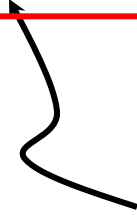


les résonances de corotation

se produisent lorsque

$n = \text{une des fréquences perturbatrices du satellite}$



moyen mouvement de la particule

exemple le plus connu: satellites co-orbitaux, $n = n_s$

de manière générale:

$$U_s = \dots + e_s \cdot \varepsilon_s \cdot m(a_s n_s)^2 E^{(m)}(\alpha) \cdot \cos(\Psi_c) + \dots$$

où:

$$\Psi_c = (m + 1)\lambda_s - m\lambda - \varpi_s$$

est l'angle critique de résonance de corotation horizontale (noter la symétrie par rapport au cas de la particule)

$$\dot{\Psi}_c \approx 0 \quad \text{donne alors} \quad mn \approx (m + 1)n_s - \dot{\varpi}_s \quad \text{où} \quad \dot{\varpi}_s = n_s - \kappa_s$$

$$n \approx n_s + \frac{\kappa_s}{m}$$

Approche hamiltonienne

voir les documents disponibles sur ma page, dont une analyse détaillée dans El Moutamid, Sicardy & Renner *Celestial Mechanics* (2014)

On considère le problème *restreint* (une particule de masse nulle) perturbée par un satellite (éventuellement d'orbite *elliptique*) orbitant dans le même plan: c'est donc le problème trois corps restreint plan (**mais non circulaire**)

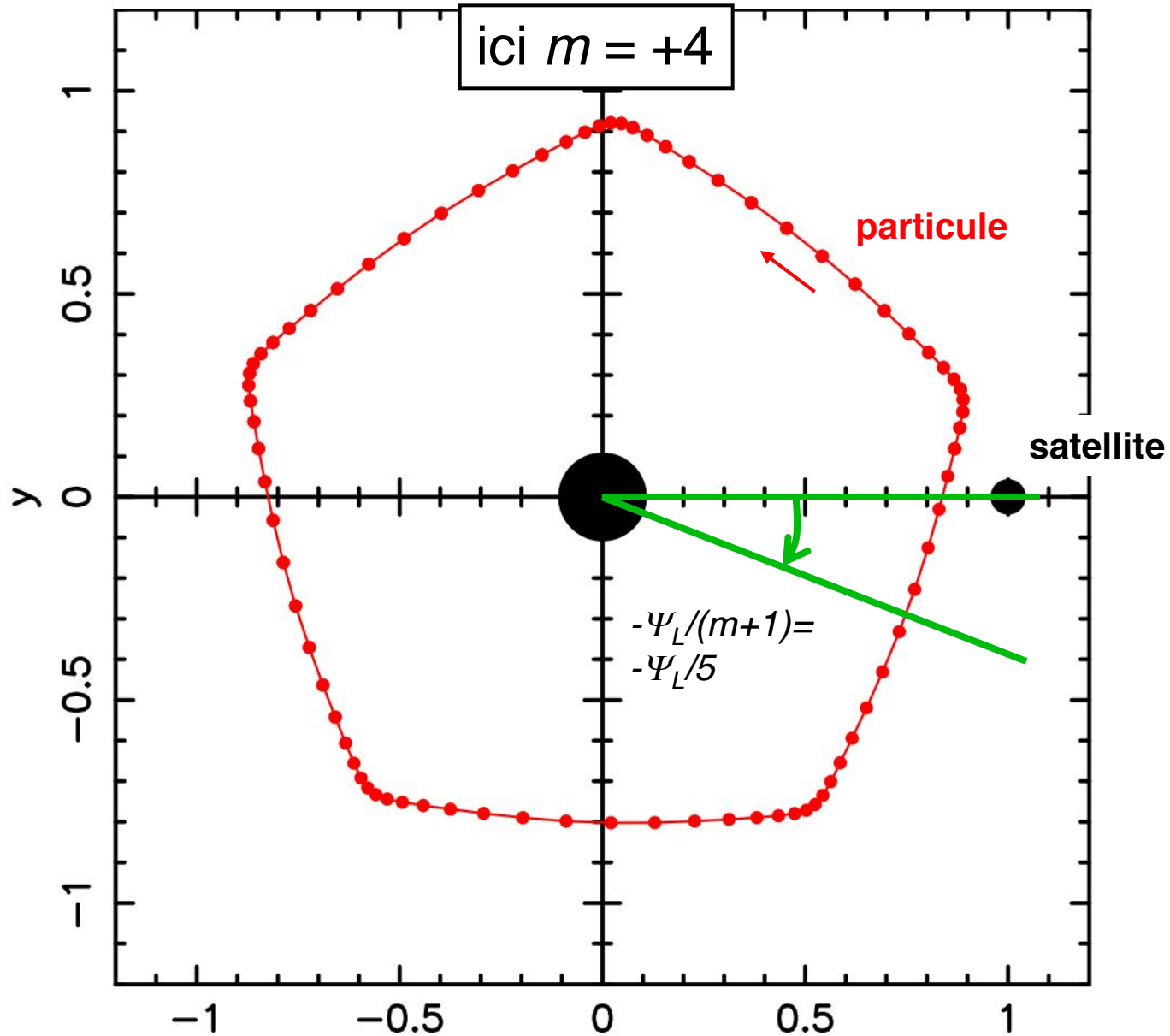
D'autre part, on suppose que le corps central (la « planète ») est *aplati* → apparition de taux de précession de la ligne des apses

Près d'une résonance de *premier* ordre:

$$(m + 1)n' \approx mn$$

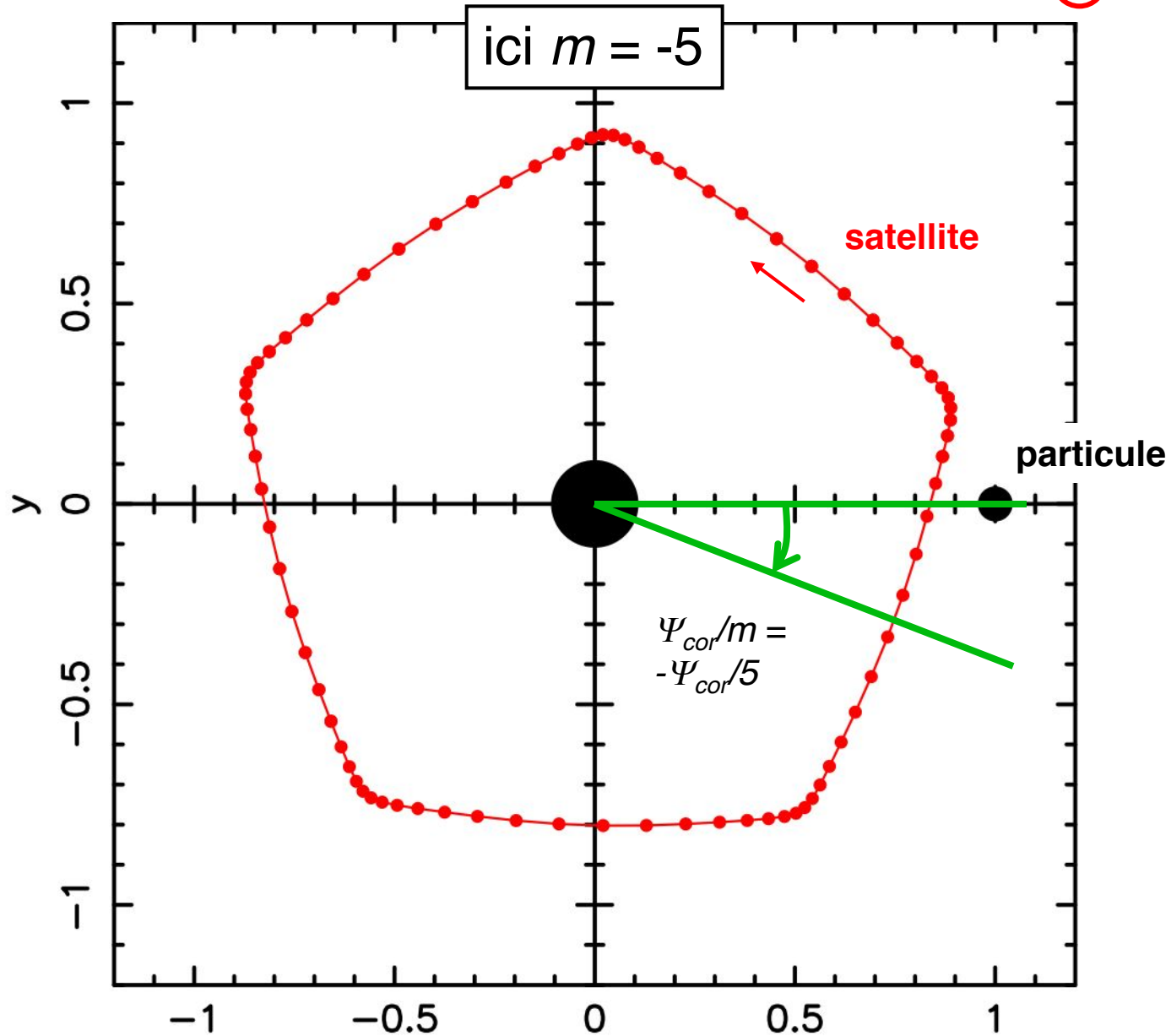
Où les quantités primées sont relative au perturbateur (le « satellite ») et les quantité non primées sont relatives à la particule (masse nulle)

$$\Psi_L = (m+1)\lambda_s - m\lambda - \varpi$$

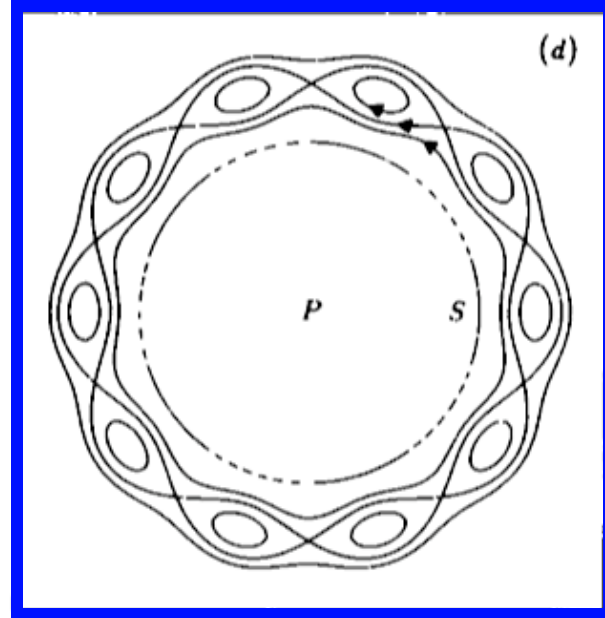
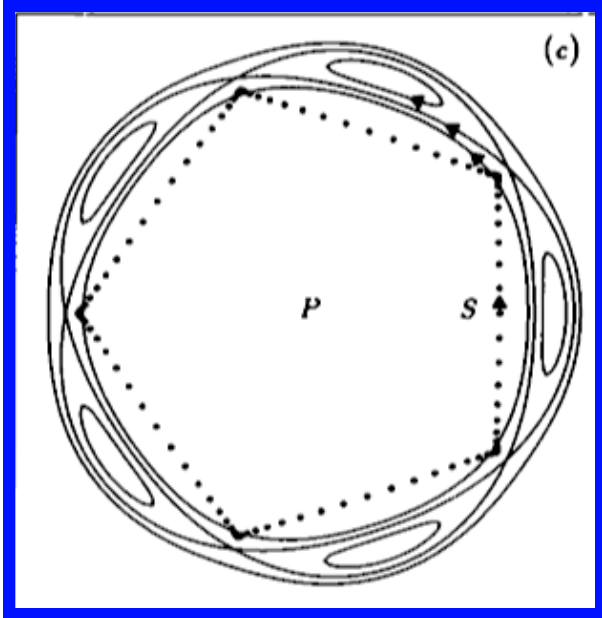
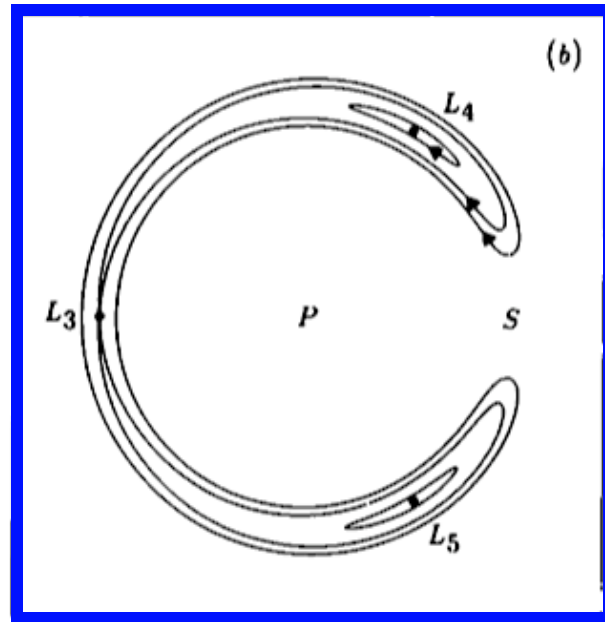
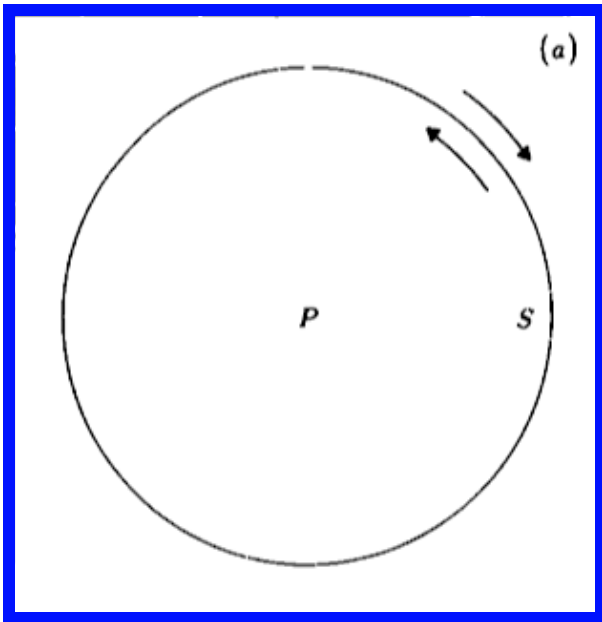


interprétation de l'angle critique de résonance de Lindblad

$$\Psi_{\text{cor}} = (m + 1)\lambda_s - m\lambda - \varpi \textcircled{s}$$



interprétation de l'angle critique de résonance de corotation



Les résonances de corotation

On suppose maintenant que $e' \neq 0$ (problème restreint plan mais **non circulaire**). On obtient alors le Hamiltonien d'une **résonance de corotation** pure :

$$\mathcal{H} = -\frac{(GM)^2}{2\Lambda^2(J, \Phi_L, \Phi_c)} + G\mu' A' e' \cos(\Psi_c) + n' [J + (m + 1)(\Phi_L + \Phi_c)]$$

\mathcal{H} ne dépend pas de $\lambda, \lambda', \Phi_L \rightarrow J, J', \Phi_L = \text{constantes} \rightarrow$

le système se réduit à **un degré de liberté** \rightarrow il est intégrable !

$$\dot{\Phi}_c = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Psi_c} = G\mu' A' e' \sin(\Psi_c)$$

$$\dot{\Psi}_c = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_c} = \Delta n$$

où de nouveau $\Delta n = -3mn\Delta a/2a_0$ est la distance à la résonance exacte.

Comme $\Phi_L = \Gamma \sim e^2 \sqrt{GMa}/2 = \text{constante}$, on a :

$$\delta e \sim -e \frac{\delta a}{4a}$$

Comme $e \ll 1$, on peut négliger les variations de e par rapport à celles de a : la résonance de corotation **modifie très peu l'excentricité** orbitale de la particule.

Par ailleurs, $J = J_c + m\Phi_c$ et $J = \text{constante}$, donc $\dot{J}_c = -m\dot{\Phi}_c$.

Comme $J_c \sim (a_0^2 n_0 / 2) [2 + \Delta a / a_0 + me^2]$, on a $\dot{J}_c = (a_0^2 n_0 / 2) \dot{\Delta a} / a_0$

Finalement, en utilisant les équations Hamiltoniennes précédentes et $\dot{\Delta a} / a_0 = -2\dot{\Delta n} / 3mn_0$, on obtient :

$$\ddot{\Psi}_c = 3m^2 (aA') n_0^2 \left(\frac{\mu'}{M} \right) e' \sin(\Psi_c)$$

qui est **l'équation du pendule simple**, oscillant de manière stable autour de $\Psi_c = 0$ (resp. $\Psi_c = \pi$) si $A' < 0$ (resp. $A' > 0$). NB. aA' est un coefficient sans dimension de l'ordre de $-m$.

Un cas simple de corotation: les points de Lagrange

on part de l'accélération dans le repère tournant:

$$\vec{\gamma}_{\text{rot}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r} - \frac{Gm_s}{\Delta^3}\vec{\Delta} - \frac{Gm_s}{r_s^3}\vec{r}_s + n_s^2\vec{r} + 2\vec{v}_{\text{rot}} \times \vec{n}_s$$

en utilisant:

$$\vec{\Delta} = \vec{r} - \vec{r}_s$$

$$n_s^2 = G(M + m_s)$$

on obtient:

$$\vec{\gamma}_{\text{rot}} = GM\left(\frac{1}{r_s^3} - \frac{1}{r^3}\right)\vec{r} + Gm_s\left(\frac{1}{r_s^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)\vec{\Delta} + 2\vec{v}_{\text{rot}} \times \vec{n}_s$$

$$\vec{\gamma}_{\text{rot}} = GM \left(\frac{1}{r_s^3} - \frac{1}{r^3} \right) \vec{r} + Gm_s \left(\frac{1}{r_s^3} - \frac{1}{\Delta^3} \right) \vec{\Delta} + 2\vec{v}_{\text{rot}} \times \vec{n}_s$$

équilibre *relatif* atteint lorsque: $\vec{\gamma}_{\text{rot}} = 0, \vec{v}_{\text{rot}} = 0$

soit:

$$M \left(\frac{1}{r_s^3} - \frac{1}{r^3} \right) \vec{r} + m_s \left(\frac{1}{r_s^3} - \frac{1}{\Delta^3} \right) \vec{\Delta} = 0$$

deux possibilités: \vec{r} et $\vec{\Delta}$ colinéaires ou \vec{r} et $\vec{\Delta}$ non colinéaires

les points de Lagrange

si \vec{r} et $\vec{\Delta}$ non colinéaires, alors $r = r_s = \Delta \rightarrow$

points équilatéraux
 L_4 et L_5

si \vec{r} et $\vec{\Delta}$ colinéaires, alors on pose:

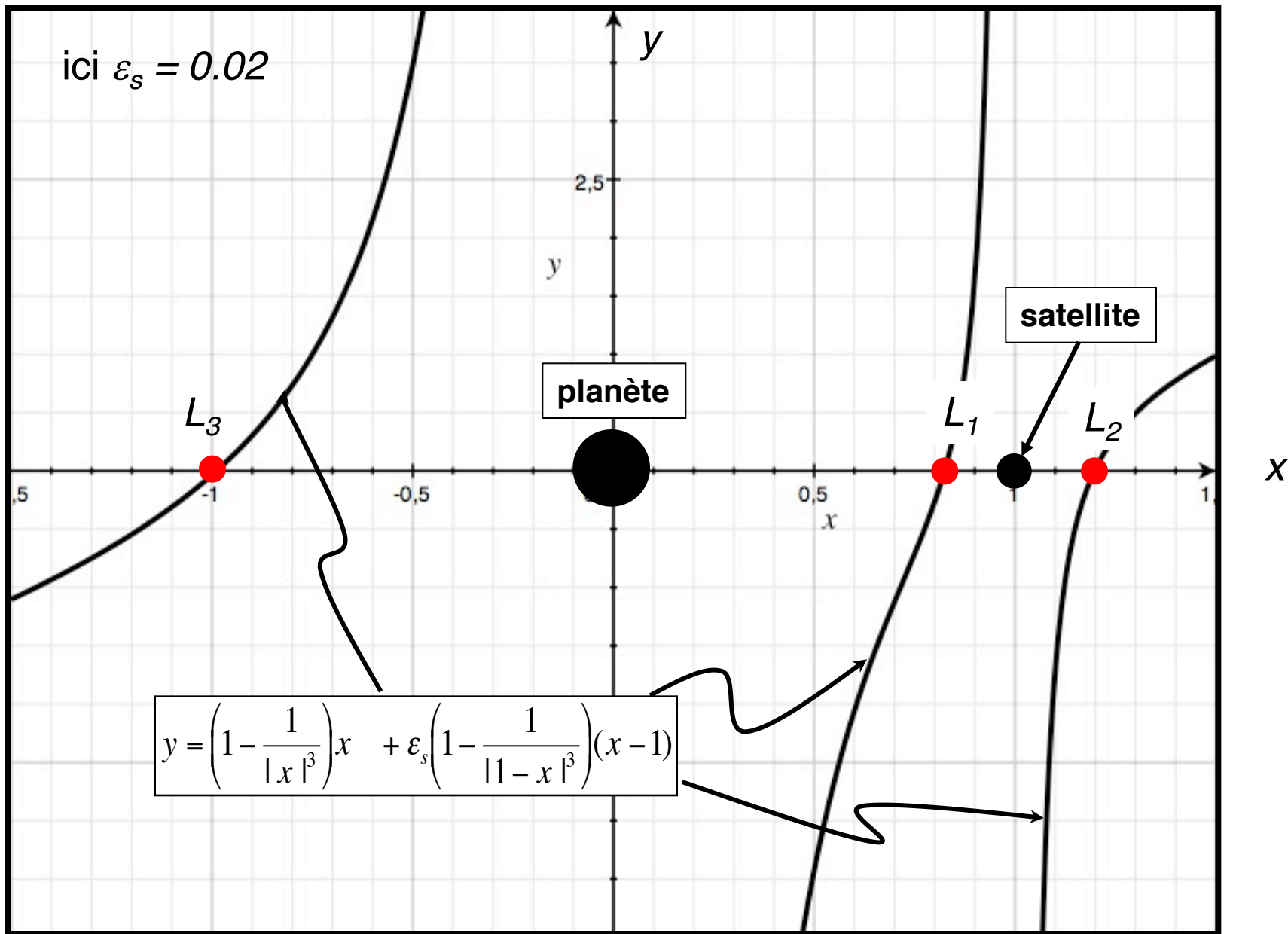
$$x = r_x; x_s = r_{sx} \equiv 1; \text{ d'où : } \Delta = x - 1$$

$$\left(1 - \frac{1}{|x|^3}\right)x + \varepsilon_s \left(1 - \frac{1}{|1-x|^3}\right)(x-1) = 0 \rightarrow$$

points colinéaires
 L_1, L_2 et L_3
(dits aussi points
de Euler)

où: $\varepsilon_s = \frac{m_s}{M}$

ici $\varepsilon_s = 0.02$



planète

satellite

L₃

L₁

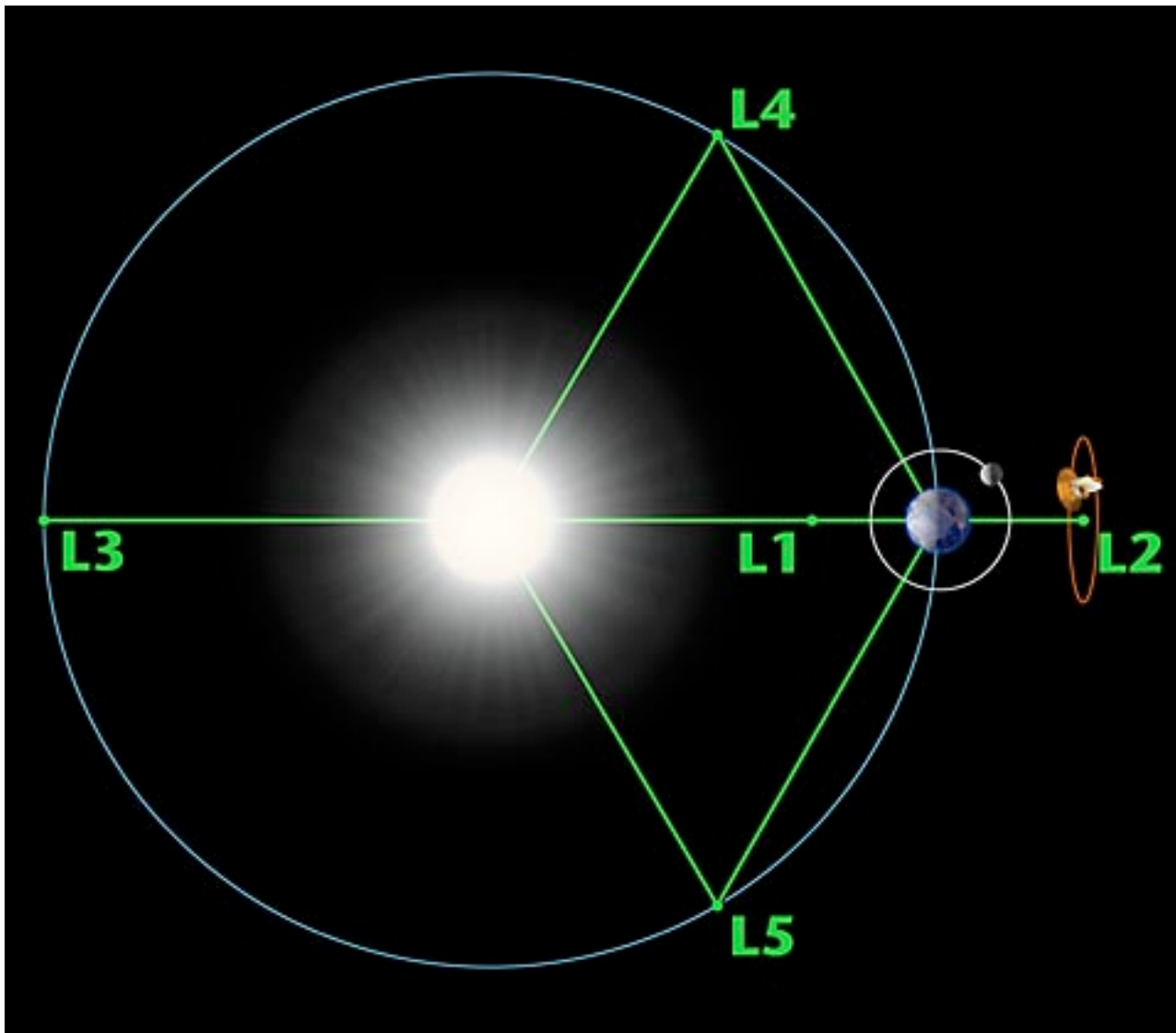
L₂

x

-1

0

+1



cf. Neil J. Cornish

http://map.gsfc.nasa.gov/mission/observatory_l2.html

potentiel dans le repère tournant:

$$U_{\text{rot}} = -\frac{GM}{r} - n_s^2 r^2 / 2 + Gm_s \left(\frac{r \cdot \vec{r}_s}{r_s^3} - \frac{1}{\Delta} \right)$$

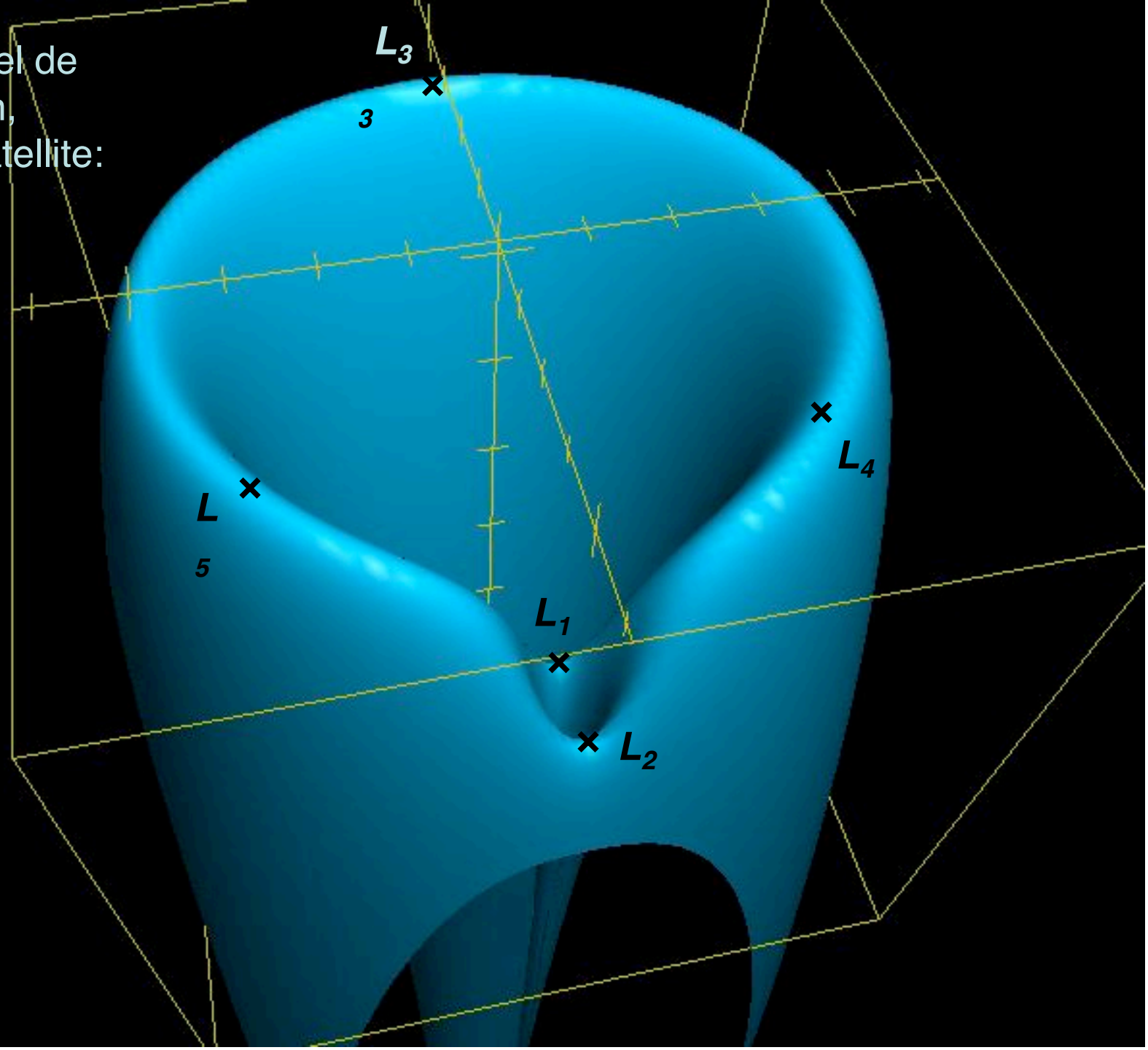
où le potentiel perturbateur du satellite vaut:

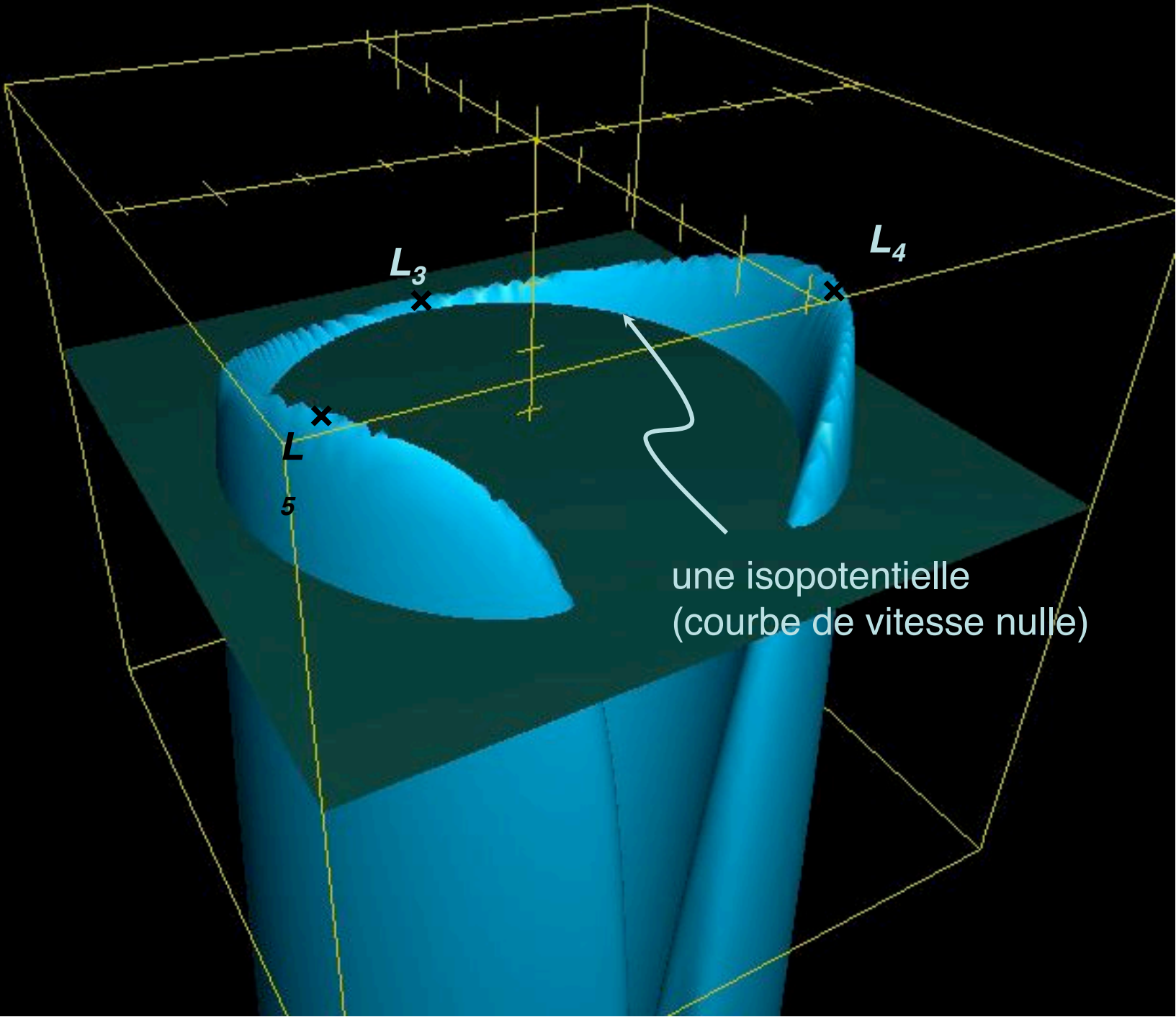
$$U_s = Gm_s \left(\frac{r \cdot \vec{r}_s}{r_s^3} - \frac{1}{\Delta} \right) \approx \frac{Gm_s}{r_s} f(\Phi) \approx \varepsilon_s (a_s n_s)^2 f(\Phi)$$

avec $\Phi = \lambda - \lambda_s$ angle critique de corotation, $\varepsilon_s = m_s/M$, et:

$$f(\Phi) = \cos(\Phi) - \frac{1}{2 |\sin(\Phi/2)|}$$

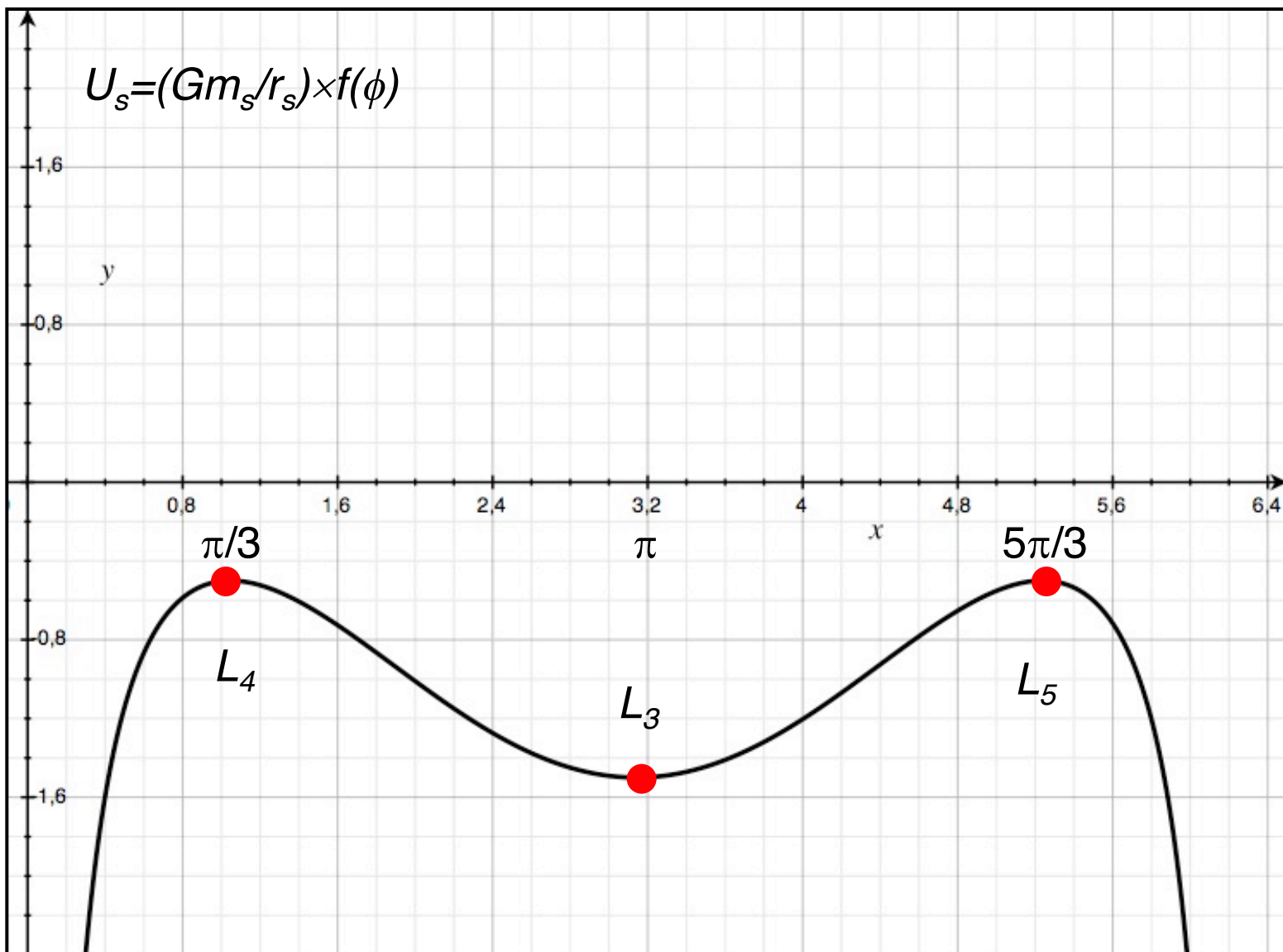
le potentiel de
corotation,
masse satellite:
0.01





une isopotentielle
(courbe de vitesse nulle)

$$U_s = (Gm_s/r_s) \times f(\phi)$$

 ϕ

équations du mouvement:

$$\dot{E} = \vec{v} \cdot \vec{\gamma} = -an \cdot \frac{\partial U_s}{a \partial \Phi} \approx -a_s^2 n_s^3 \varepsilon_s f'(\Phi)$$

$$\text{mais } \dot{E} \approx \frac{a_s n_s^2}{2} \dot{a} \quad \text{soit } \dot{a} = -2a_s n_s f'(\Phi)$$

$$\text{ou encore: } \dot{\xi} = -2n_s \varepsilon_s f'(\Phi) \text{ où } \xi \equiv (a - a_s) / a_s$$

$$\text{de plus: } \dot{\Phi} \approx -\frac{3\xi}{2} \cdot n_s \quad (\text{3ème loi de Kepler})$$

et finalement...

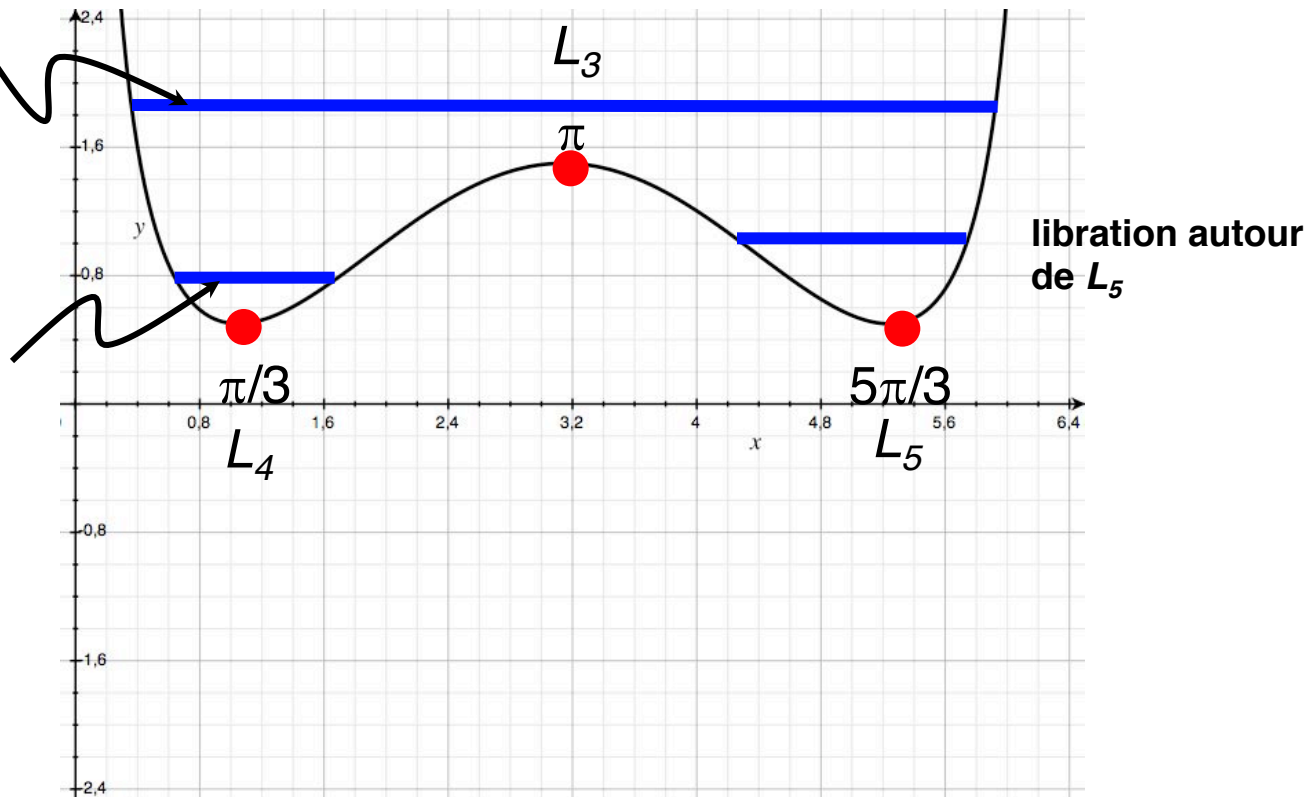
$$\ddot{\Phi} \approx +3n_s^2 \varepsilon_s f'(\Phi)$$

mouvement d'une particule dans le potentiel $-3\varepsilon_s f(\Phi)$

selon les conditions initiales:

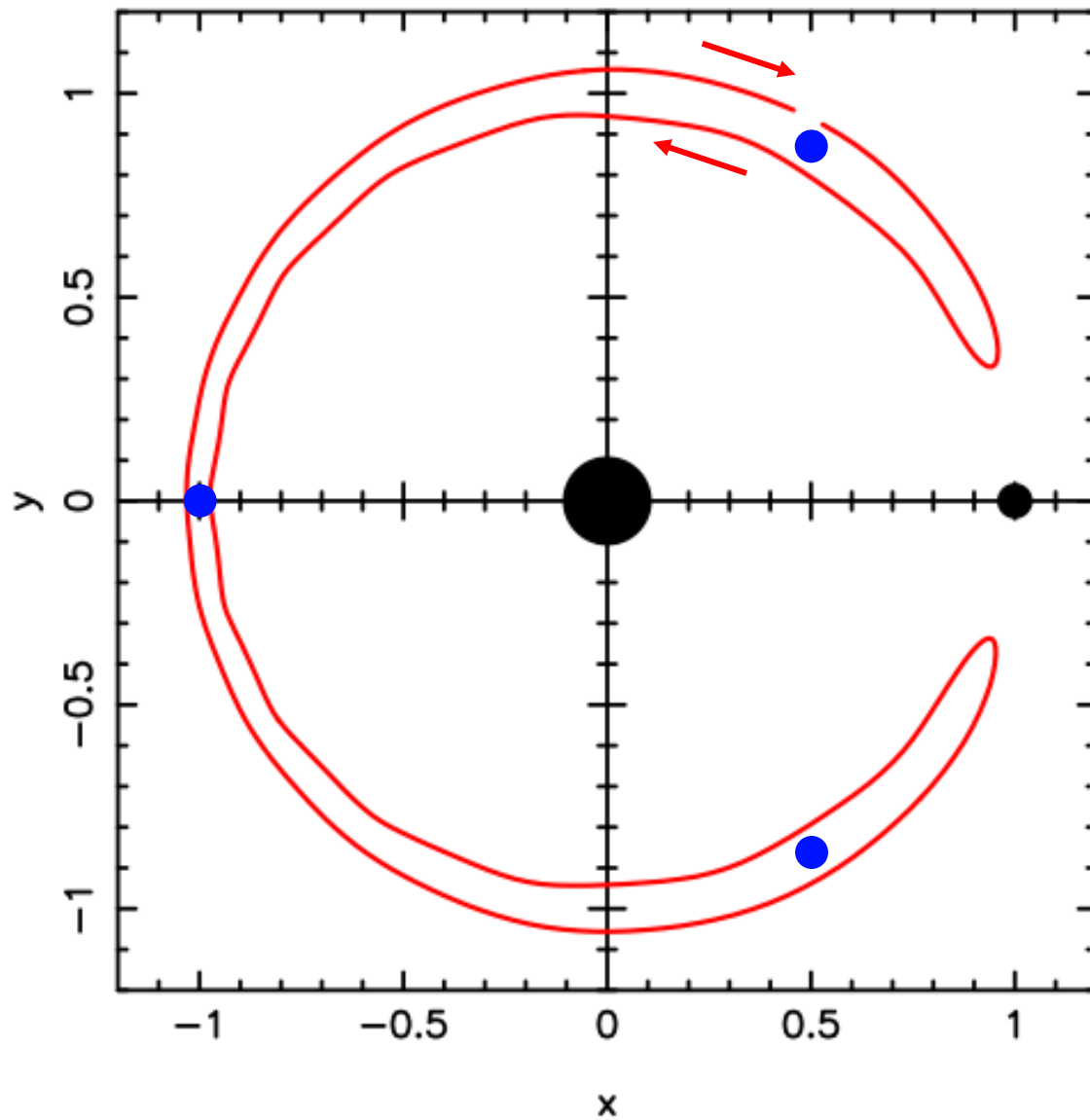
libration autour de L_4 et L_5 (orbites en "fer à cheval")

libration autour de L_4 (orbites en "banane")



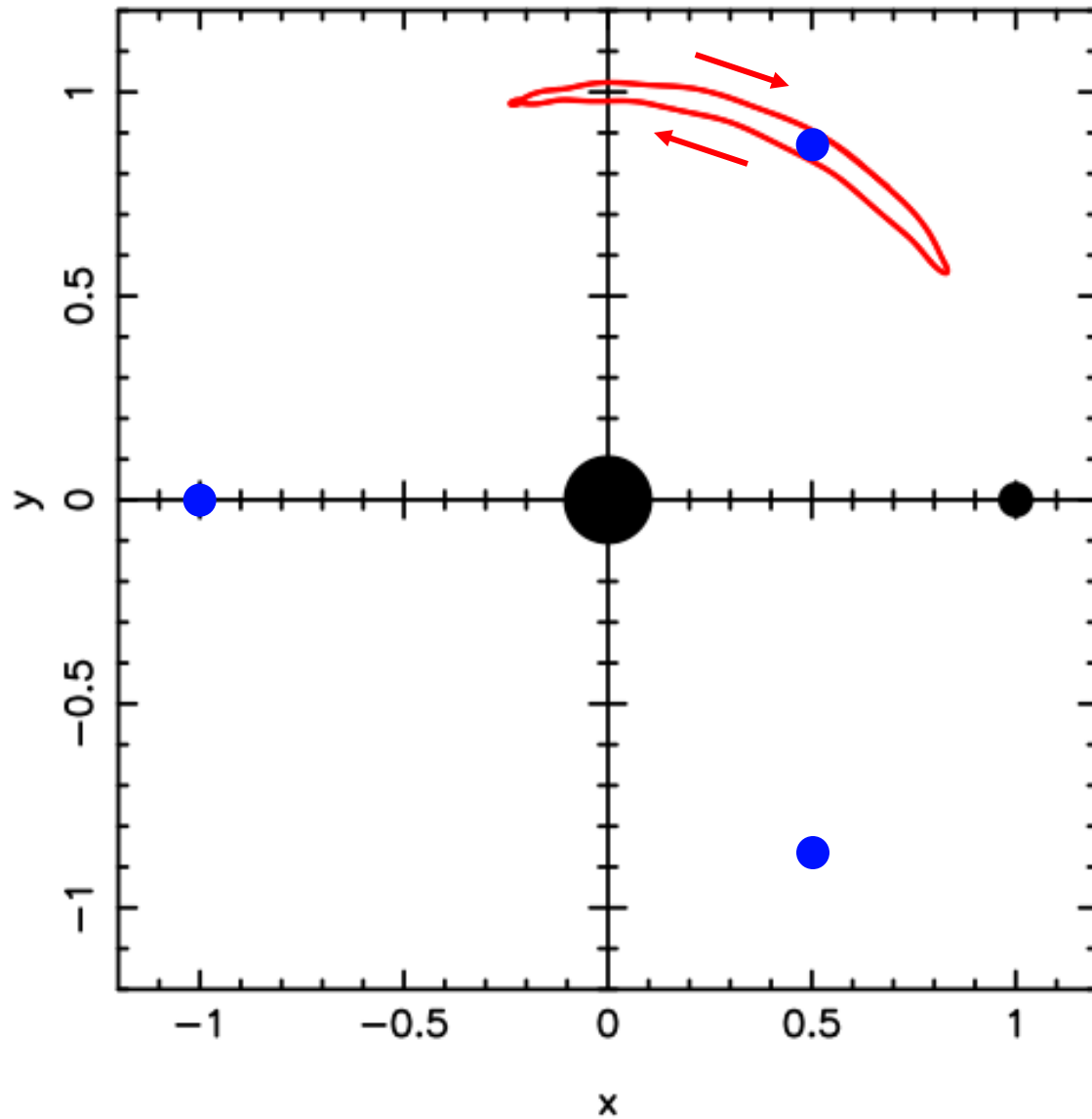
fer à cheval, \sim circulaire

$m_{\text{sat}}=0.001$, eccentricity ~ 0 .



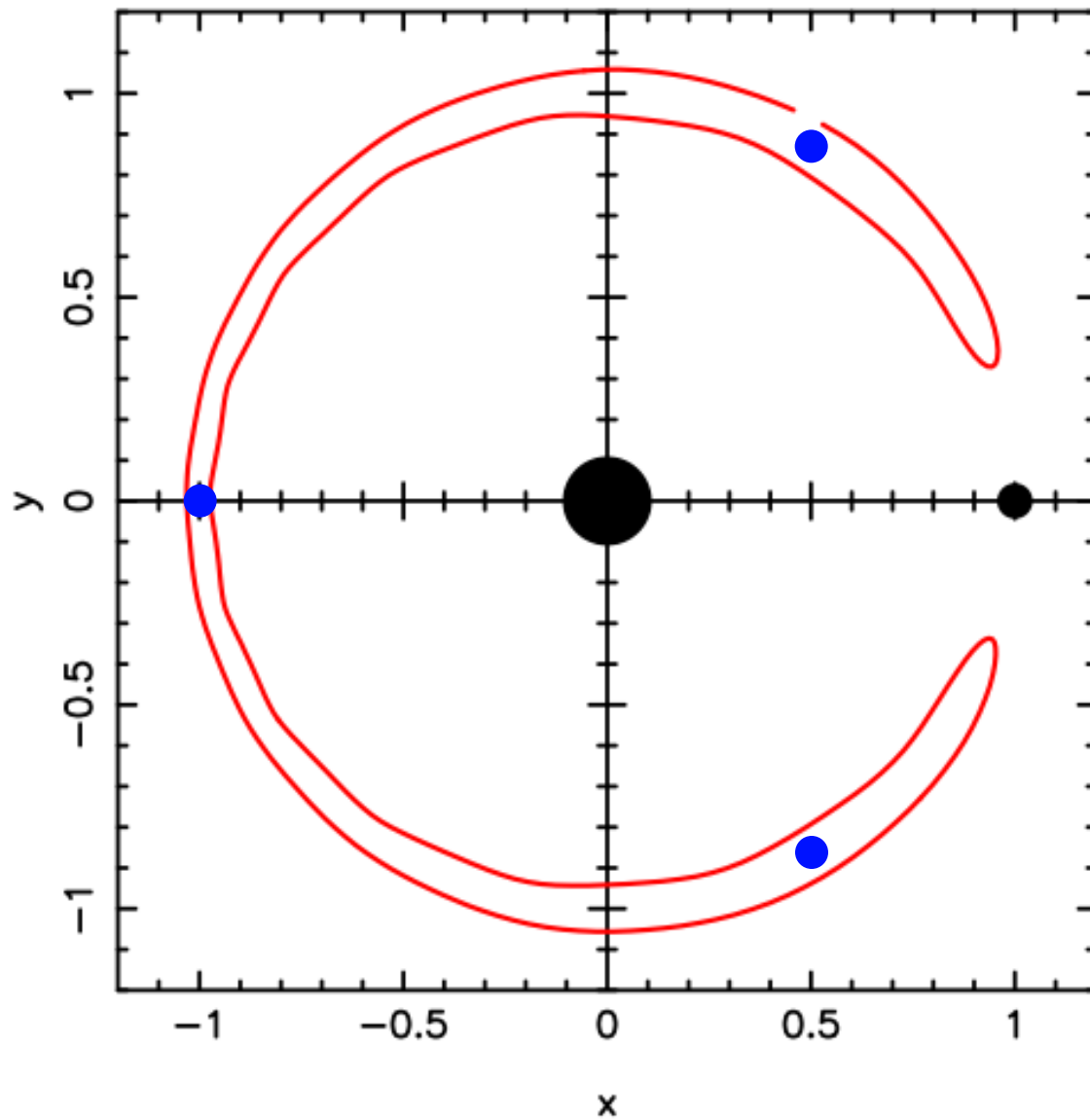
banane, ~circulaire

$m_{\text{sat}}=0.001$, eccentricity ~ 0 .

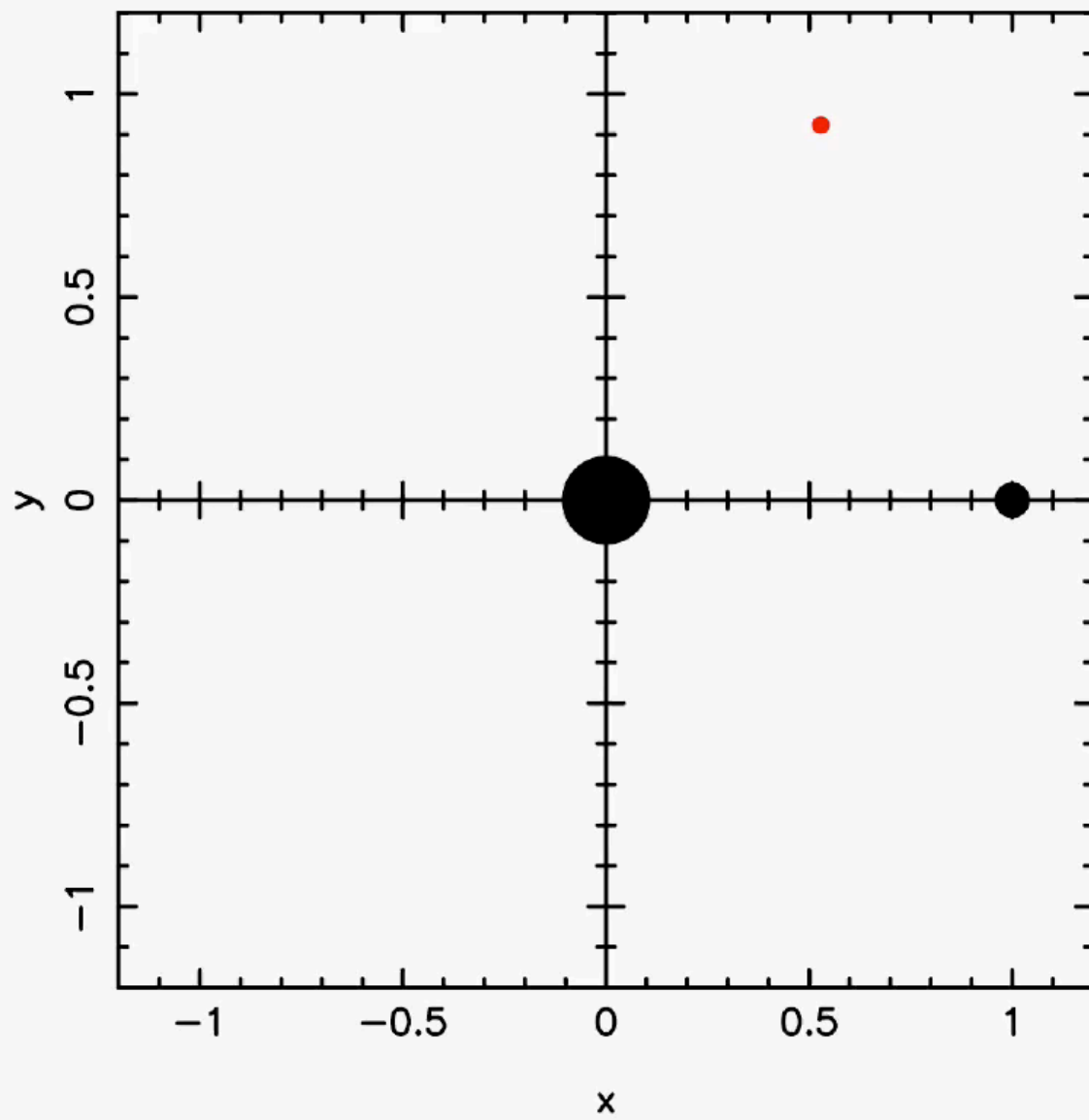


fer à cheval, \sim circulaire

$m_{\text{sat}}=0.001$, eccentricity ~ 0 .

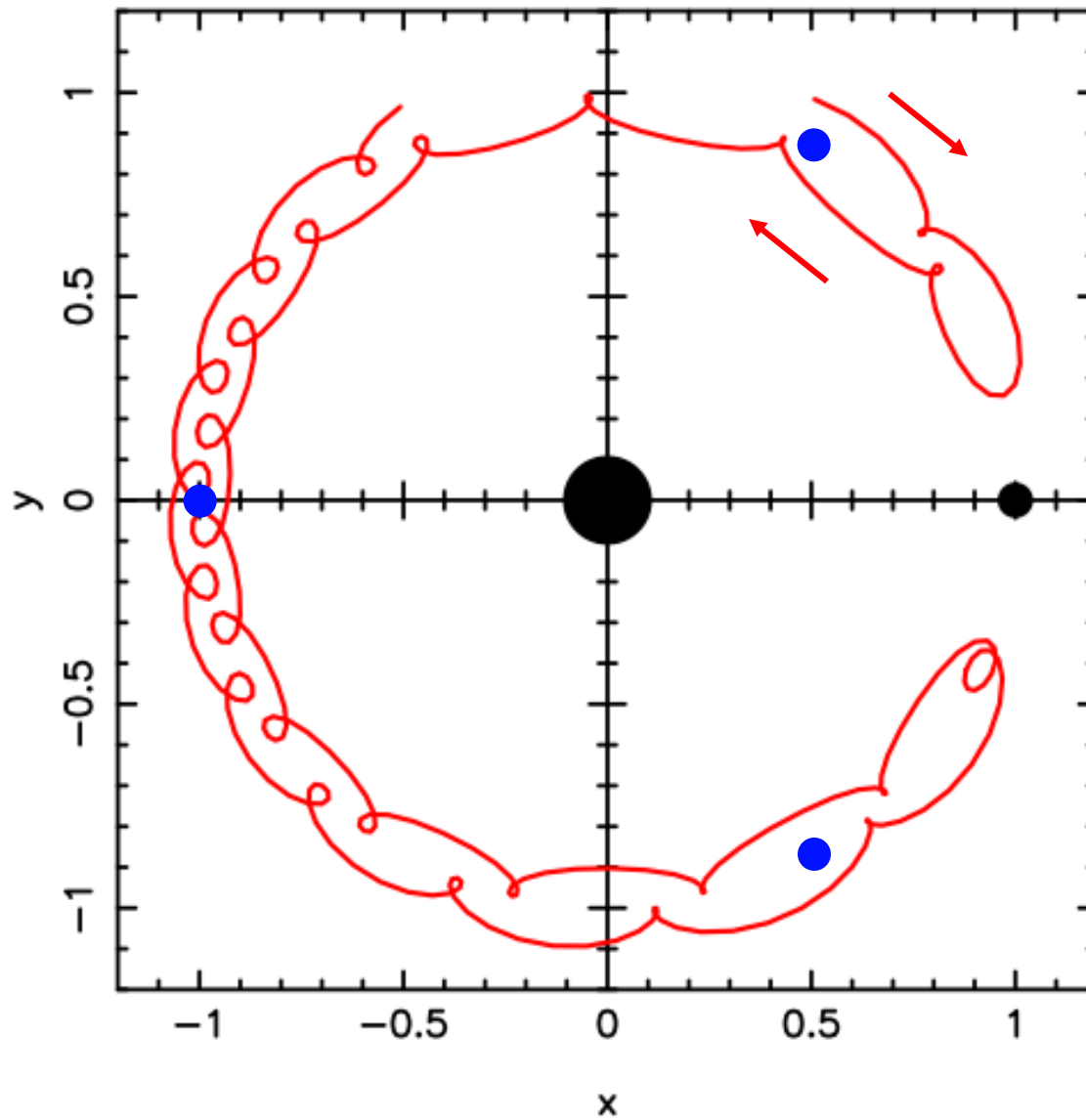


$m_{\text{sat}}=0.001$



fer à cheval, excentrique

$m_{\text{sat}}=0.001$, excentricité ~ 0.05



montrons que les orbites co-orbitales de faible excentricité se déduisent des isopotentielle (courbes de vitesse nulle) par une anamorphose radiale d'un facteur deux

$$E_{\text{rot}} = K_{\text{rot}} + U_{\text{rot}} = \frac{v_{\text{rot}}^2}{2} - \frac{GM}{r} - \frac{n_s^2 r^2}{2} + Gm_s \left(\frac{r \cdot \vec{r}_s}{r_s^3} - \frac{1}{\Delta} \right) = \text{cste}$$

donc l'isopotentielle:

$$-\frac{GM}{r} - \frac{n_s^2 r^2}{2} + Gm_s \left(\frac{r \cdot \vec{r}_s}{r_s^3} - \frac{1}{\Delta} \right) = \text{cste}$$

est aussi la courbe de vitesse nulle correspondant à $E_{\text{rot}} = \text{cste}$

on pose $\xi \equiv (a - a_s) / a_s \ll 1$ alors...

développement au second ordre en ξ :

$$-\frac{GM}{r} - \frac{n_s^2 r^2}{2} \approx -\frac{3}{2}(a_s n_s)^2 - \frac{3}{2}(a_s n_s)^2 \xi^2$$

donc isopotentielle (courbe de vitesse nulle) donnée par:

$$\boxed{-\frac{3}{2}(a_s n_s)^2 - \frac{3}{2}(a_s n_s)^2 \xi^2 + \varepsilon_s (a_s n_s)^2 f(\Phi) = \text{cste}} \quad (1)$$

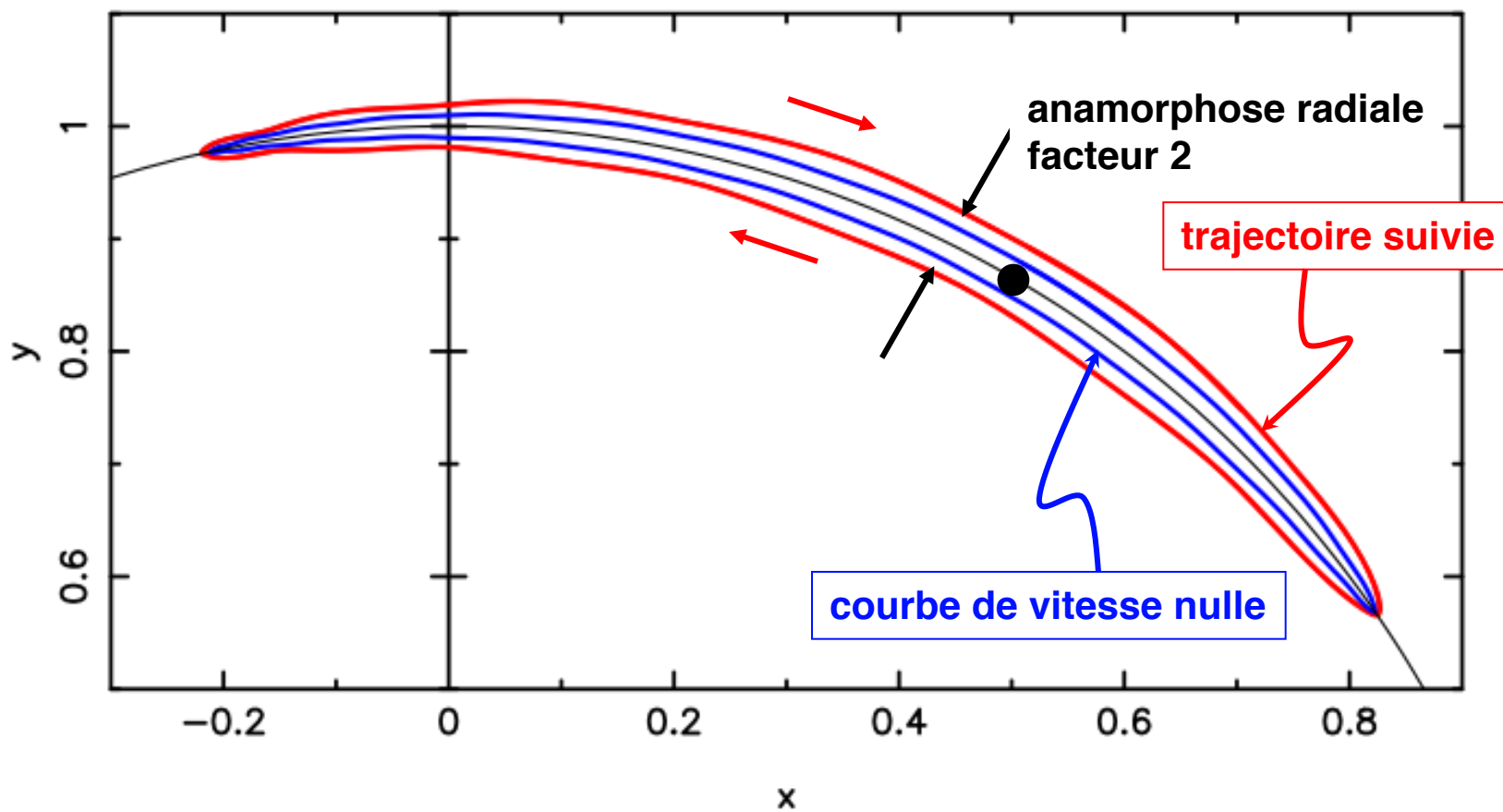
pour une courbe d'excentricité *faible*, $v_{rot} \sim -3(a_s n_s) \xi / 2$
(3ème loi de Kepler), donc:

$$E_{rot} = \frac{v_{rot}^2}{2} + U_{rot} \approx -\frac{3}{2}(a_s n_s)^2 - \frac{3}{8}(a_s n_s)^2 \xi^2 + \varepsilon_s (a_s n_s)^2 f(\Phi) = \text{cste} \quad (2)$$

Donc:

La comparaison de (1) et (2) montre que la trajectoire de la particule [donnée par (2)] se déduit de la courbe de vitesse nulle correspondante [donnée par (1)] par anamorphose radiale (le long de ξ) d'un facteur 2.

$m_{\text{sat}}=0.001$, eccentricity ~ 0



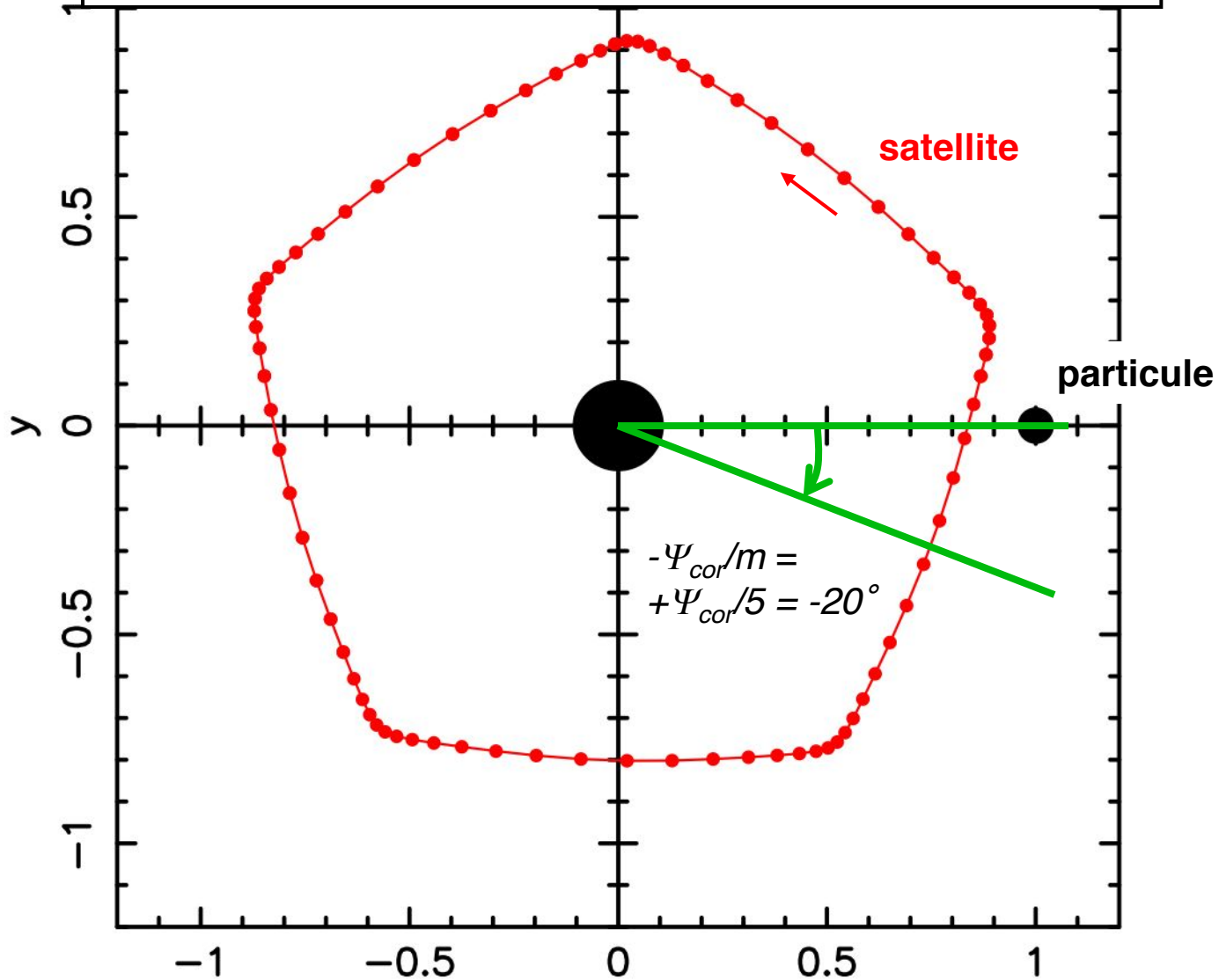
NB. les points stables L_4 et L_5 sont des *maxima* d'énergie dans le repère tournant. Donc si des forces de dissipation sont présentes (i.e. collisions), alors ils ne sont plus stables. Problème cependant peu intuitif en général.

exercices:

- montrer que cette stabilité est assurée par l'accélération de Coriolis.
- montrer que la propriété d'anamorphose montrée précédemment peut également s'expliquer par l'accélération de Coriolis.

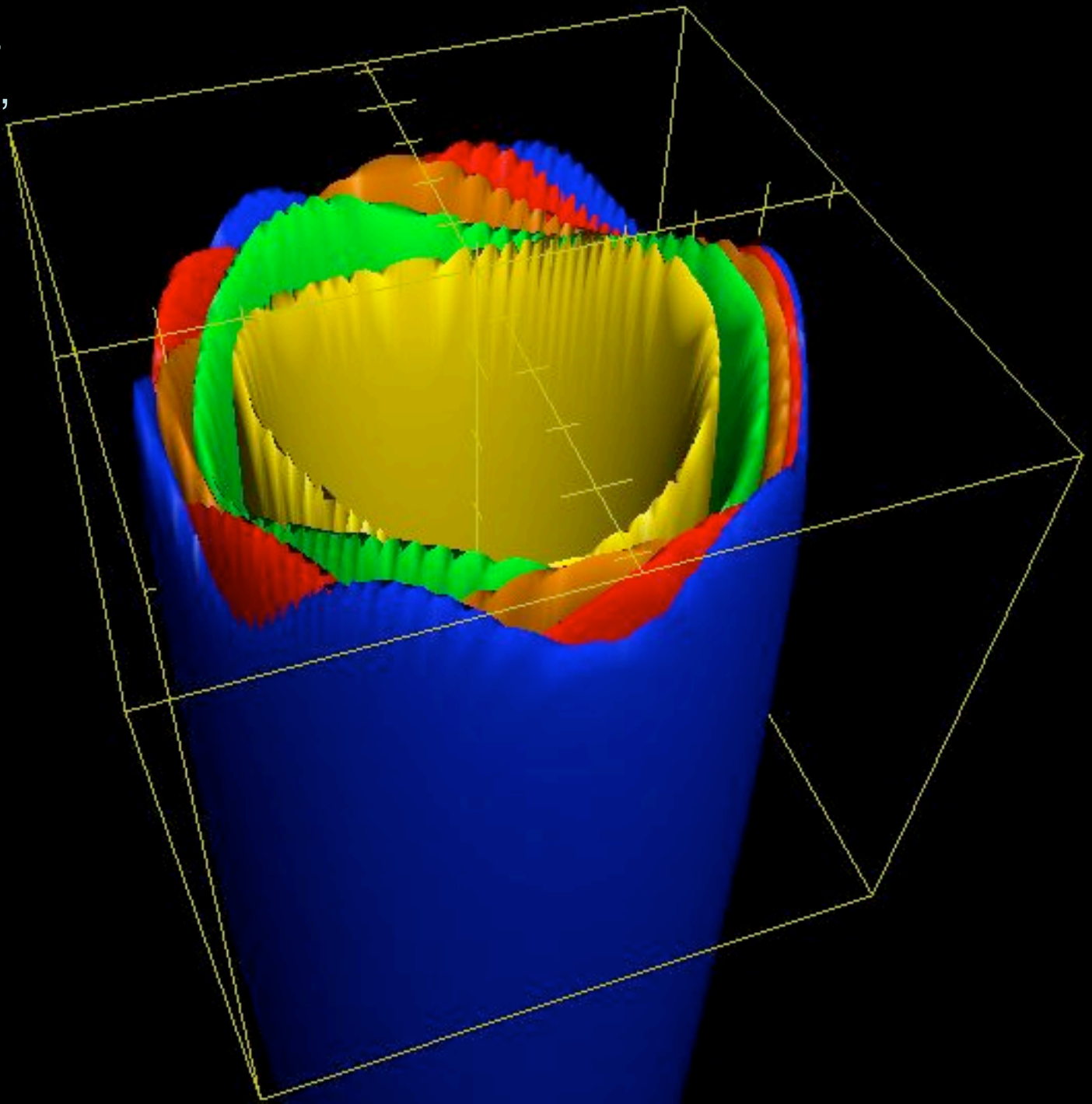
$$\Psi_{\text{cor}} = (m + q)\lambda_s - m\lambda - q\varpi_s$$

$$\text{ici } m = -5, q = 1, \varpi = +100^\circ \rightarrow \Psi_{\text{cor}} = -100^\circ$$

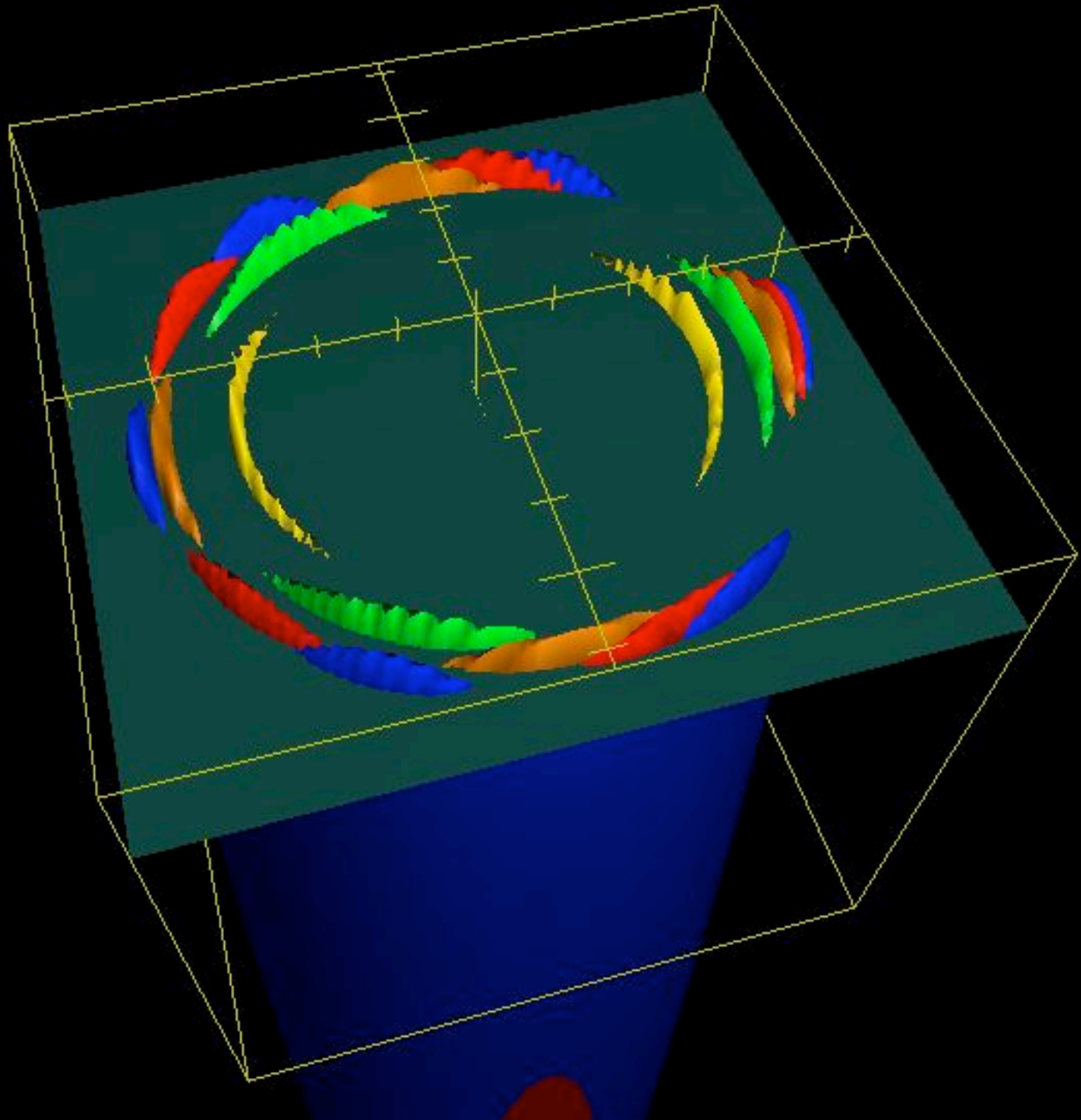


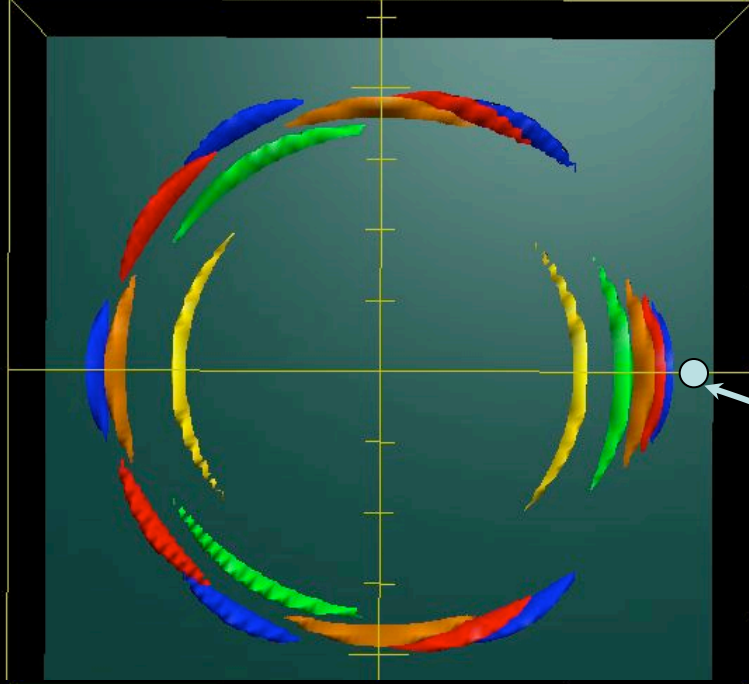
interprétation de l'angle critique de résonance de corotation

les potentiels
de corotation,
 $m=2, \dots, 6$
satellite de
masse 0.002

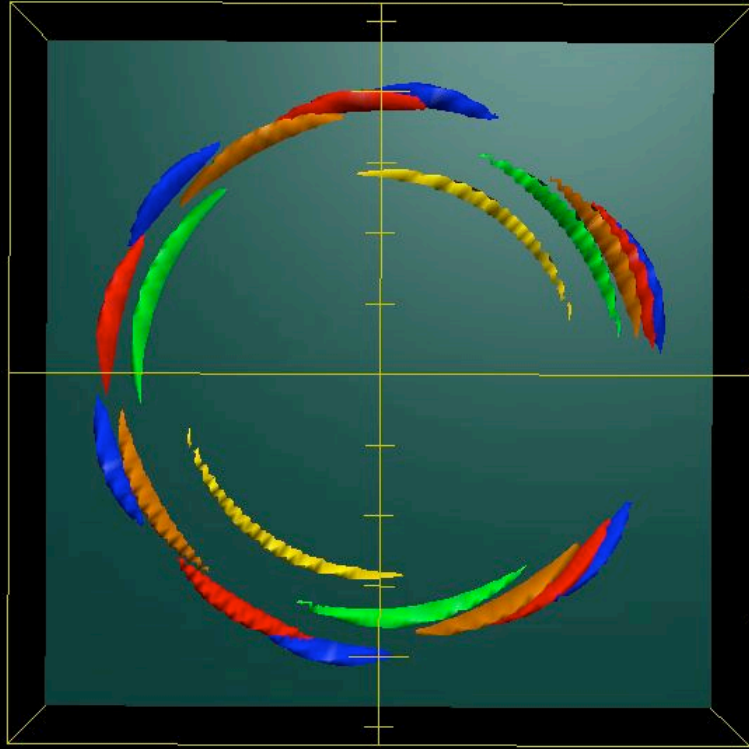


les sites de
corotation,
 $m=2,\dots,6$

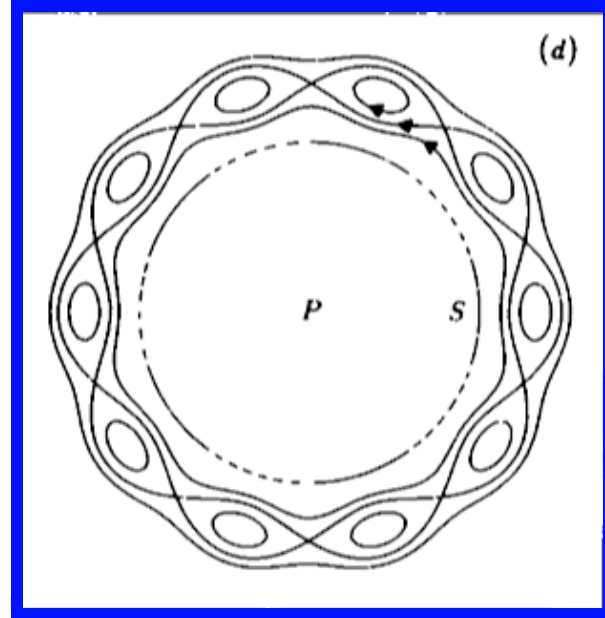
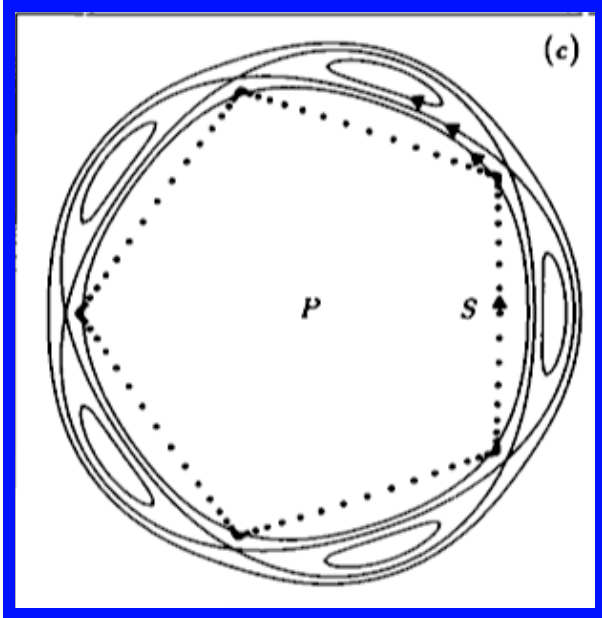
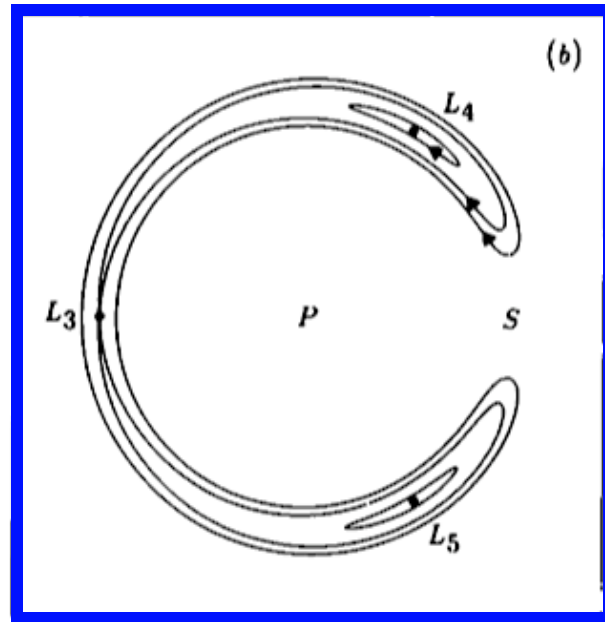
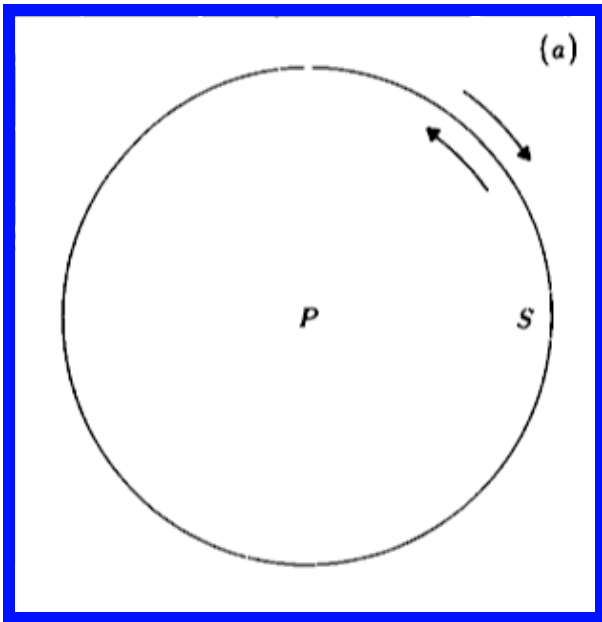


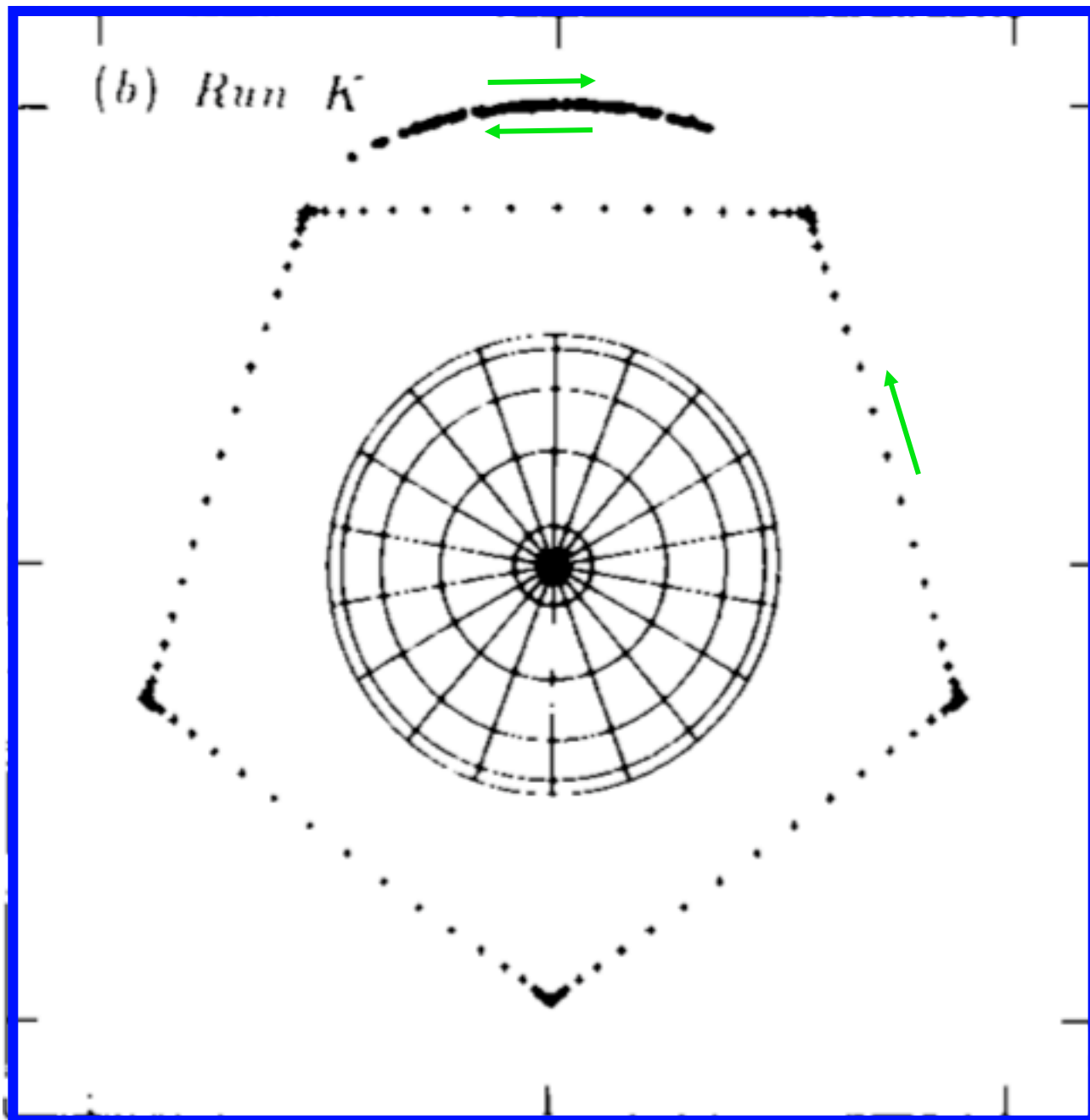


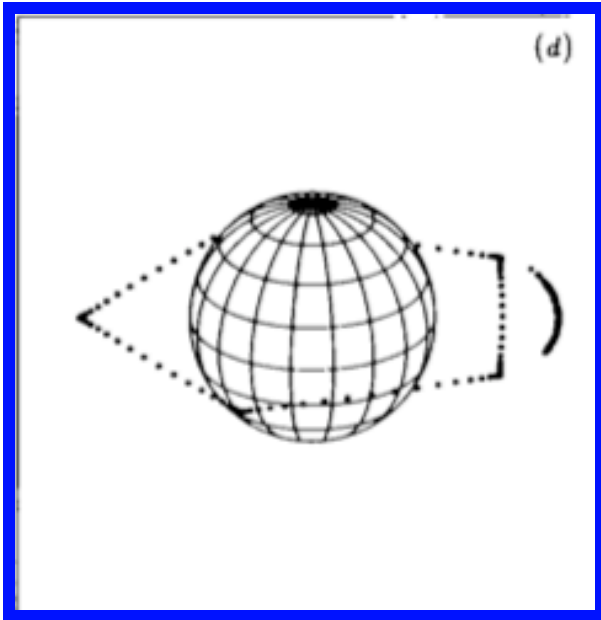
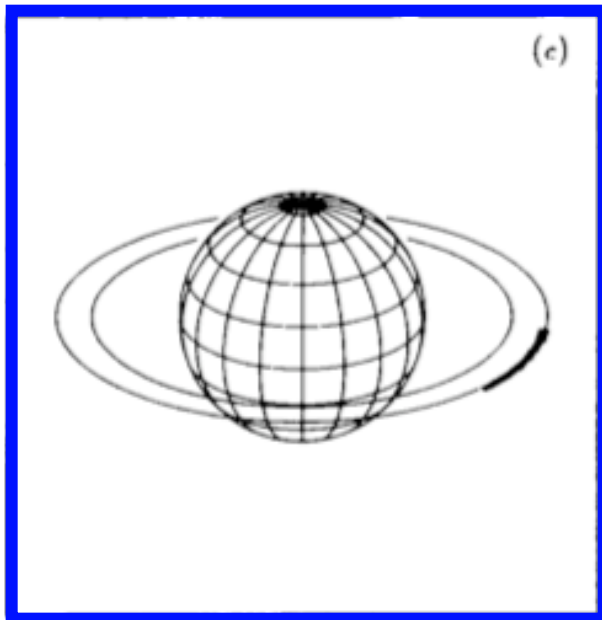
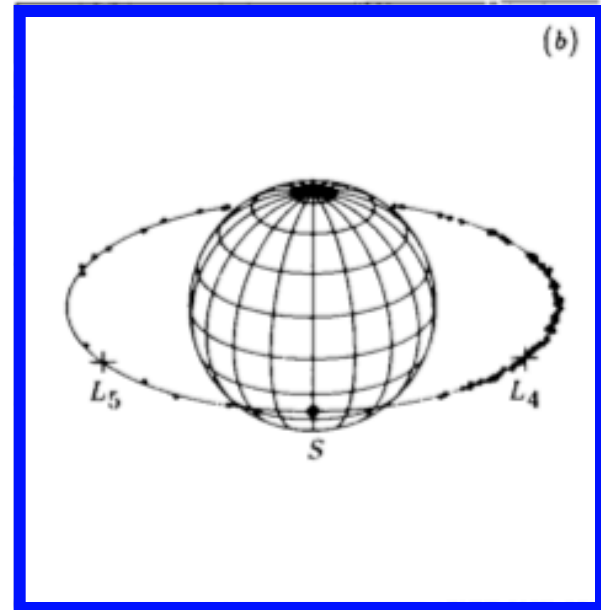
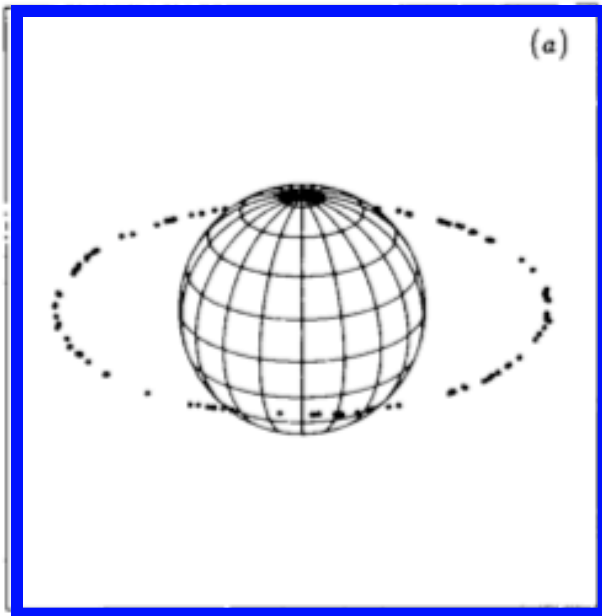
satellite à l'apoapse



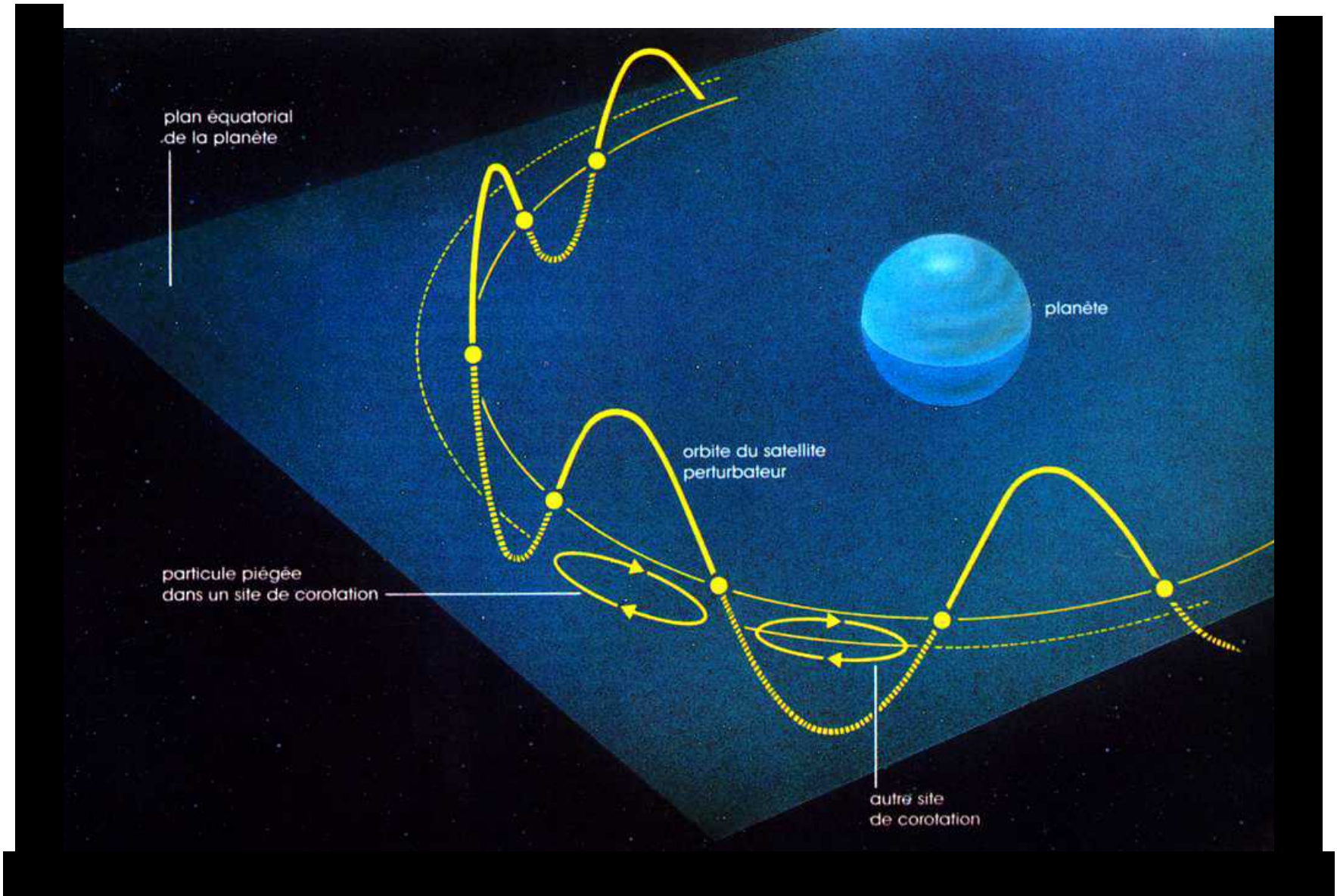
un peu plus tard...
(chaque site se déplace à sa propre vitesse keplerienne)



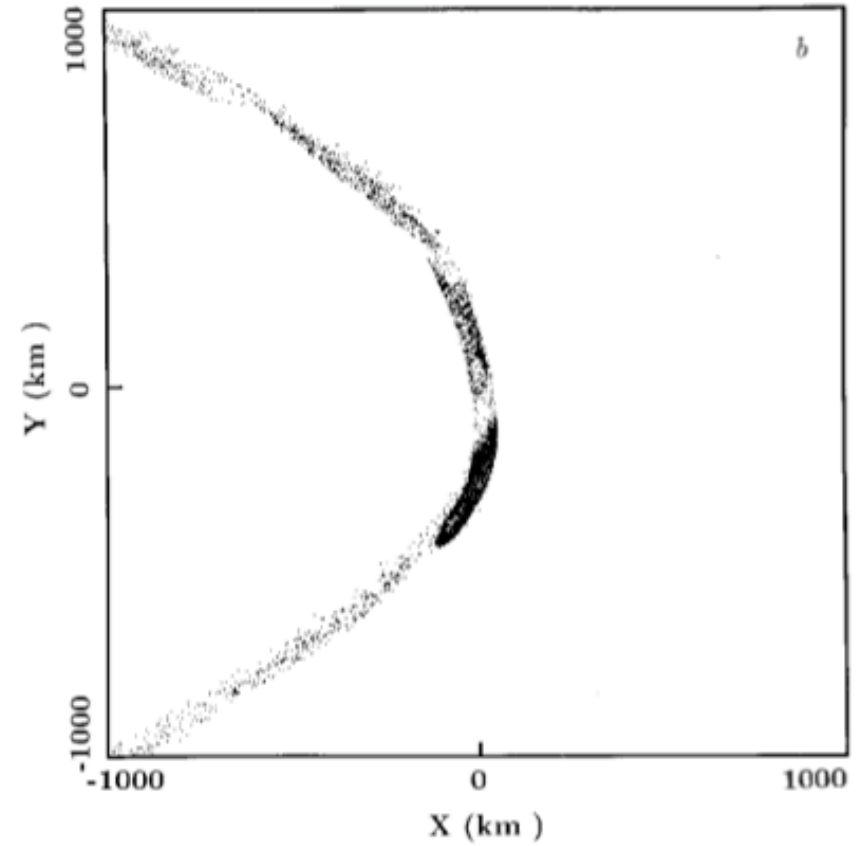
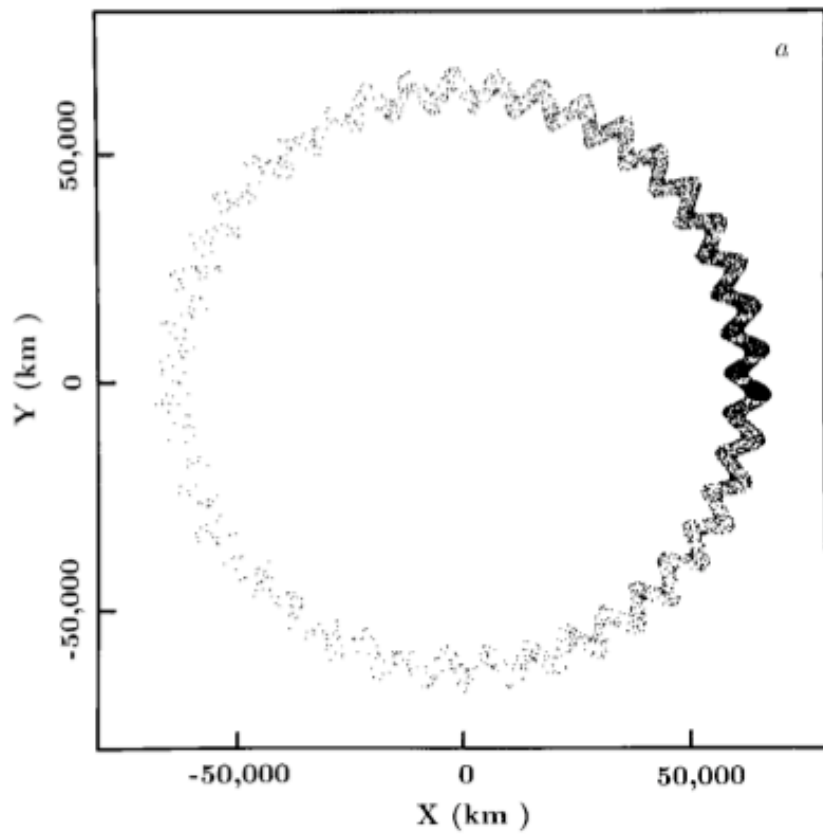




autre exemple de corotation: inclinée 43:42

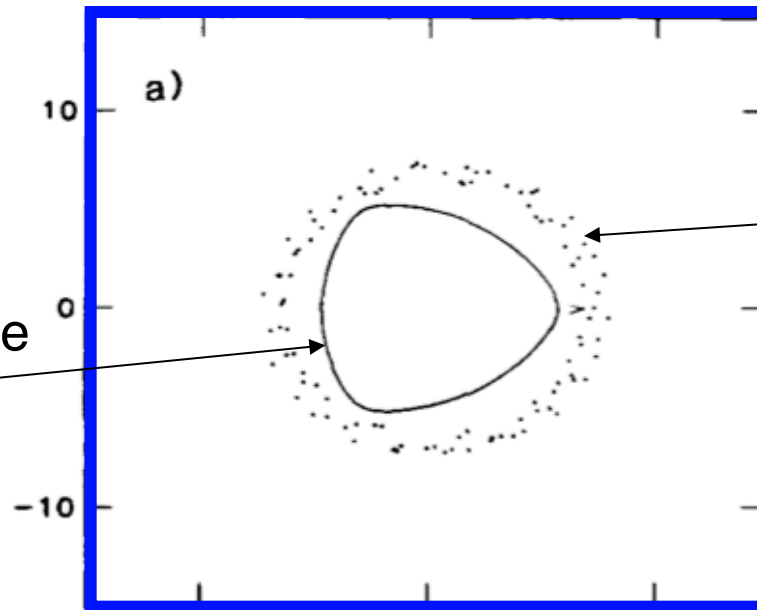




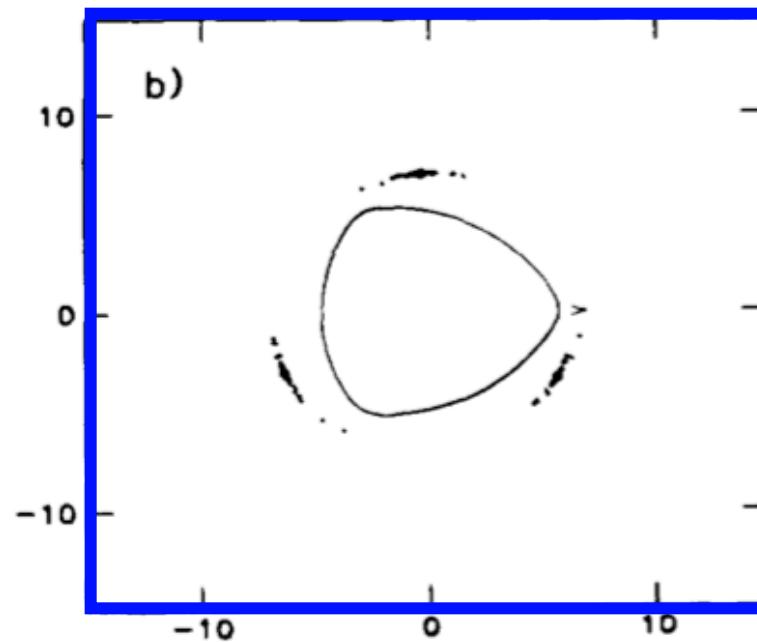


Foryta & Sicardy, *Icarus* **123** 129-167 (1996)

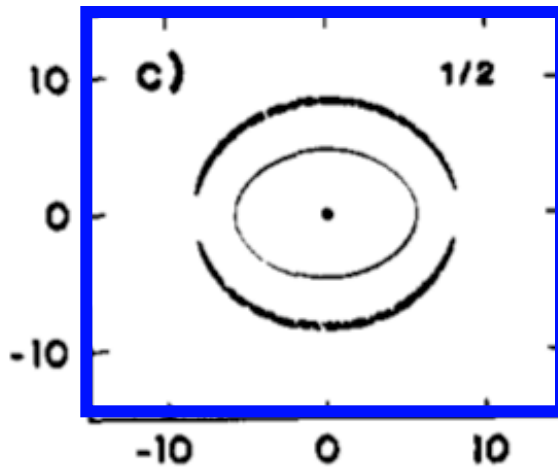
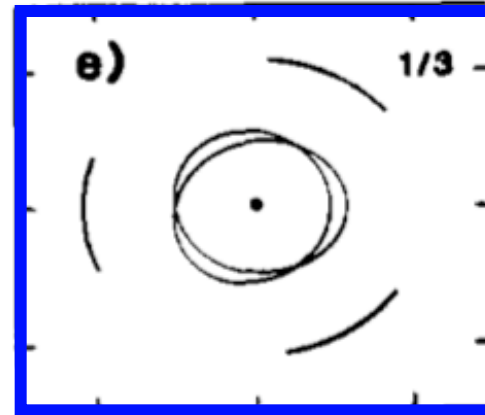
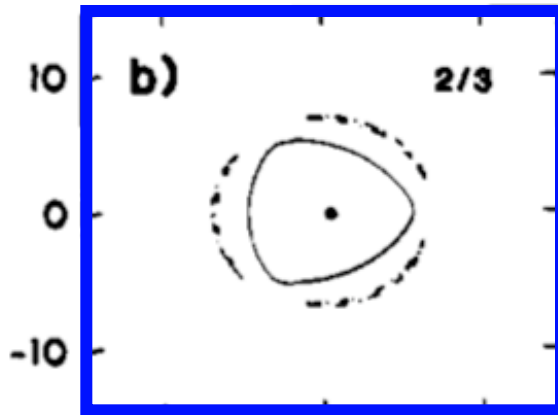
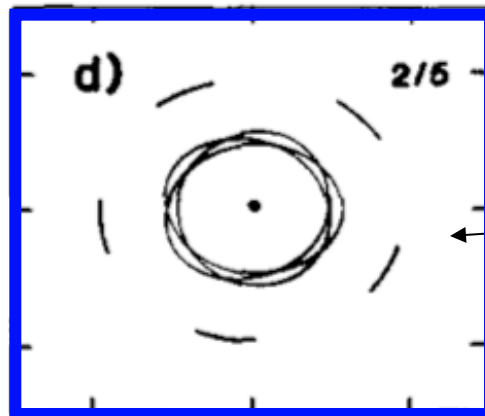
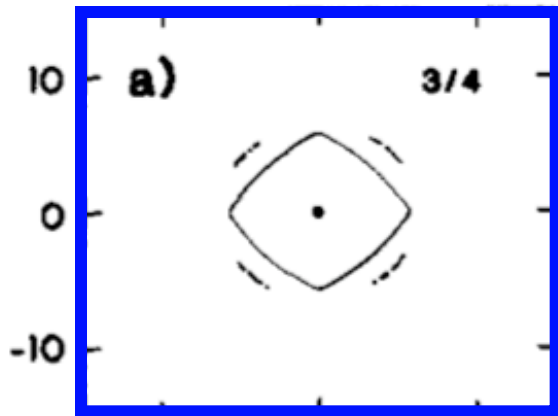
orbite de Jupiter
vue depuis la particule
(corotation 2:3)



particule avec friction
gazeuse (système
solaire primordial)

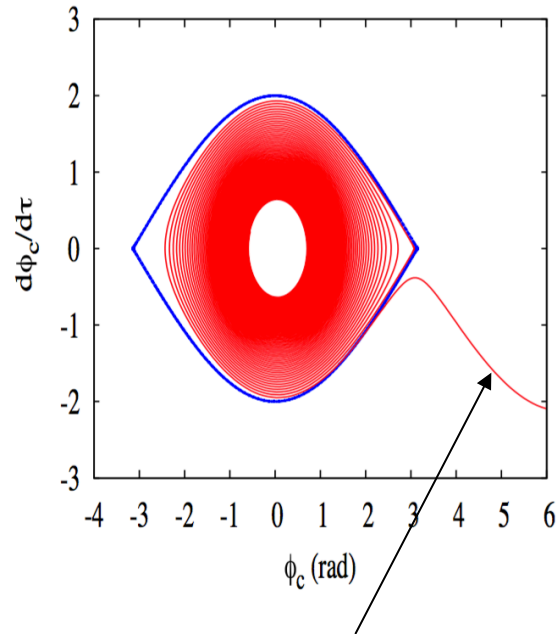


cycle limite

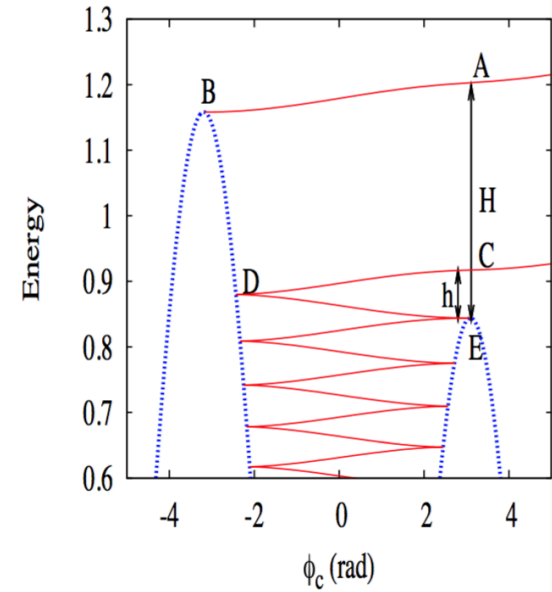
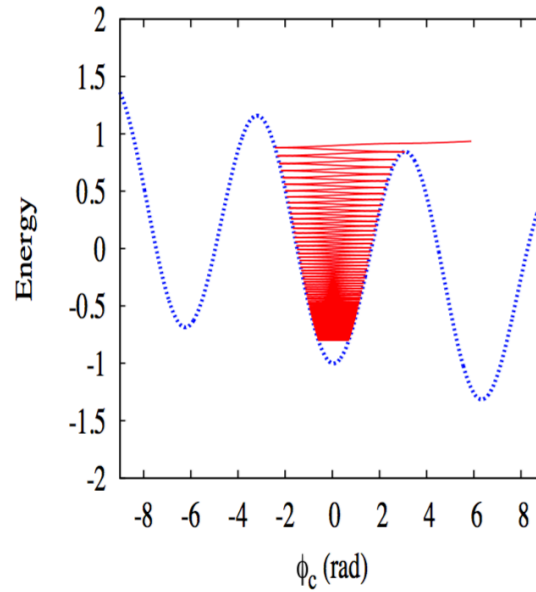


X-AXIS

Problématique de la capture en résonance de corotation



migration orbitale
causée par une friction



El Moutamid, Sicardy et Renner, 2017

$$\text{probabilité} = h/H$$