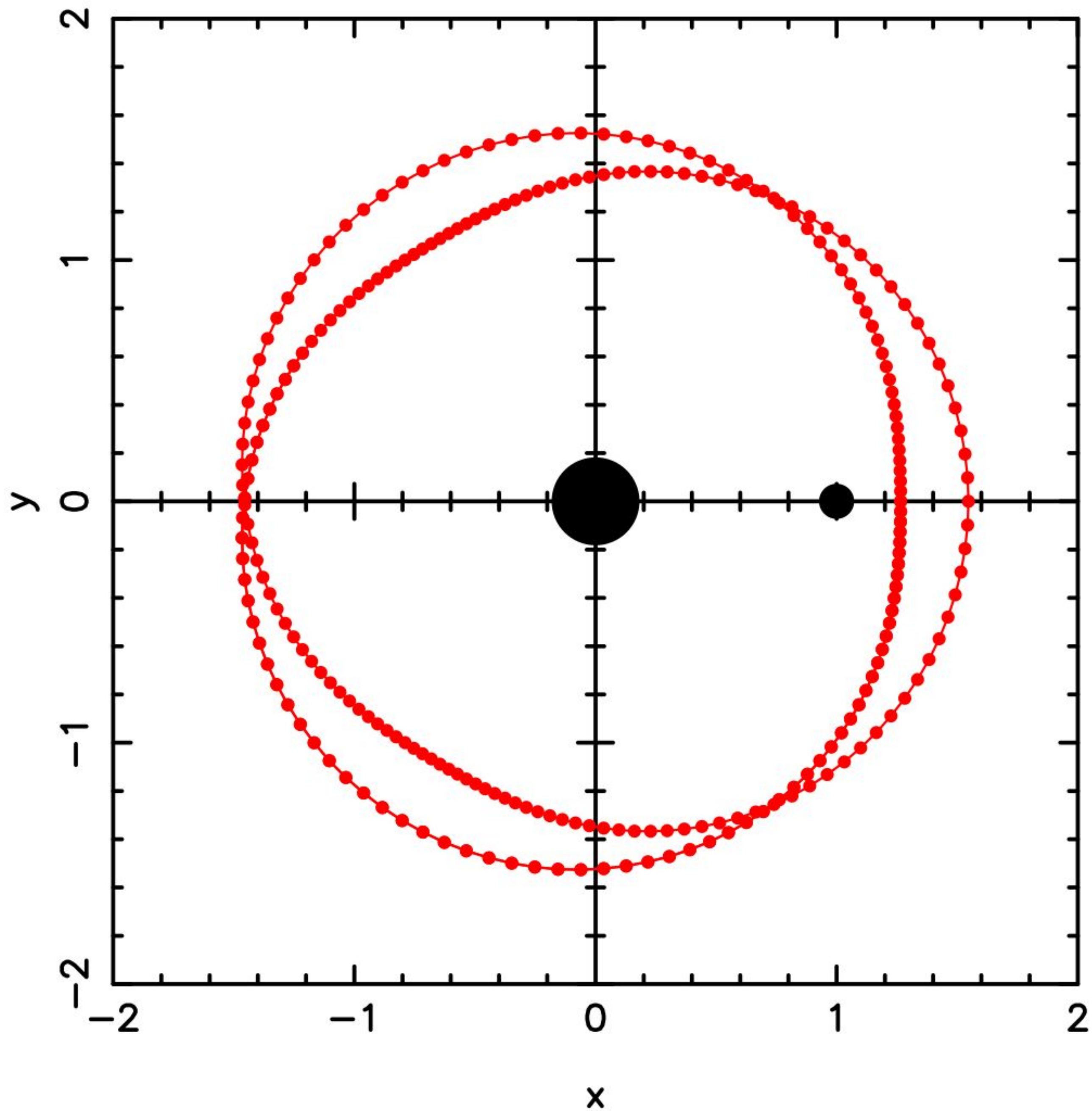


m_{sat}=0, e= 0.1, n/n_s= 3:1
1
0.5
0
−0.5
−1
y
−1
−0.5
0
0.5
1
x

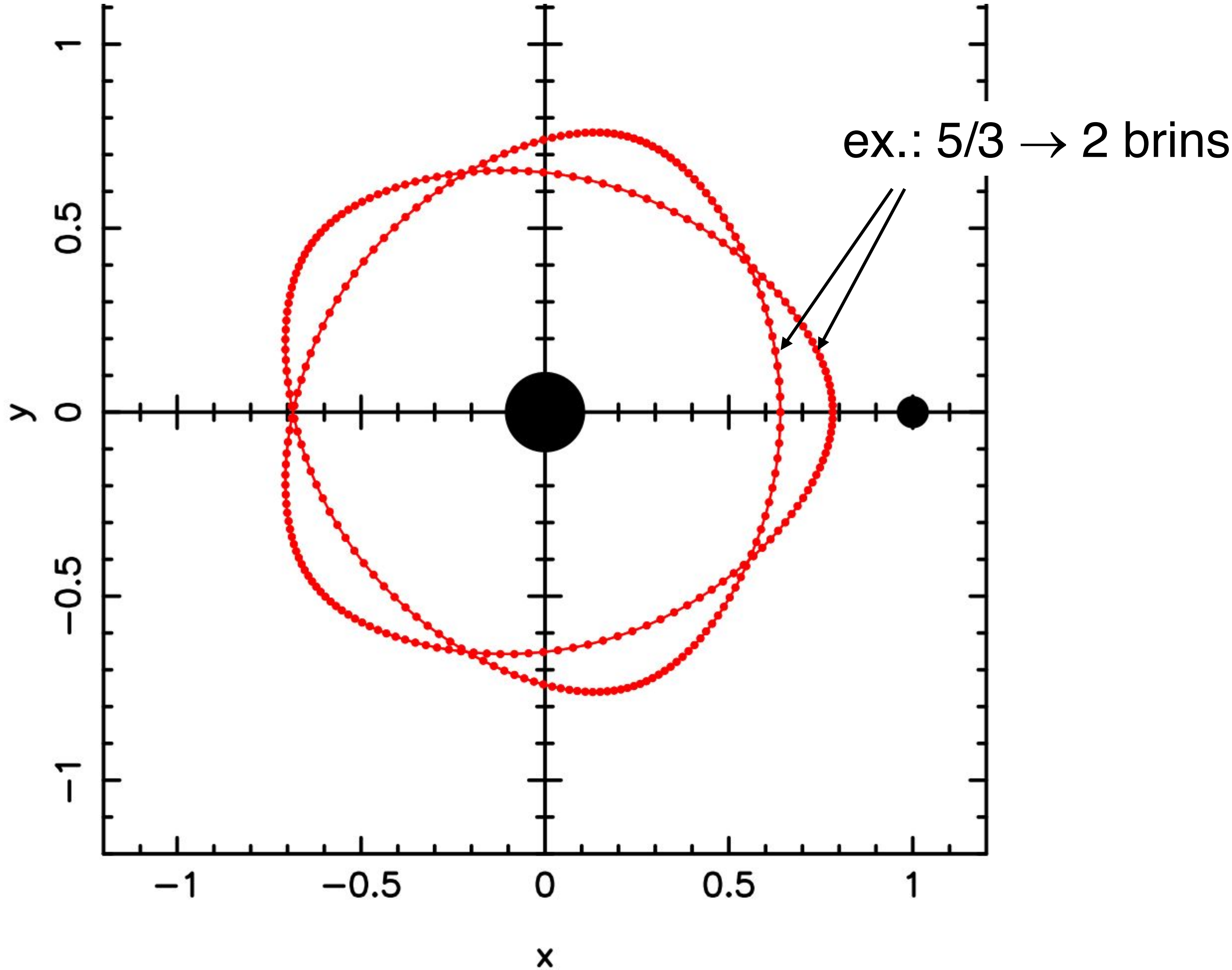


m_{sat}=0, e= 0.1, n/n_s= 5:3
y
x
−1
−0.5
0
0.5
1

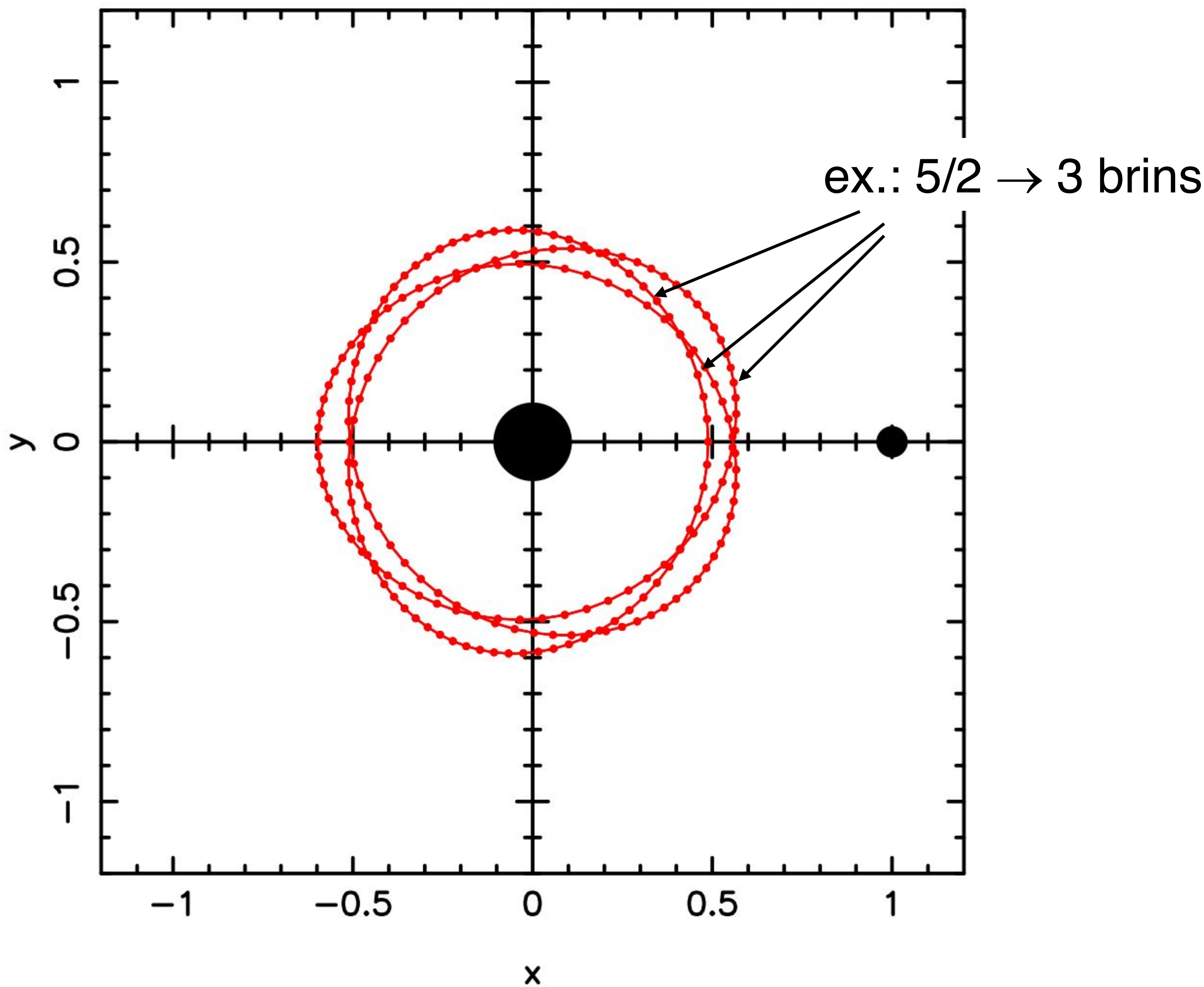
m_{sat}=0, e= 0.1, n/n_s= 3:5



exercice: montrer qu'une résonance *p/(p-q)* (ordre *q*) donne lieu à une orbite fermée à *q* brins dans le repère du perturbateur



m_{sat}=0, e= 0.1, n/n_s= 5:2

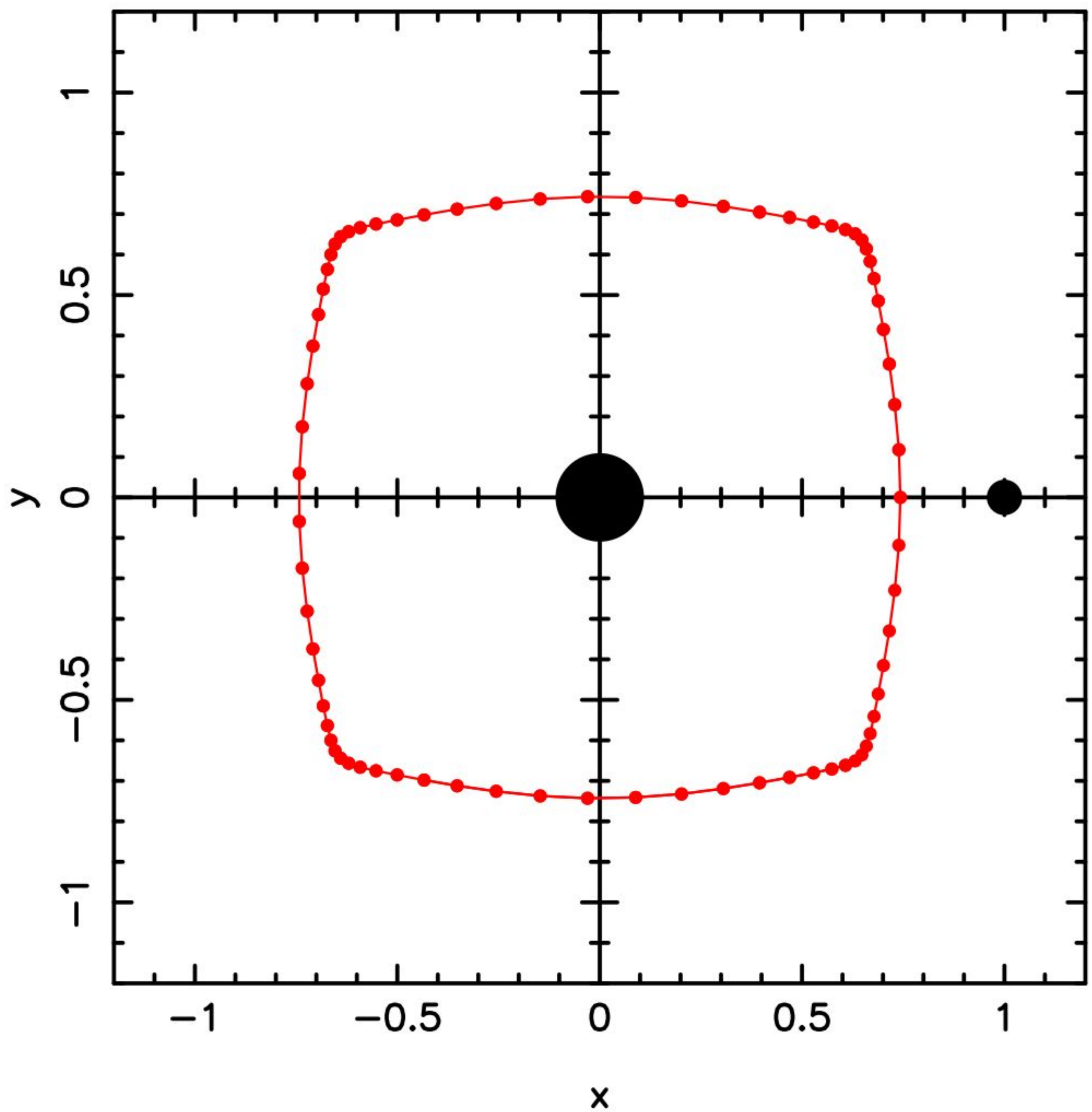


problèmes

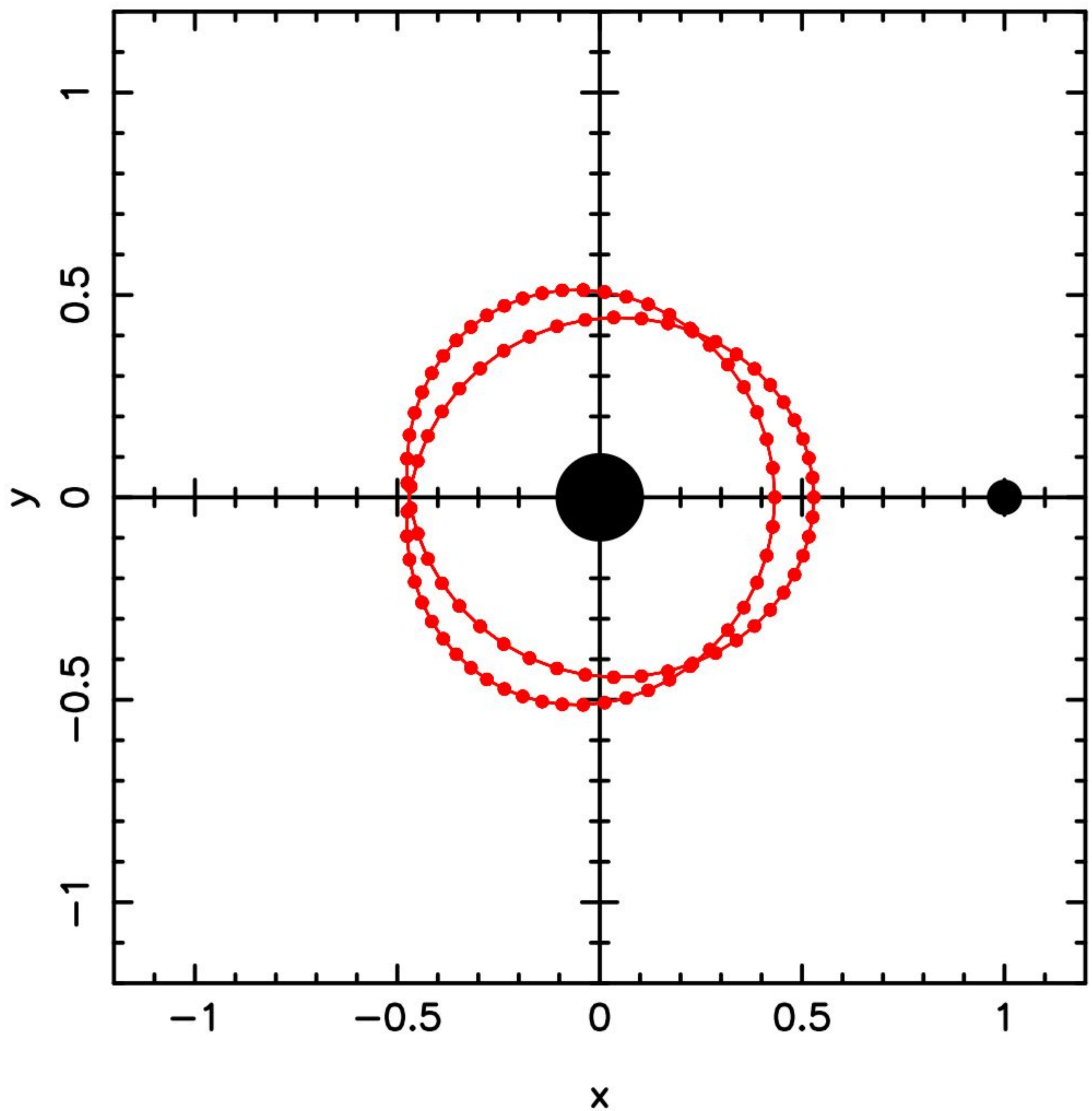
- intuiter physiquement pourquoi une résonance d'ordre q a une intensité proportionnelle à $e^{|q|}$

- montrer qu'une résonance d'ordre $p/p-q$ donne une orbite à q brins dans le repère tournant avec le perturbateur

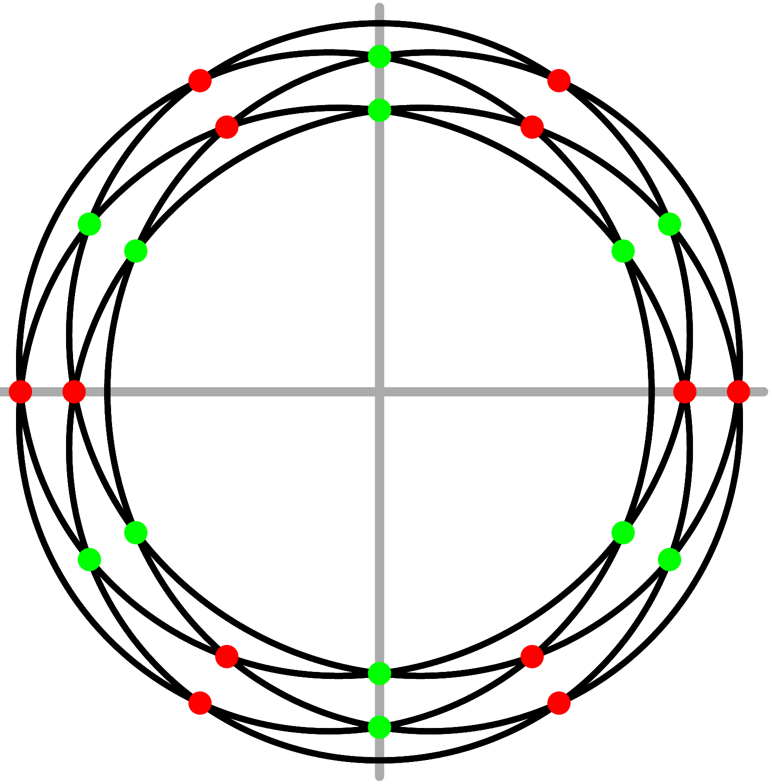
plus difficile!: montrer qu'une orbite résonante $p/p-q$ possède |p|(q-1) points d'auto-croisement (pour une excentricité suffisamment petite) par ex. 4/3 → p=4, q=1 → lpl(q-1)=0



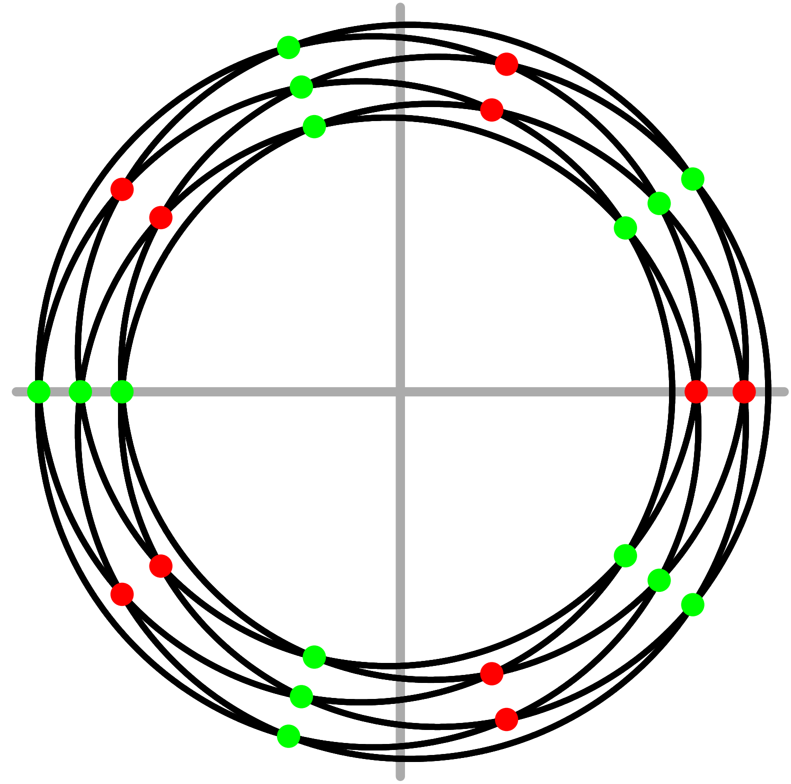
par ex. 3/1 → p=3, q=2 → |p|(q-1)=3



6/11 → $p=-6$, $q=5$
→ $|p|(q-1)= 24$



5/11 → $p=-5$, $q=6$
→ $|p|(q-1)= 25$



l'angle critique de résonance:

$$\Psi_L = (m+q)\lambda_s - m\lambda - q\varpi$$

ou de manière équivalente

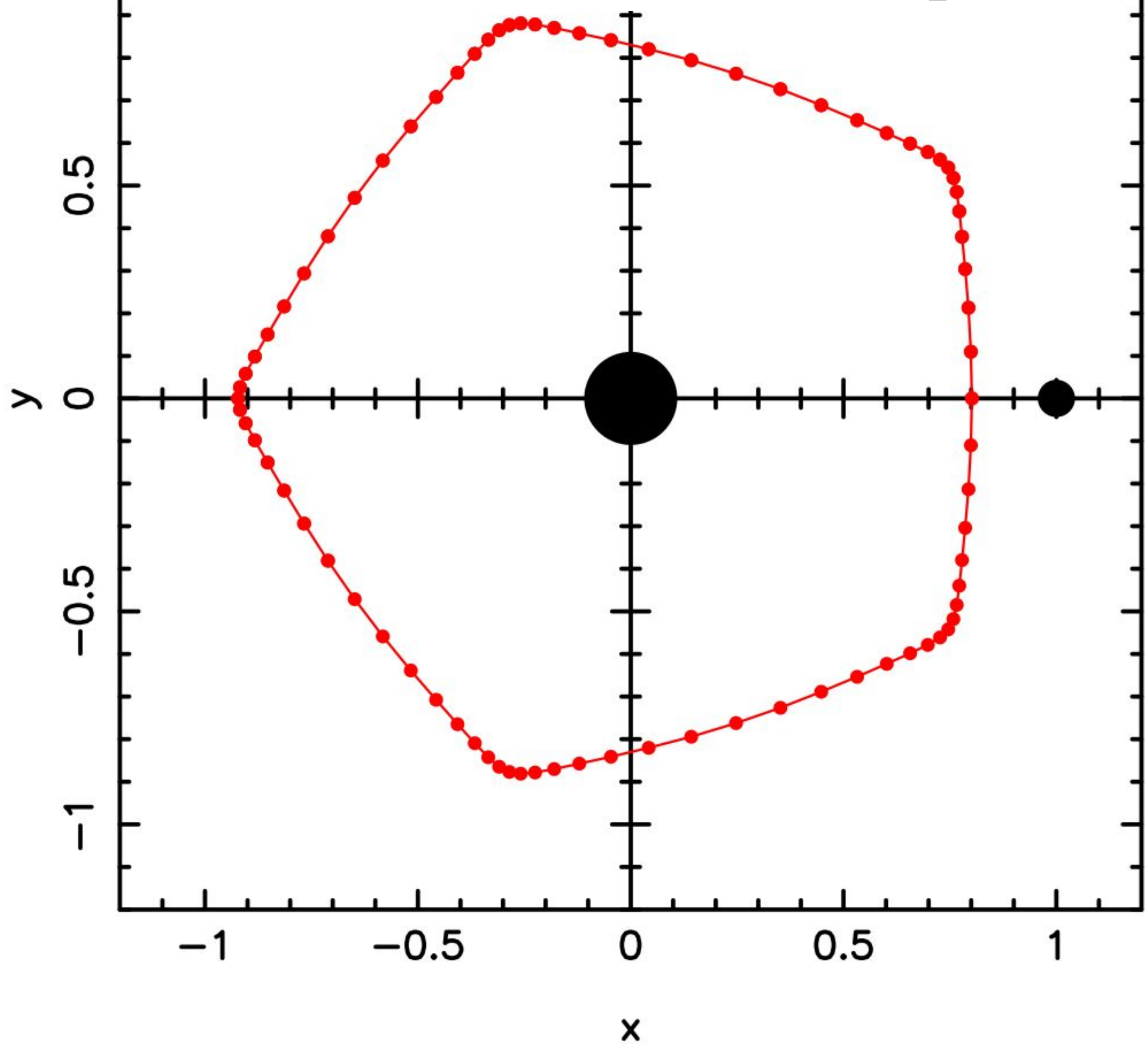
$$\Psi_L = m\lambda_s - (m-q)\lambda - q\varpi$$

mesure

l'orientation de l'orbite résonante par rapport au perturbateur

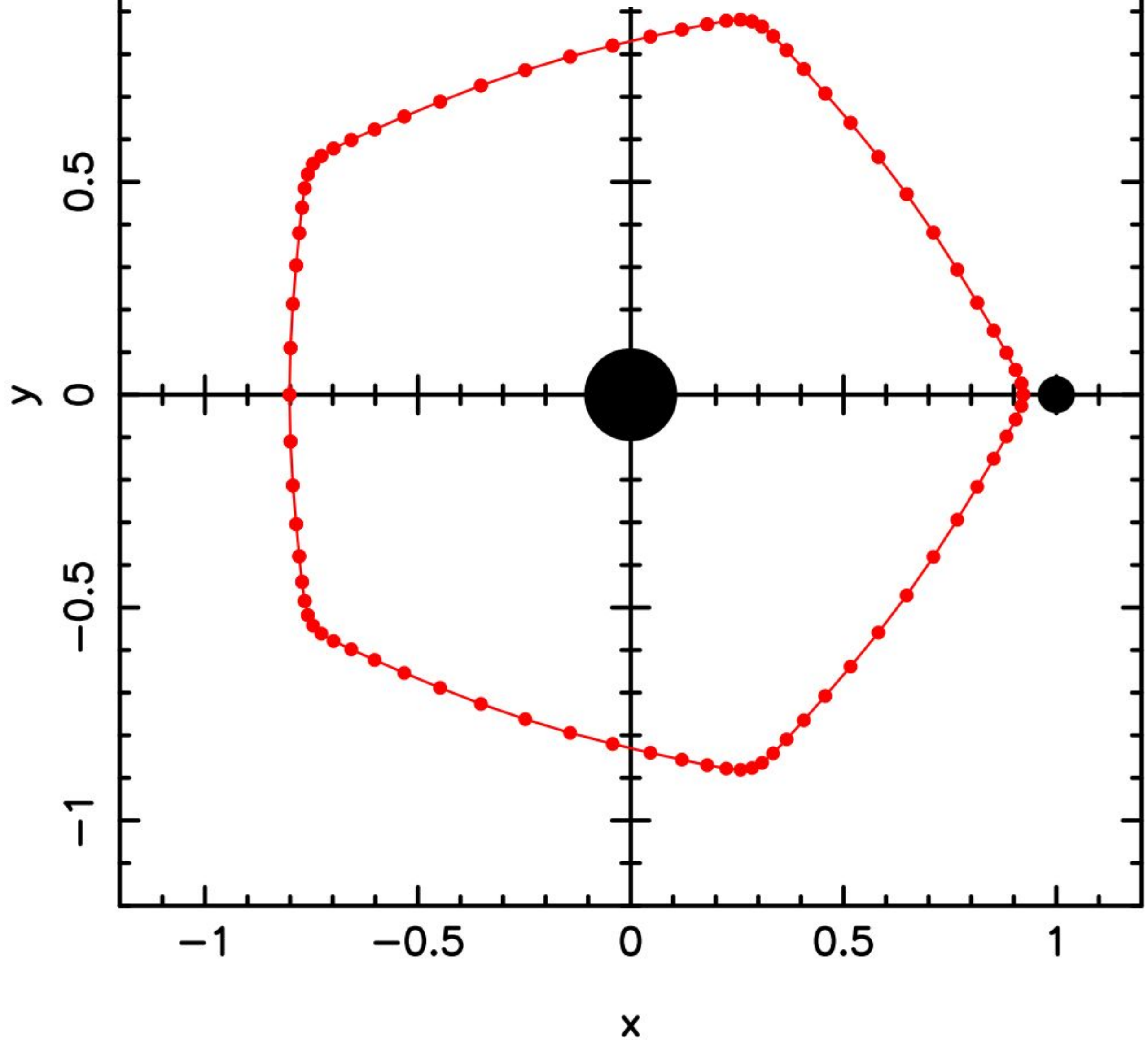
$$\Psi_L = m\lambda_s - (m-q)\lambda - q\varpi$$

ici $m = 5$, $q = 1$, $\varpi = 0° \rightarrow \Psi_L = 0°$



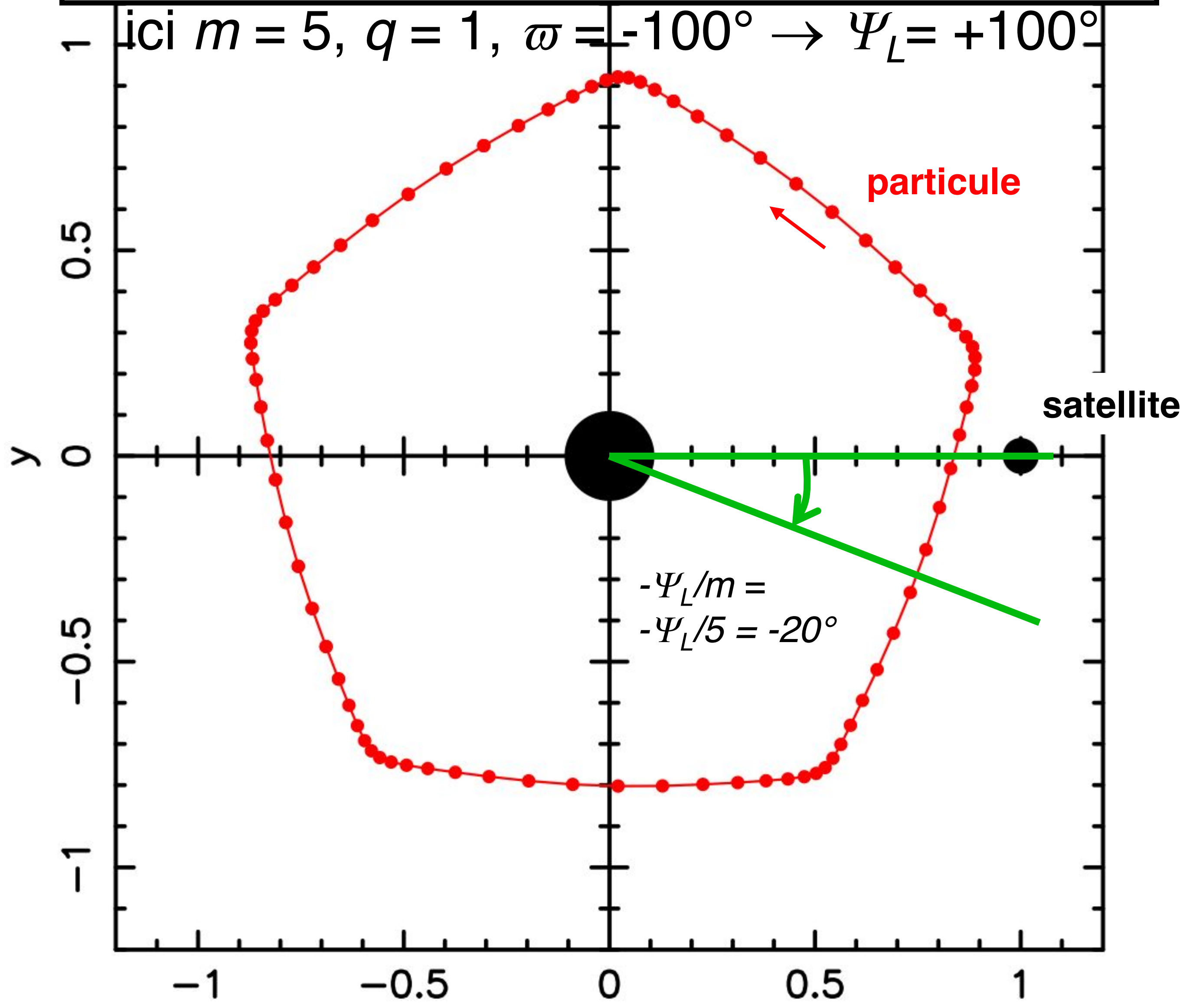
$$\Psi_L = m\lambda_s - (m-q)\lambda - q\varpi$$

ici $m = 5$, $q = 1$, $\varpi = 180°$ $\rightarrow$ $\Psi_L = 180°$



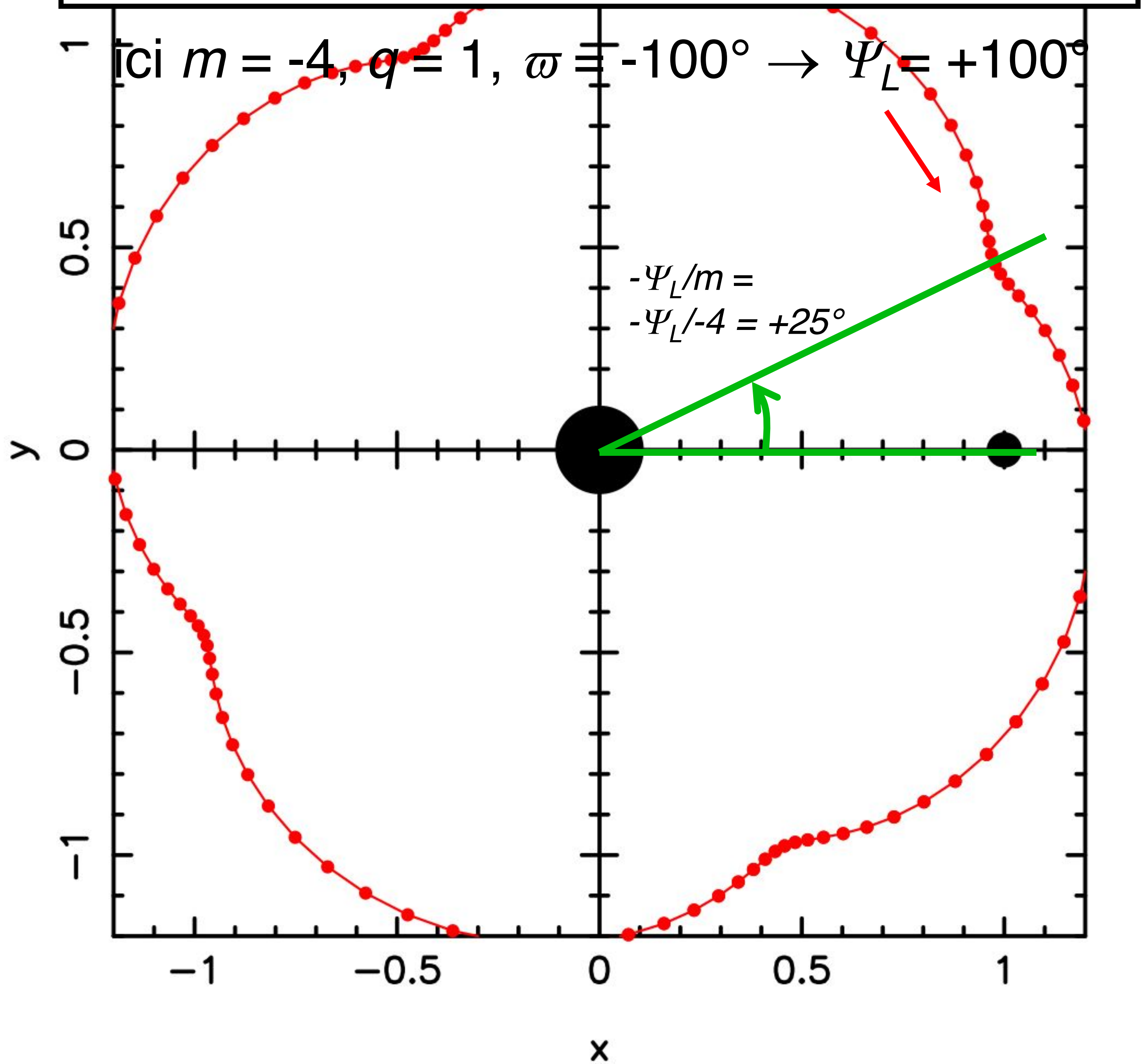
$$\Psi_L = m\lambda_s - (m-q)\lambda - q\varpi$$

ici $m = 5$, $q = 1$, $\varpi = -100°$ → $\Psi_L = +100°$



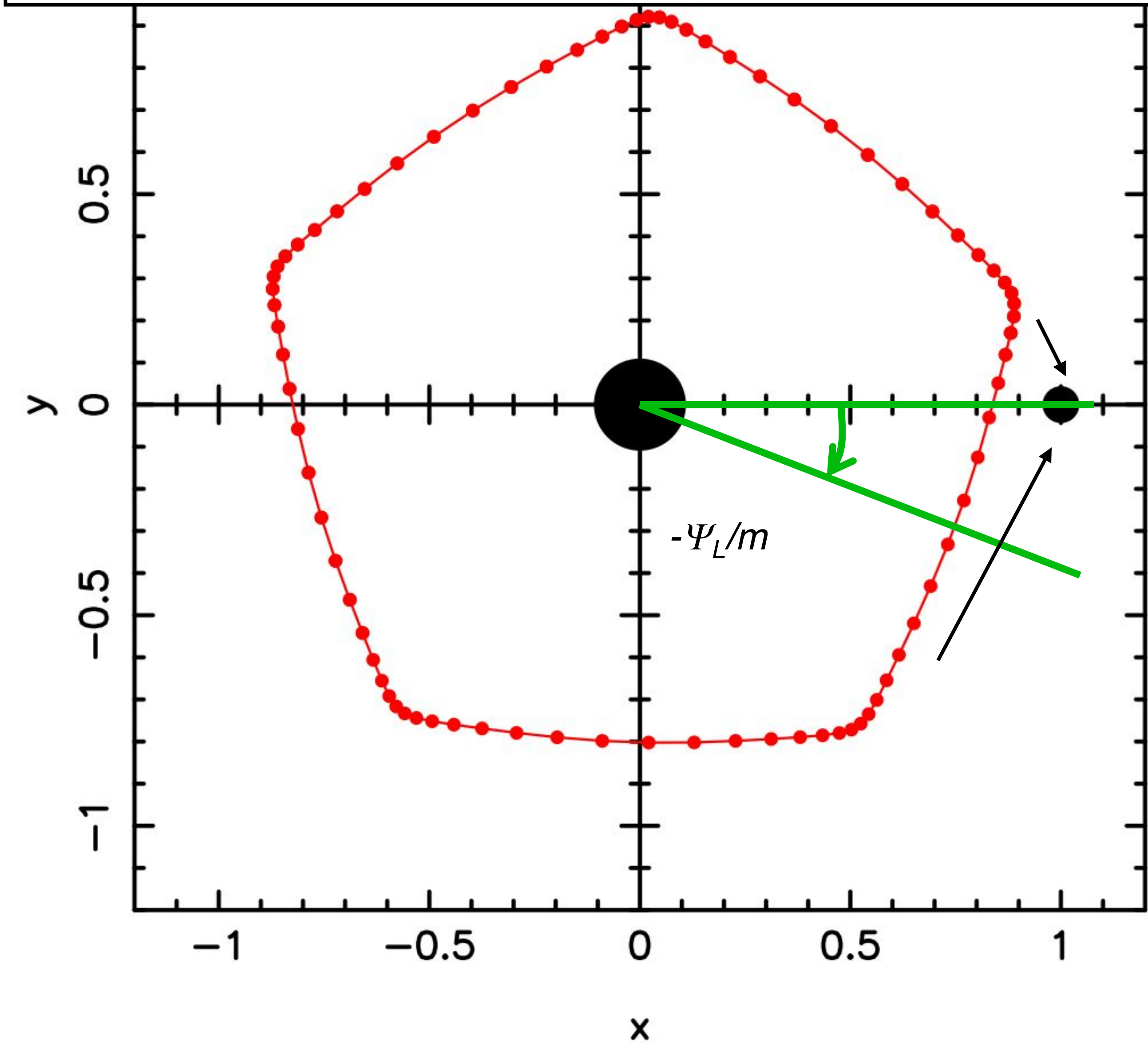
interprétation de l'angle critique de résonance *de Lindblad*

$$\boxed{\Psi_L = m\lambda_s - (m - q)\lambda - q\varpi}$$



moment des forces exercées par le perturbateur:

$$\mathcal{M} \propto e.\sin(\Psi_L)$$



$$\begin{cases} h = & e\cos(\Psi_L) \\ k = & e\sin(\Psi_L) \end{cases}$$

(h,k) → "vecteur excentricité »
(contient l'information sur l'excentricité de l'orbite et son orientation)

but de l'approche hamiltonienne:

décrire l'évolution de *(h,k)* → portrait de phase rq. en fait les vraies variables conjuguées sont:

$$\begin{cases} h = \sqrt{F-G}\cos(\Psi_L) = \sqrt{\sqrt{\mu a}(1-\sqrt{1-e^2})}\cos(\Psi_L) \sim \boxed{\left(\frac{\mu a}{4}\right)^{1/4} e\cos(\Psi_L)} \\ k = \sqrt{F-G}\sin(\Psi_L) = \sqrt{\sqrt{\mu a}(1-\sqrt{1-e^2})}\sin(\Psi_L) \sim \boxed{\left(\frac{\mu a}{4}\right)^{1/4} e\sin(\Psi_L)} \end{cases}$$

où *F* et *G* sont les variables de Delaunay:

$$F = \sqrt{\mu a}, \quad G = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \quad (\mu = \mathcal{GM})$$

NB. on verra que *a* ~ cste [à $O(e^2)$ près] → on peut prendre *a* ~ *cste* pour e << 1