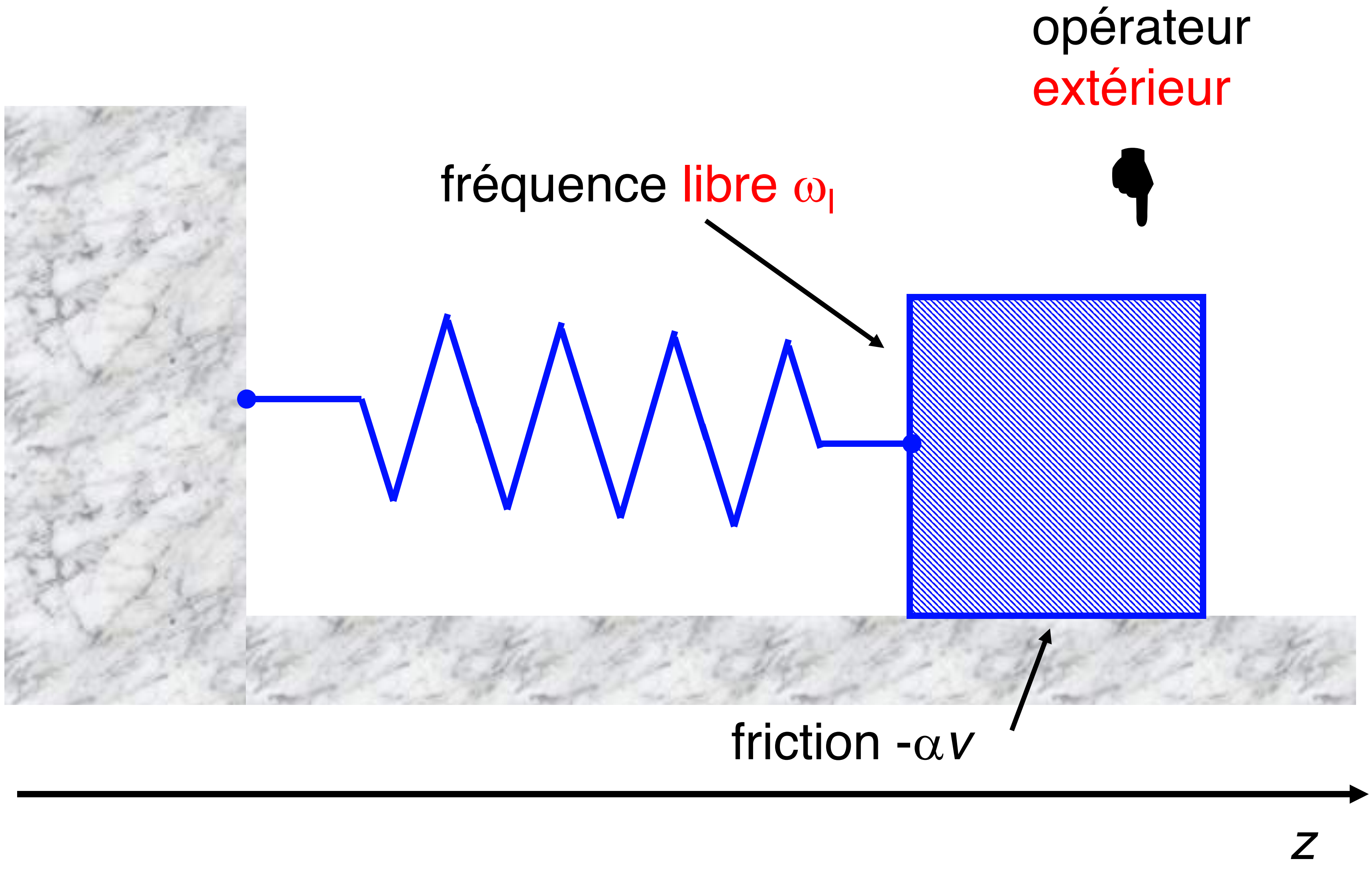
un exemple simple: l'oscillateur harmonique

donne des leçons générales (quoique limitées) l'oscillateur harmonique forcé:



$$\boxed{\ddot{z} = -\omega_l^2 z - \alpha\dot{z} + F\cos(\omega_f t)}$$

force de rappel dissipation forçage

équation du deuxième ordre linéaire avec second membre
solution générale: solution libre (sans second membre)
+ solution particulière (forcée):

$$\boxed{z = z_l + z_f}$$

où…

$$z_l = Z_l \exp[i(\omega_l' t + \phi_l)]$$

$$z_f = Z_f \exp[i(\omega_f t + \phi_f)]$$

(dont on peut prendre les parties réelles…)

partie libre:

$$\omega_l' = i\alpha/2 + \sqrt{\omega_l^2 - \alpha^2/4} \approx i\alpha/2 + \omega_l$$

(pour $\alpha << \omega_l$)

NB la friction introduit une partie imaginaire dans la fréquence partie libre:

$$z_l \approx Z_l \exp(-\alpha t/2) \exp[i(\omega_l t + \phi_l)]$$

Z_l et ϕ_l : donnés par les conditions initiales $z(0)$ et $\dot{z}(0)$

partie forcée:

$$z_f = Z_f \exp[i(\omega_f t + \phi_f)]$$

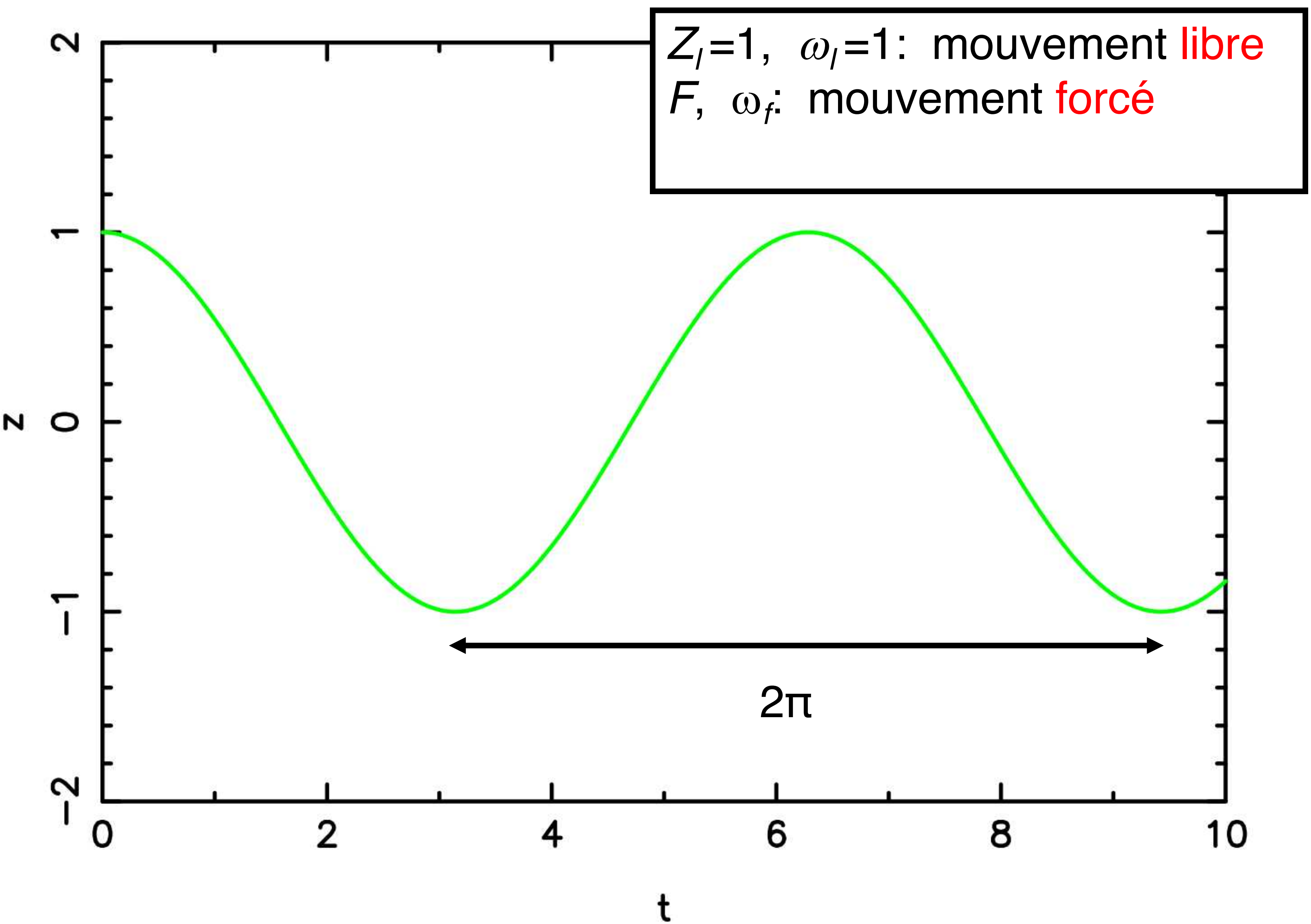
après identification terme à terme….

$$\boxed{\begin{aligned} Z_f &= \frac{F}{\sqrt{(\omega_f^2-\omega_l^2)^2+(\alpha\omega_f)^2}} \\ \tan\phi_f &= \frac{\alpha\omega_f}{\omega_f^2-\omega_l^2} \end{aligned}}$$

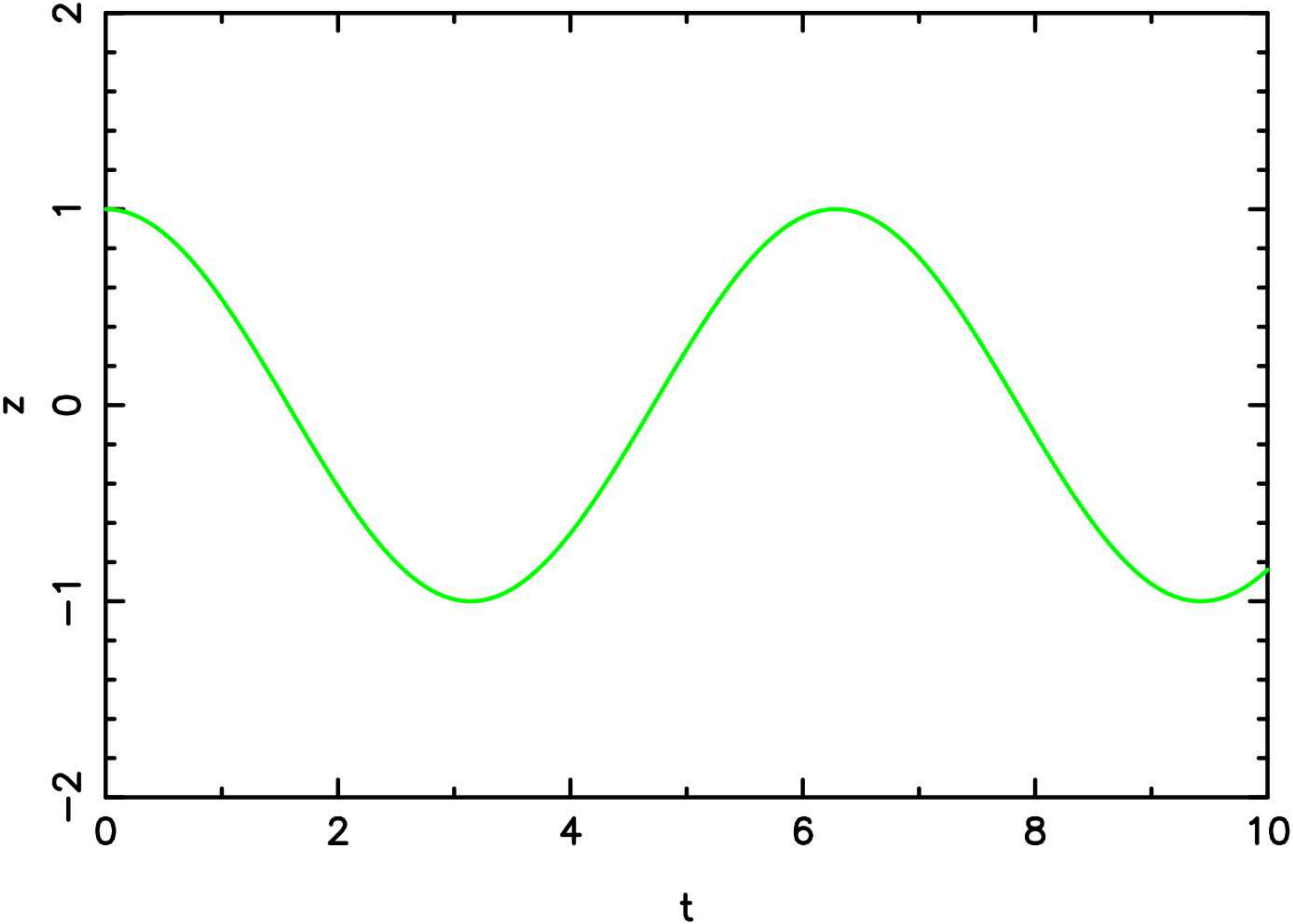
avec:

$$\operatorname{sgn}[\cos(\phi_f)] = \operatorname{sgn}(\omega_f^2-\omega_l^2)$$

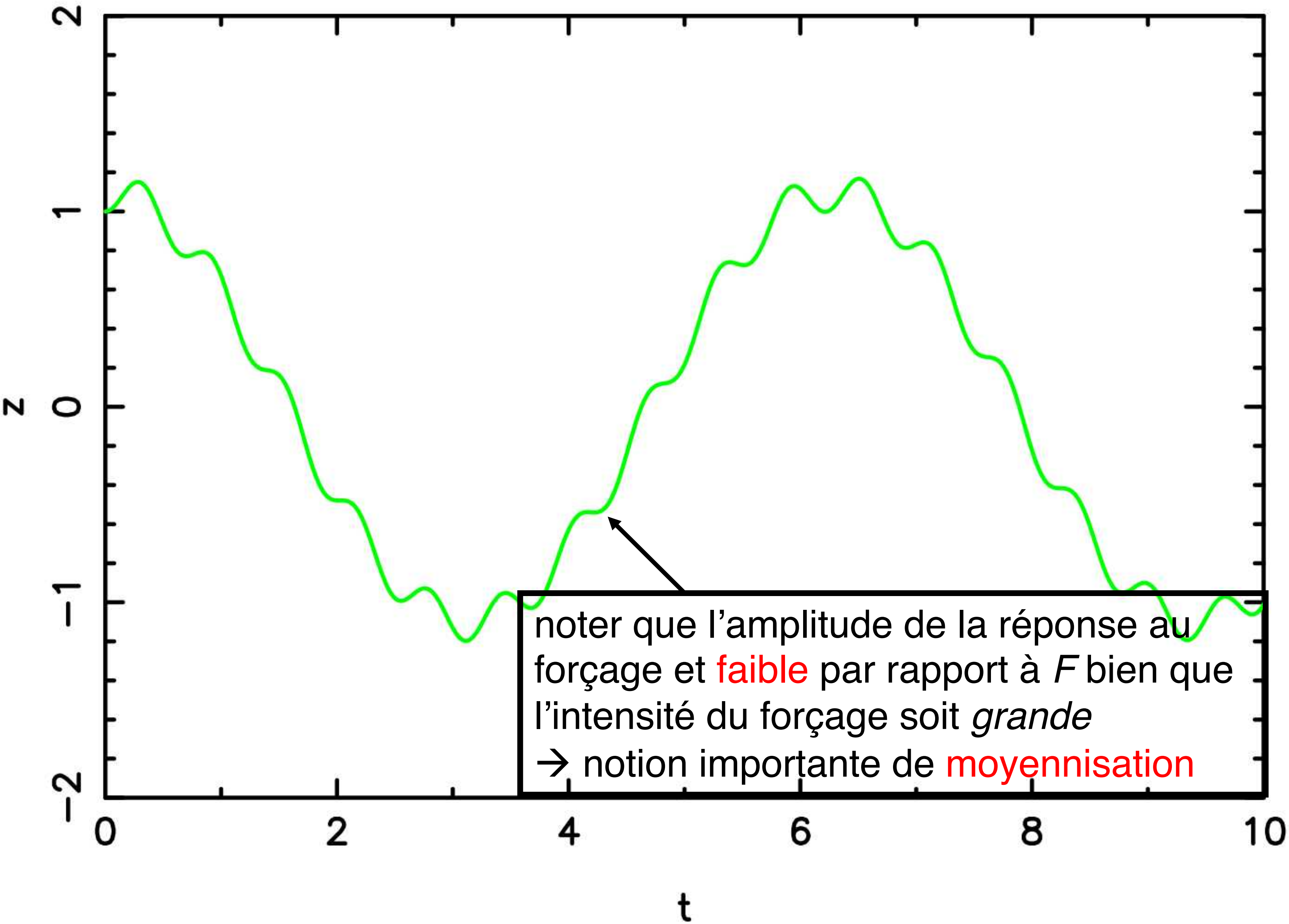
$F = 0 \quad \omega_f = 10.1$



$F = 0 \quad \omega_f = 10.1$



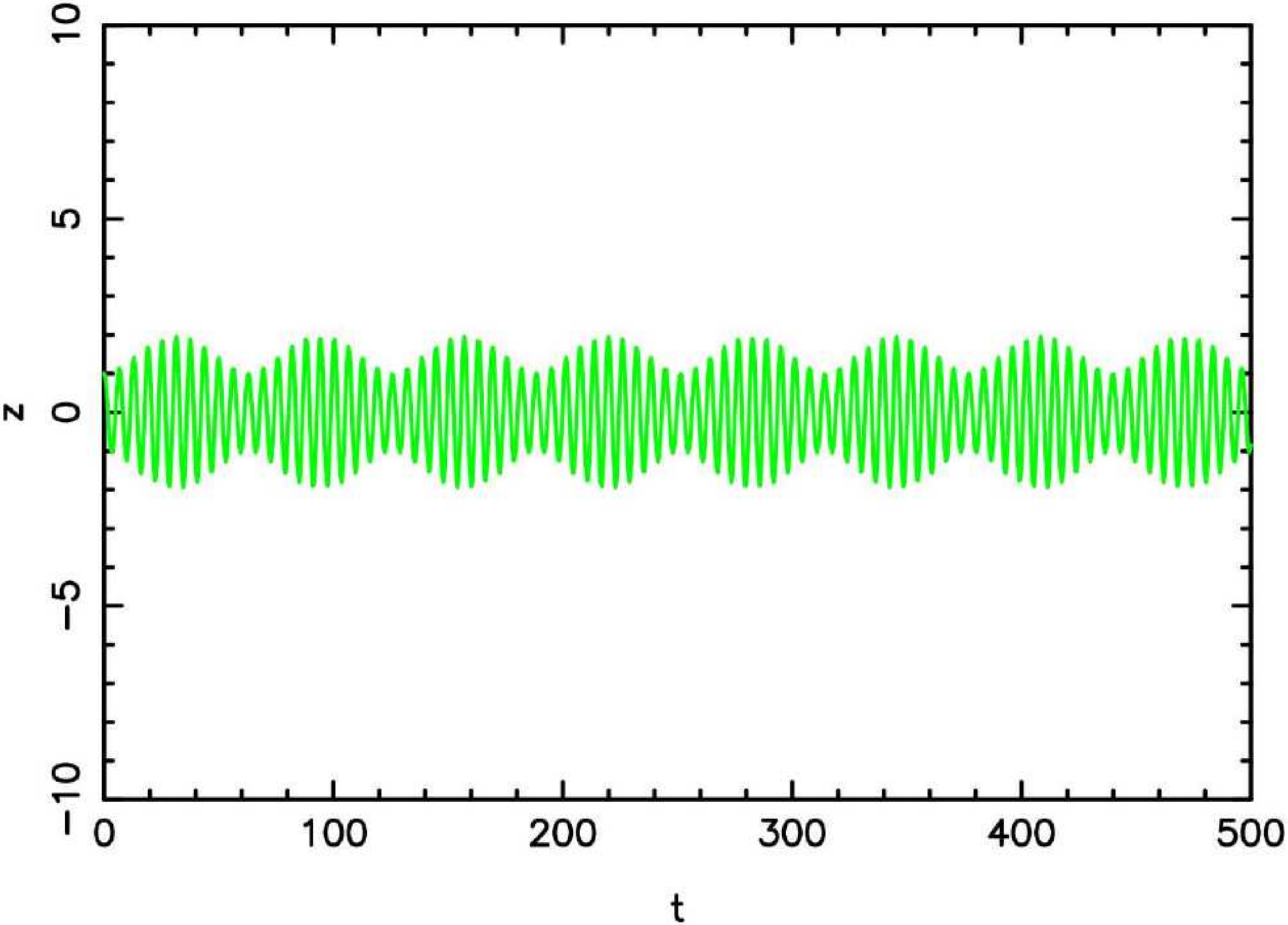
$F = 10 \quad \omega_f = 10.1$



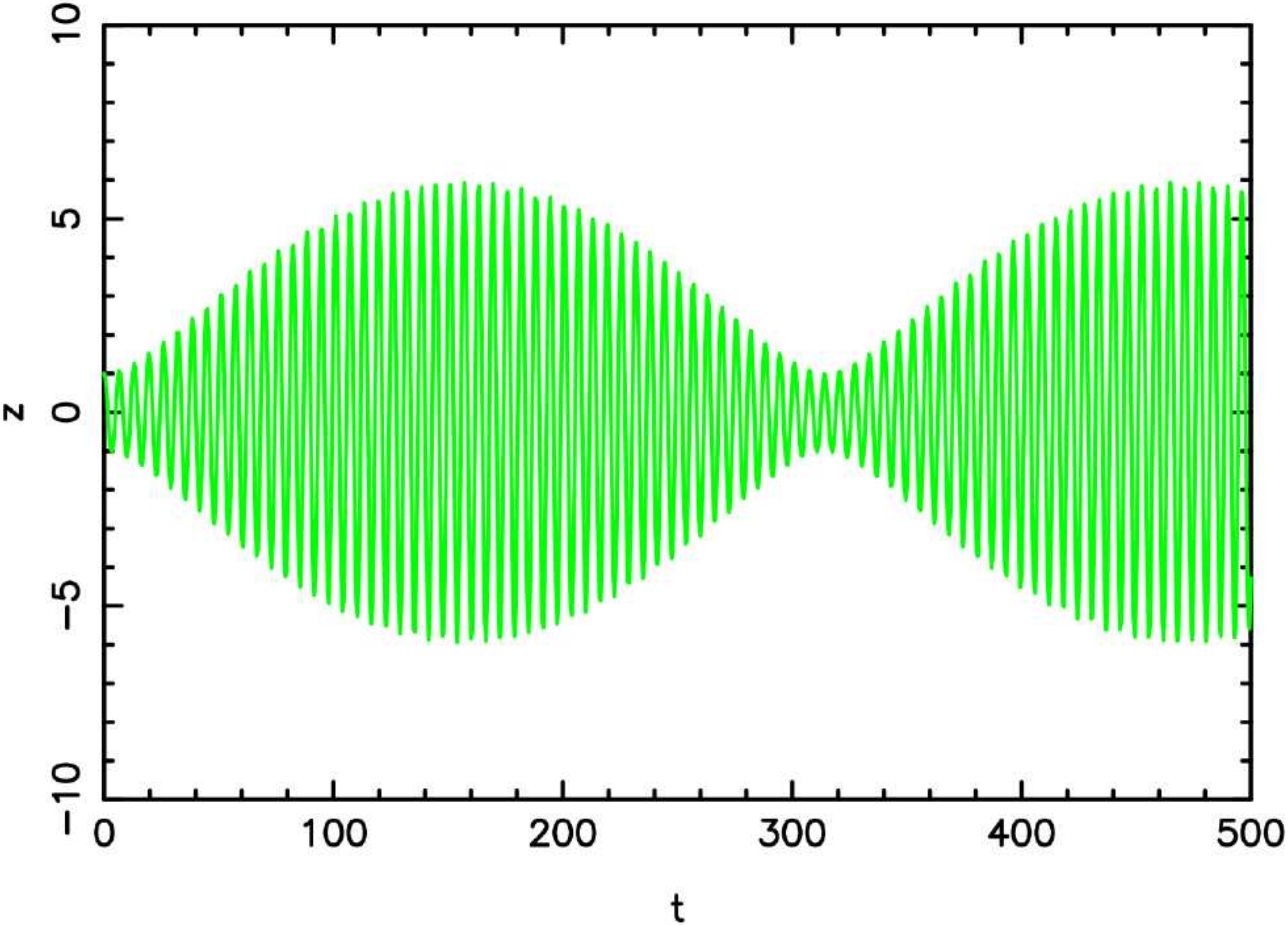
noter que l'amplitude de la réponse au forçage et faible par rapport à F bien que l'intensité du forçage soit *grande*

→ notion importante de moyennisation

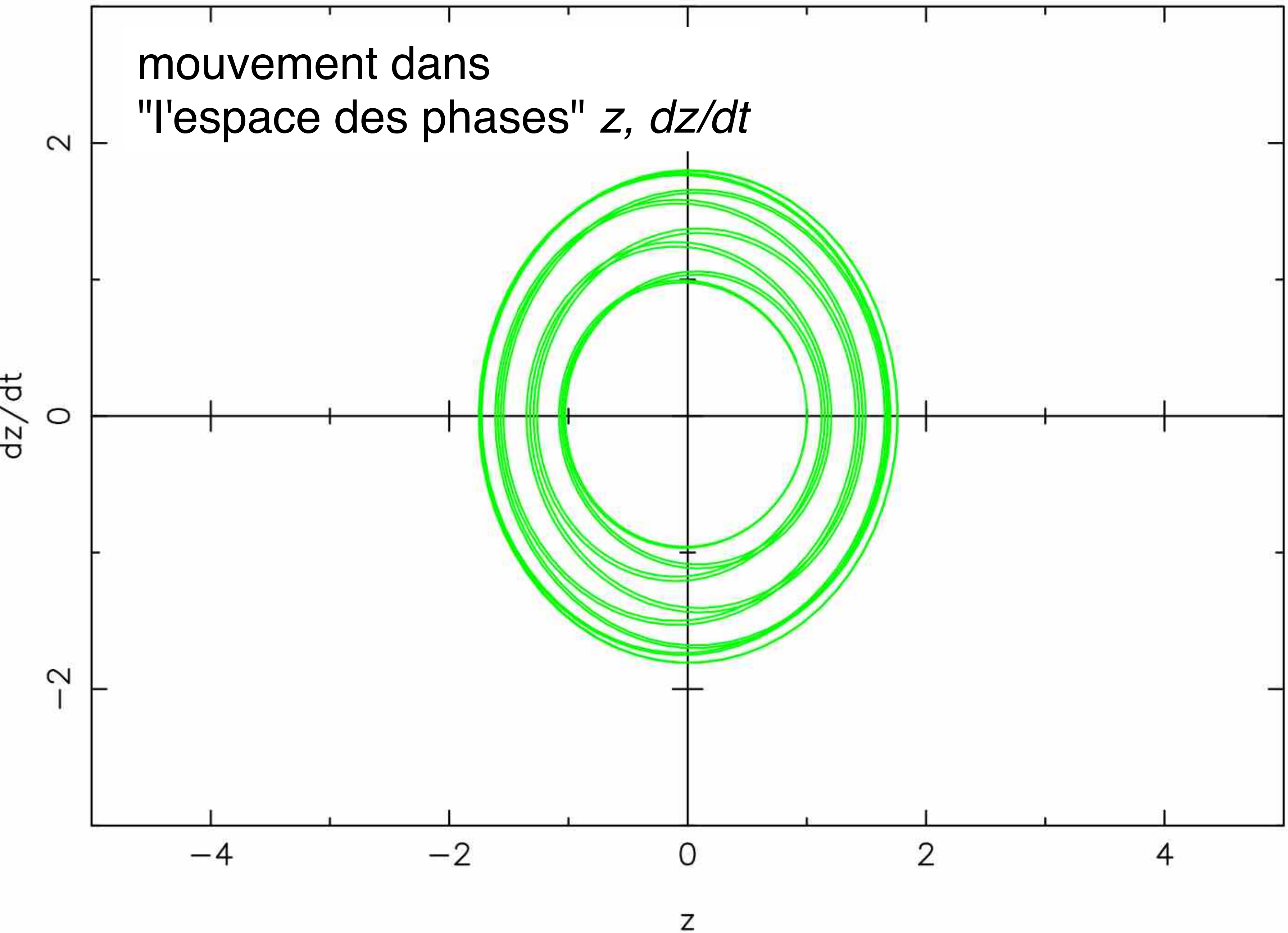
$F = 0.1 \quad \omega_f = 1.1$



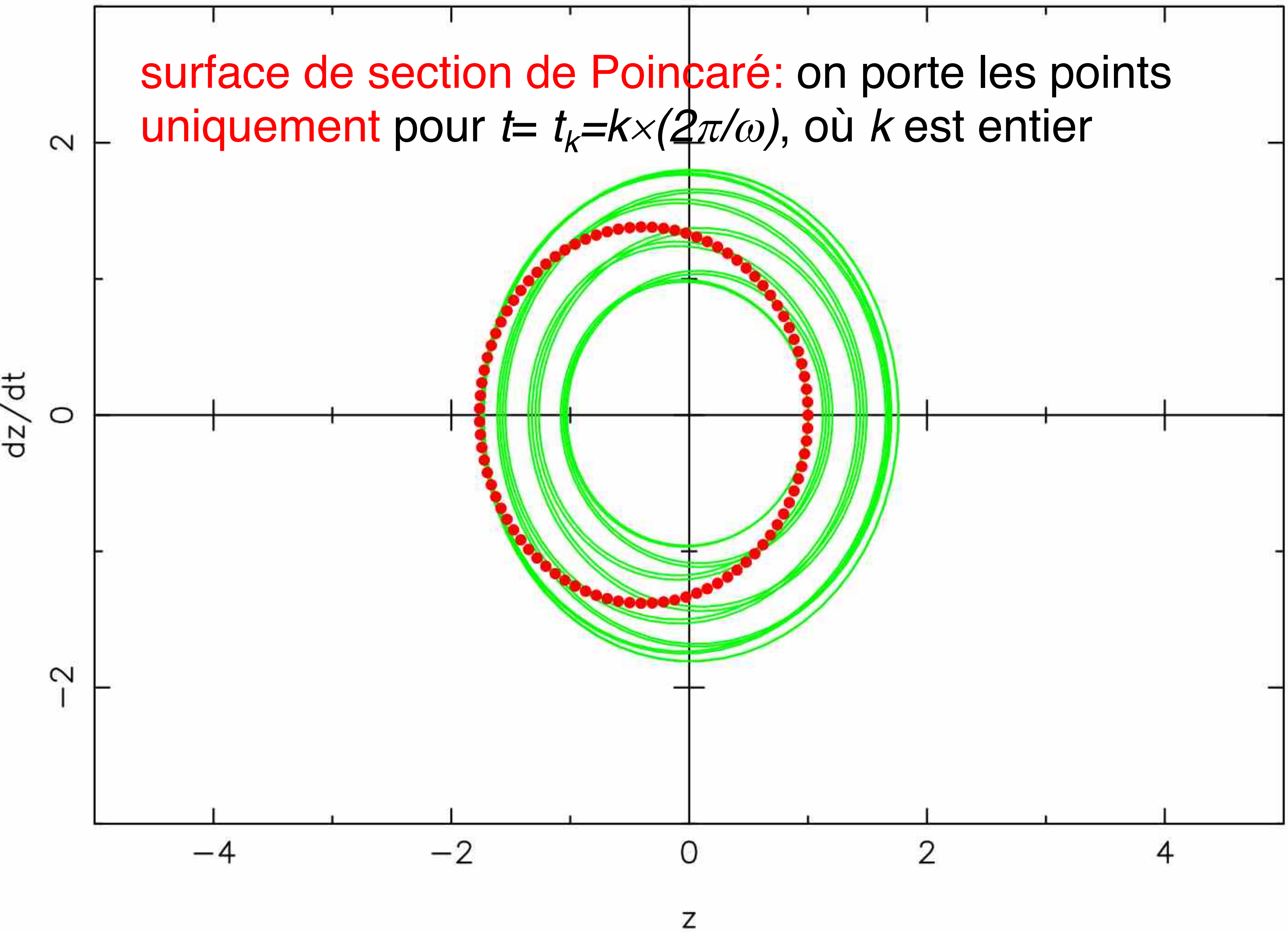
$F = 0.1 \quad \omega_f = 1.02$



$F = 0.1 \quad \omega_f = 1.123456789$



$F = 0.1 \quad \omega_f = 1.123456789$



posons: $$X = (z, \dot{z})$$

alors: $$\dot{X} = F(z, \dot{z}, t)$$

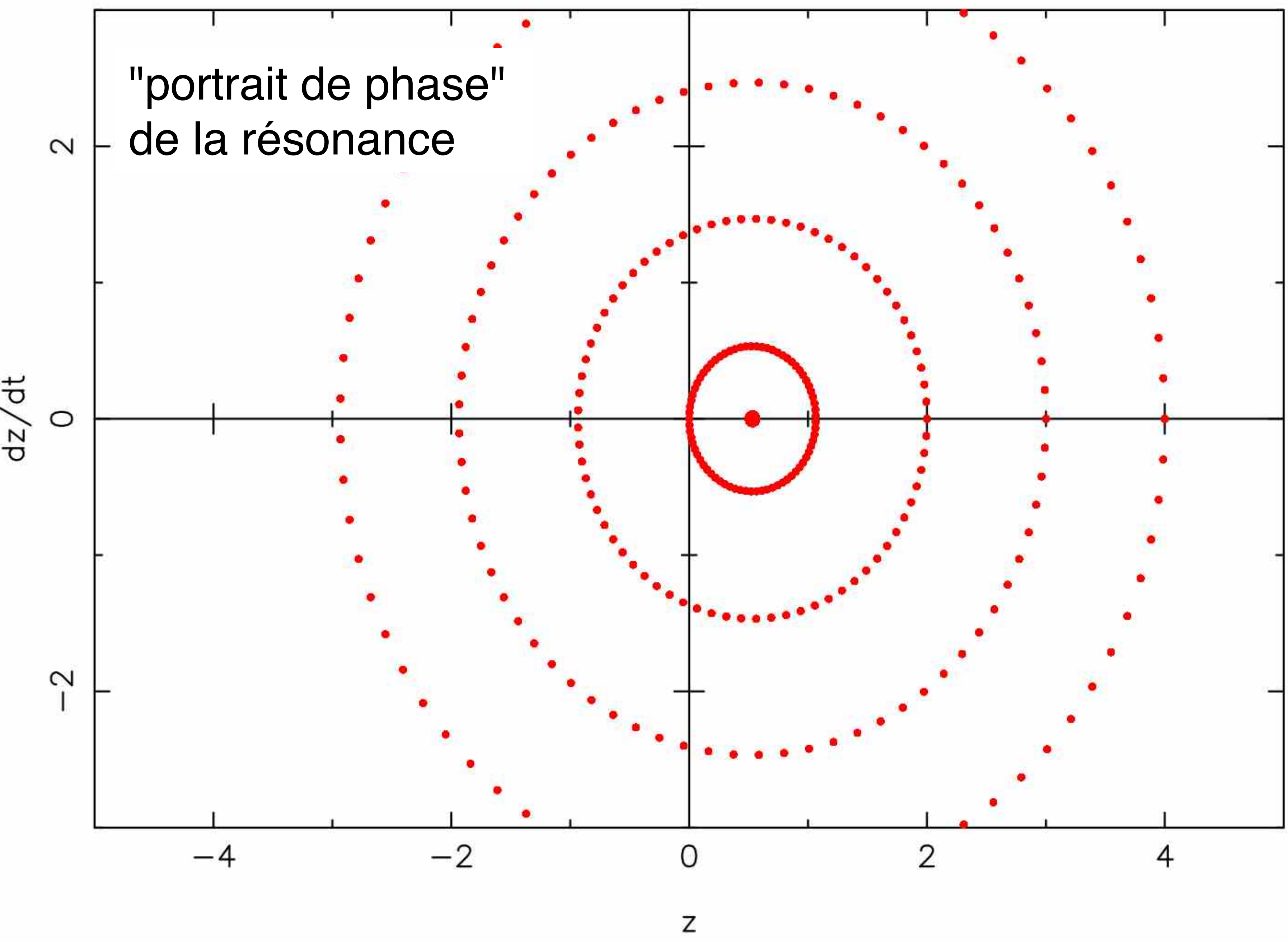
si *F* est *T*-périodique ainsi que *X(t+T)= X(t),* alors

$$\dot{X}(t+T) = F[X(t+T), t+T] = \dot{X}(t)$$

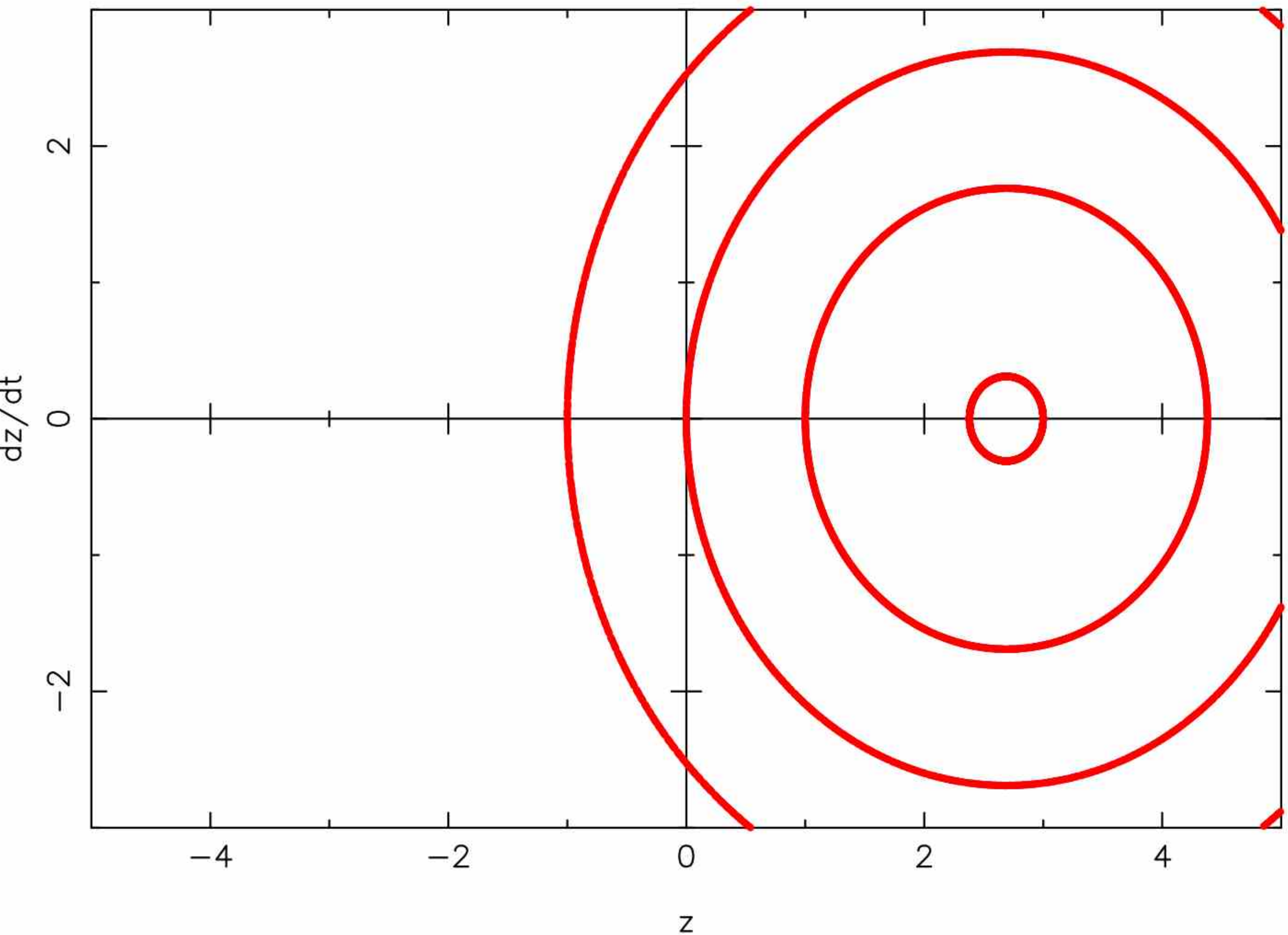
→ La fonction *X* a la même valeur
et la même dérivée à *t* et *t+T*

→elle est *T*-périodique (via le théorème de Cauchy-Peano-Arzelà)

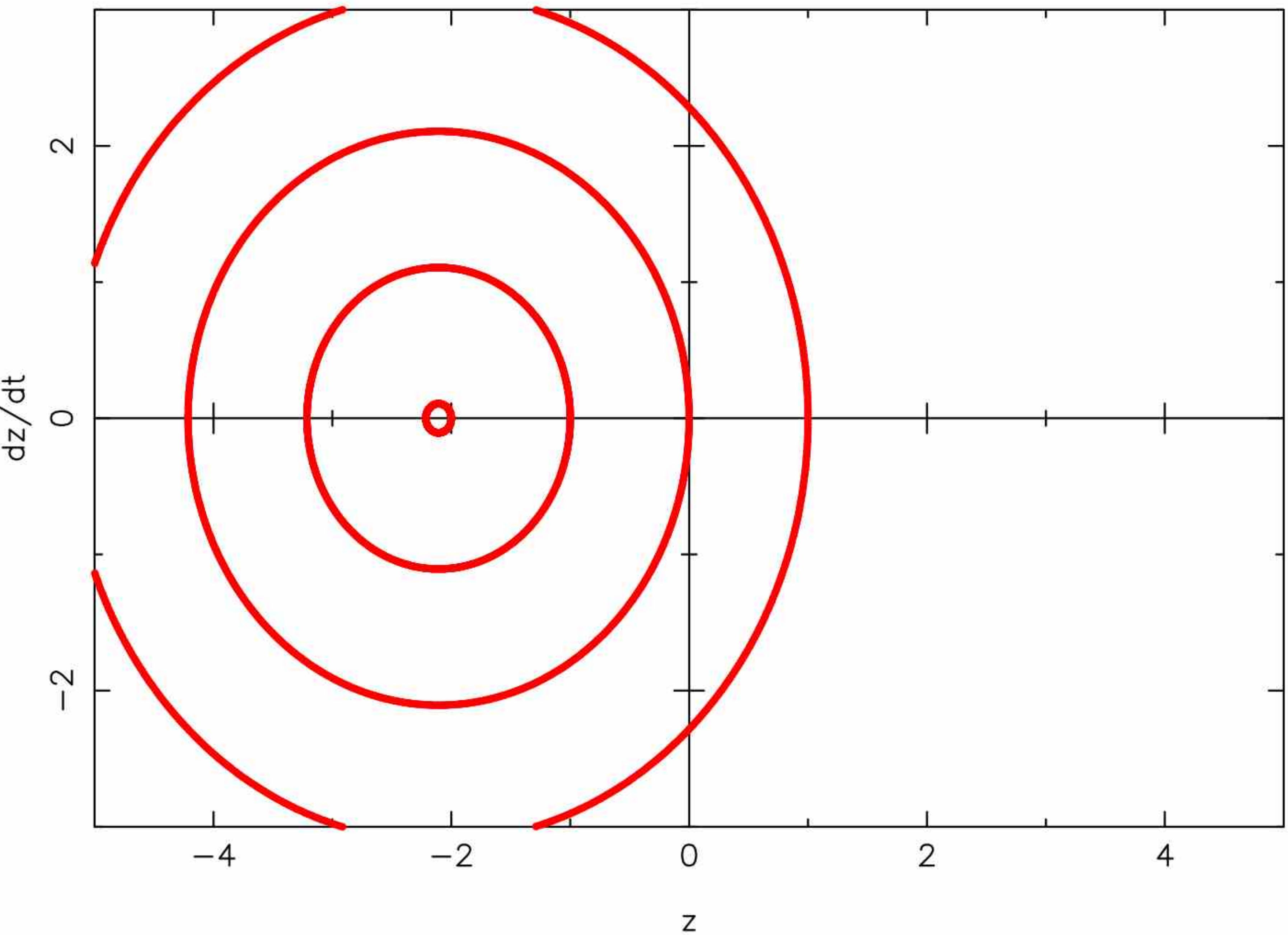
$F = 0.1 \quad \omega_f = 0.90123456789$



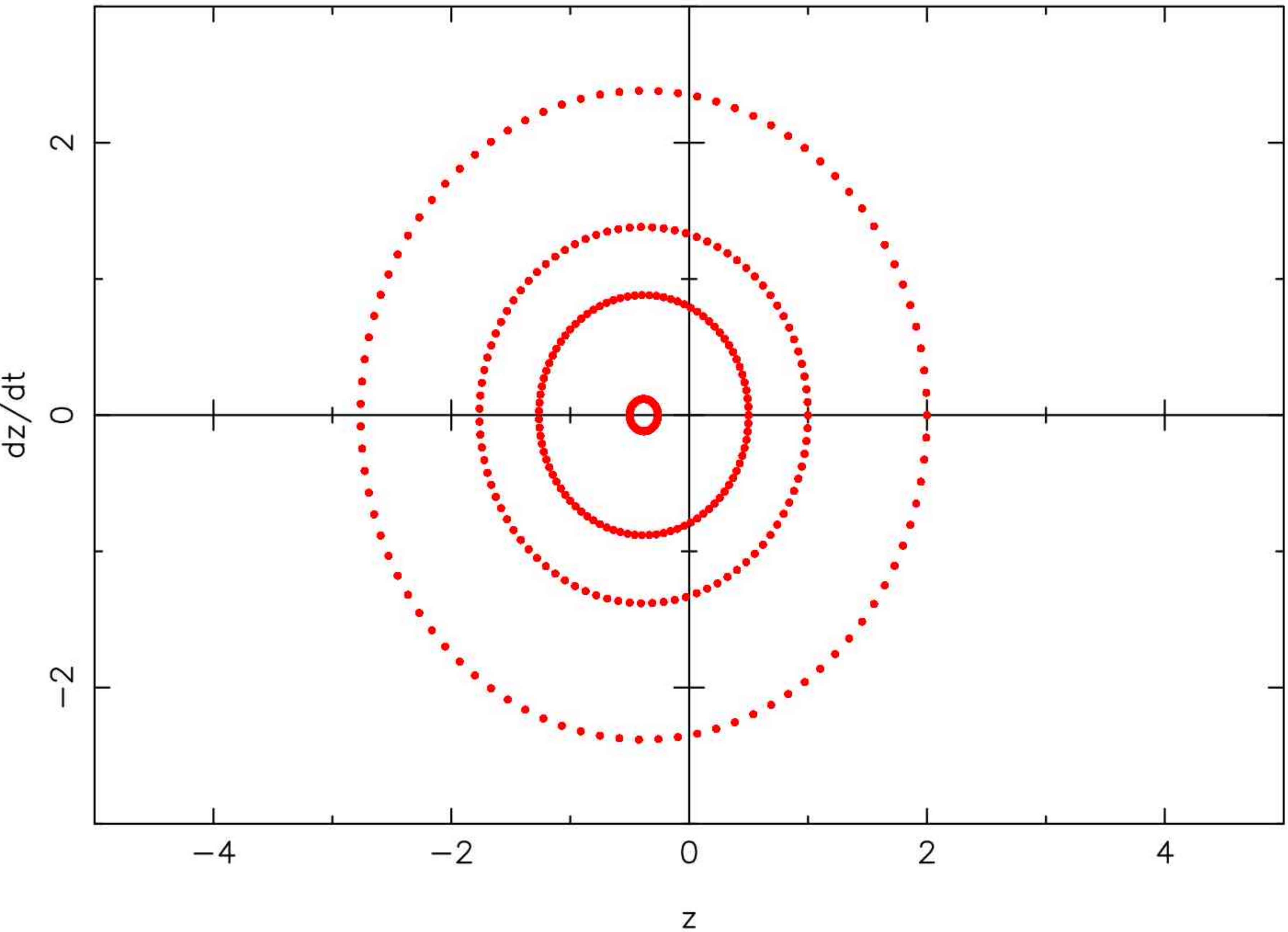
$F = 0.1 \quad \omega_f = 0.98123456789$



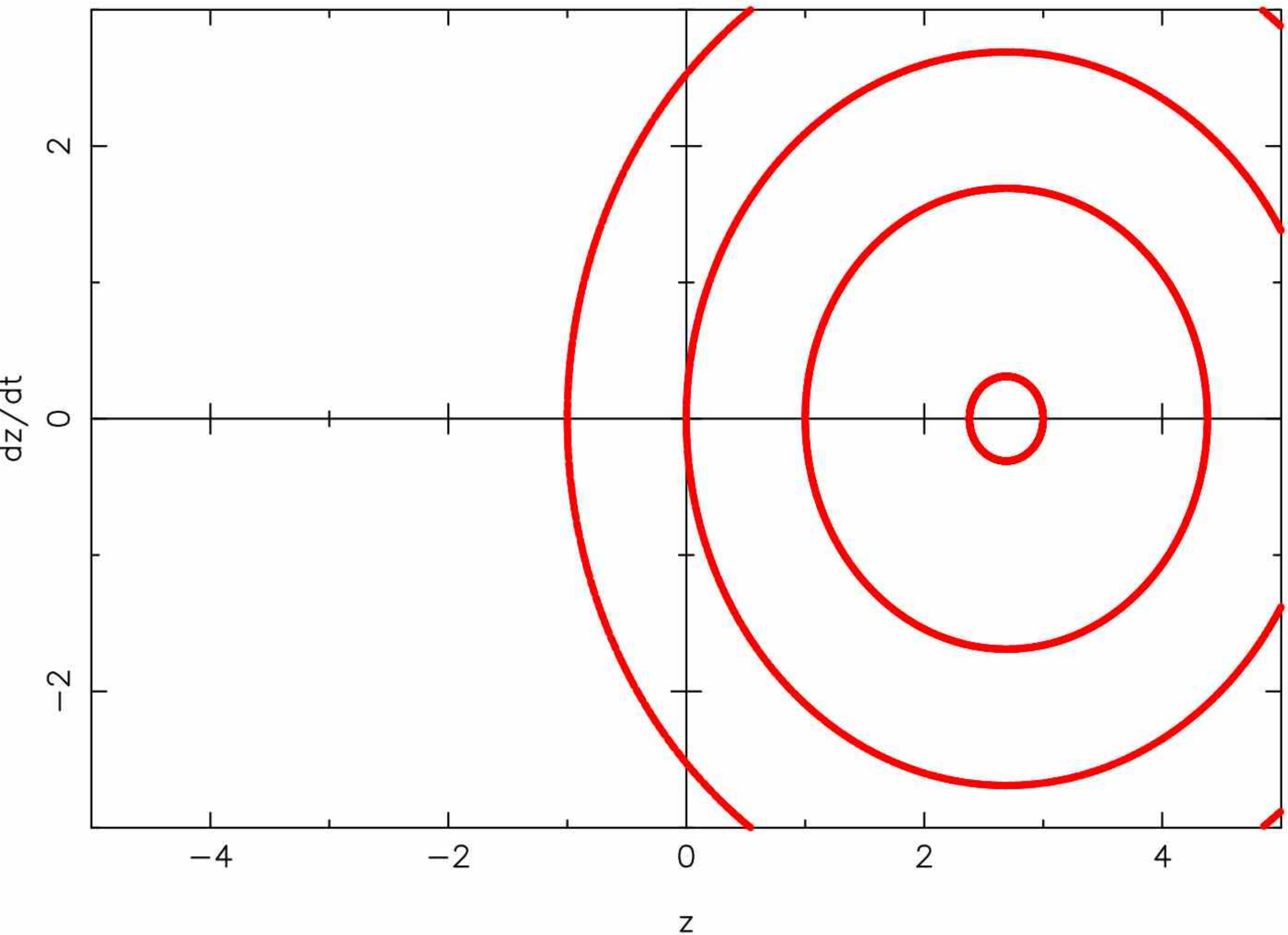
$F = 0.1 \quad \omega_f = 1.023456789$

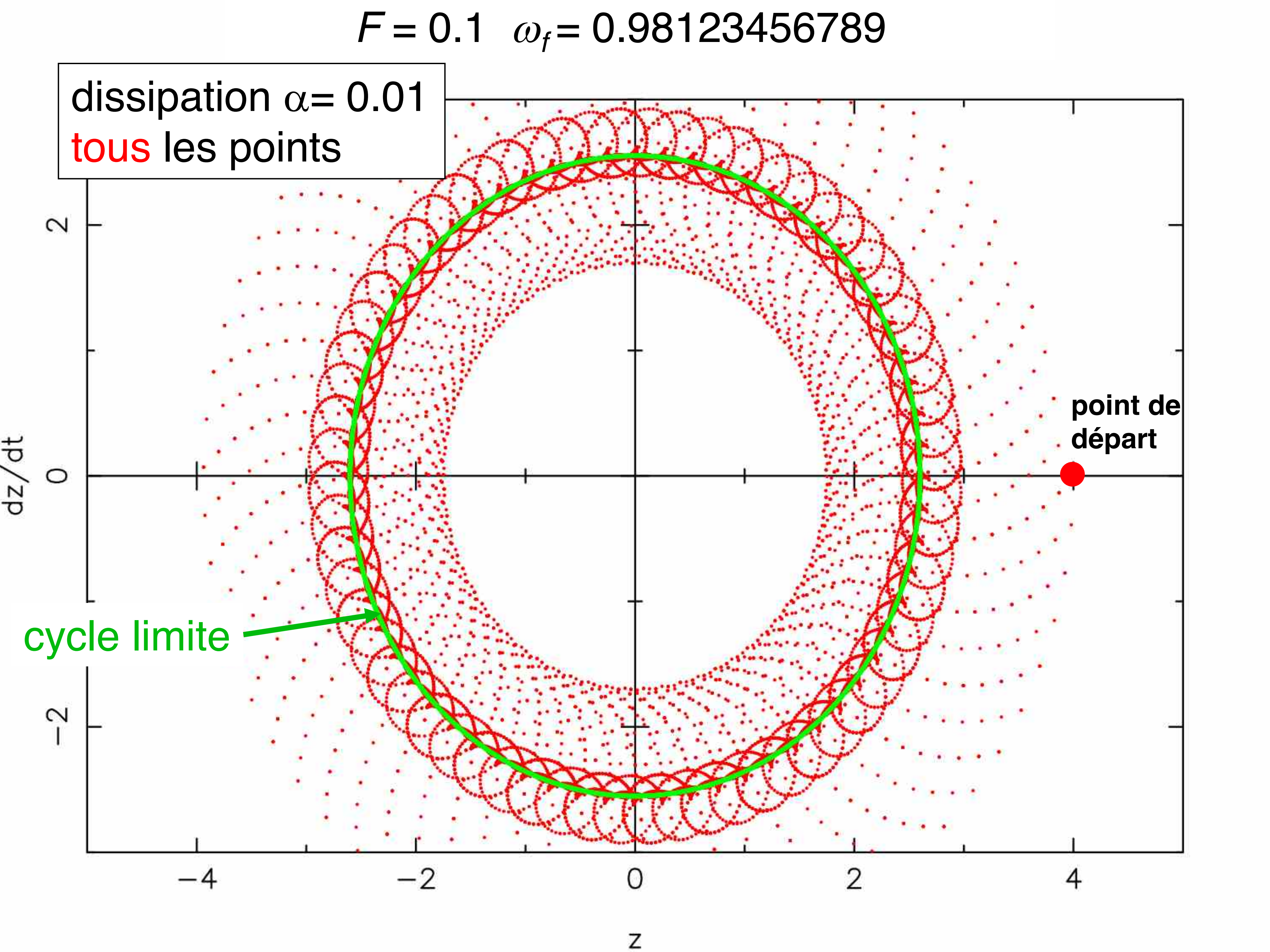


$F = 0.1 \quad \omega_f = 1.123456789$



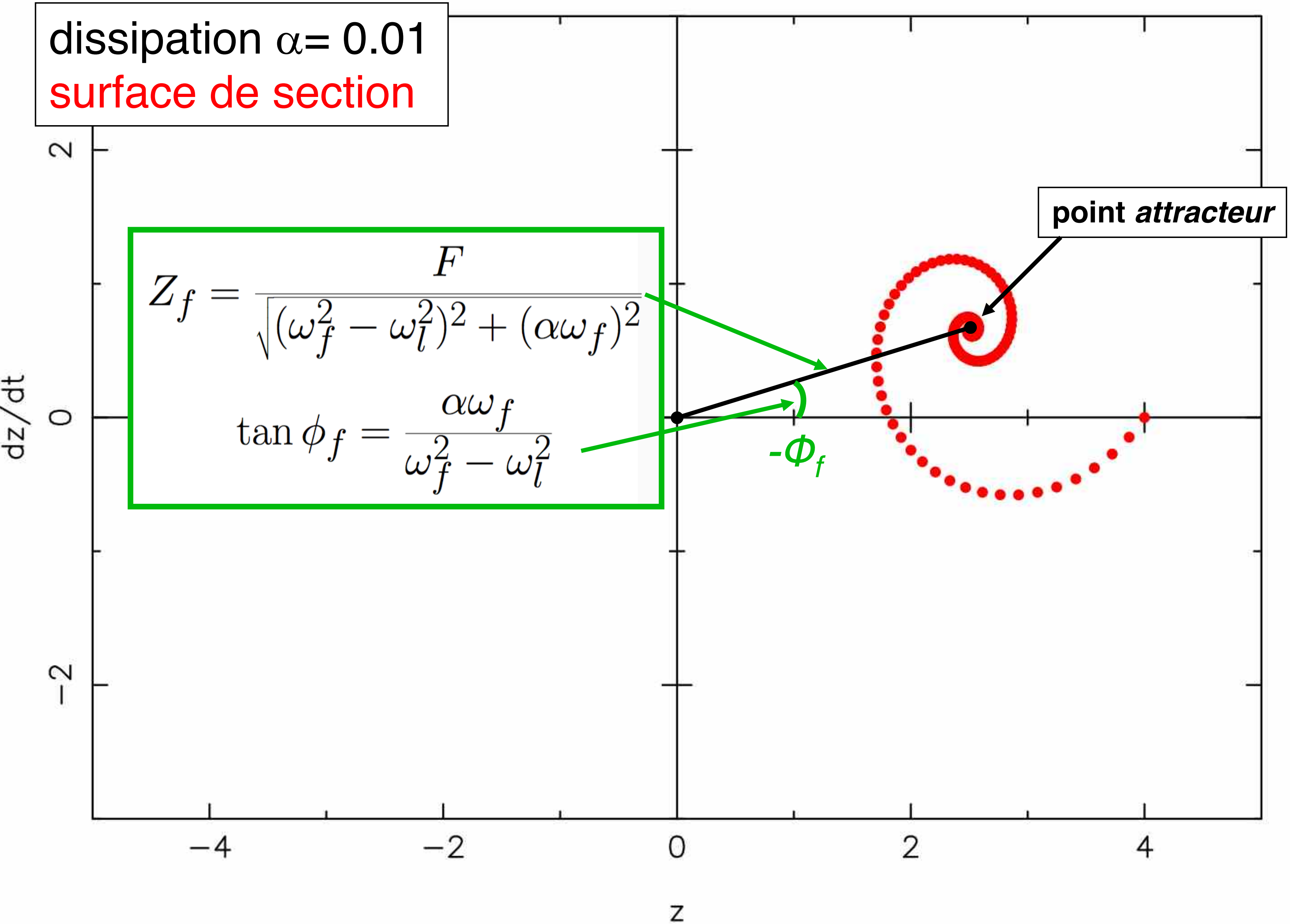
$F = 0.1 \quad \omega_f = 0.98123456789$





$F = 0.1 \quad \omega_f = 0.98123456789$
dissipation α= 0.01
tous les points
point de départ
cycle limite
dz/dt
z
2
0
−2
−4
−2
0
2
4

$F = 0.1 \quad \omega_f = 0.98123456789$



Ainsi: la dissipation ne laisse survivre que la partie forcée de la solution:

$$z_f \approx Z_f \exp[i(\omega_f t + \phi_f)]$$

en résumé:

quelques propriétés génériques des systèmes résonants
on suppose α = 0 (système conservatif), alors:

$$z(t) =$$

$$z_l = Z_l \exp[i(\omega_l' t + \phi_l)] \longrightarrow \text{partie libre}$$

$$+$$

$$z_f = Z_f \exp[i(\omega_f t + \phi_f)] \longrightarrow \text{partie forcée}$$

(où $\Phi_f = 0$ ou π)

en considérant la solution dans la surface de section correspondant à $t = 2k\pi/\omega_f$

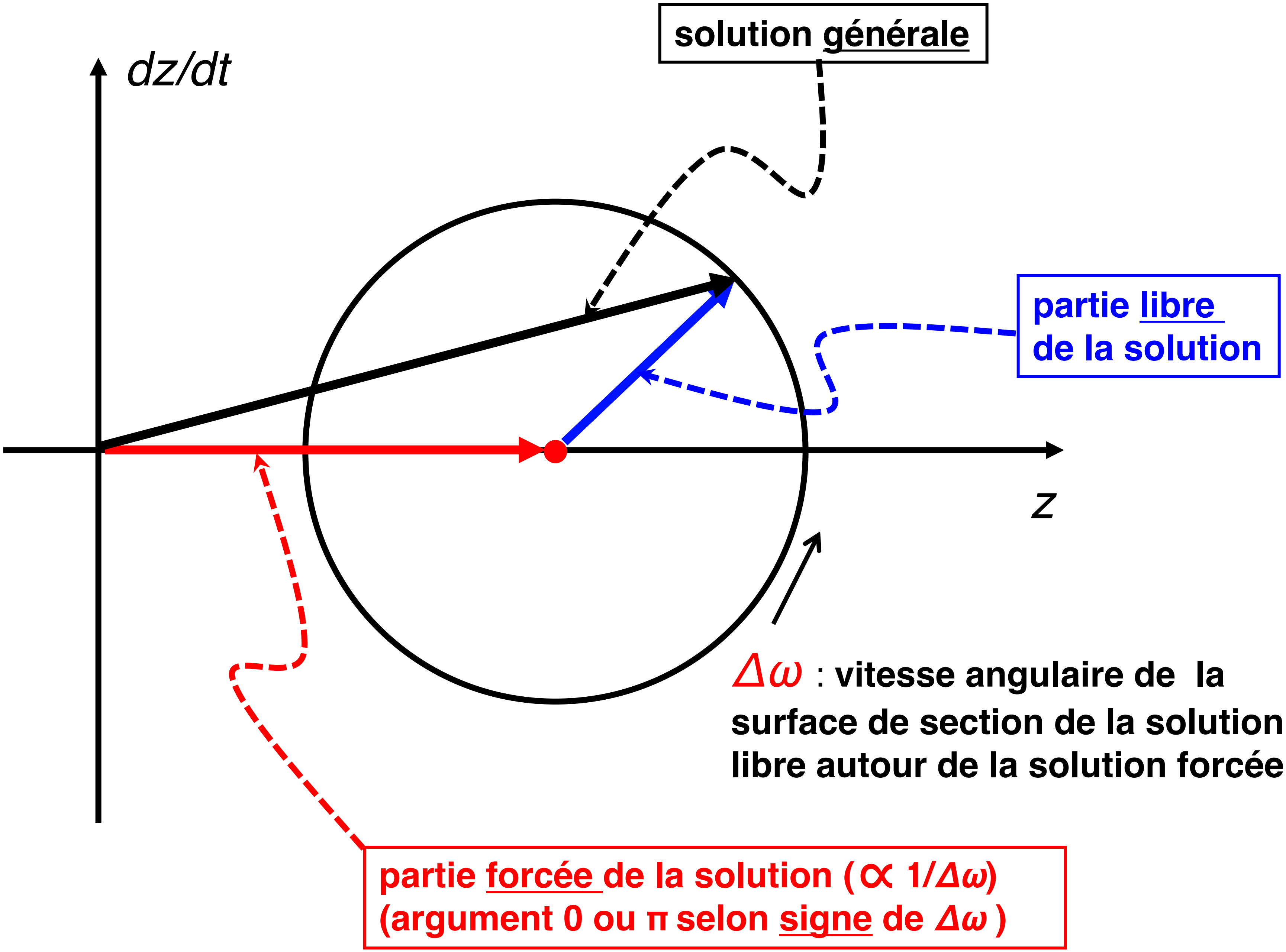
posons: $\Delta\omega = \omega_l - \omega_f$

la “distance” à la résonance
(dans le domaines des fréquence)

alors pendant l’intervalle de temps $T = 2\pi/\omega_f$
l’argument de z_l a tourné de

$$2\pi\omega_l/\omega_f = 2\pi(\omega_f + \Delta\omega)/\omega_f = 2\pi\Delta\omega/\omega_f \ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

soit une vitesse angulaire $[2\pi\Delta\omega/\omega_f]/T = \Delta\omega$

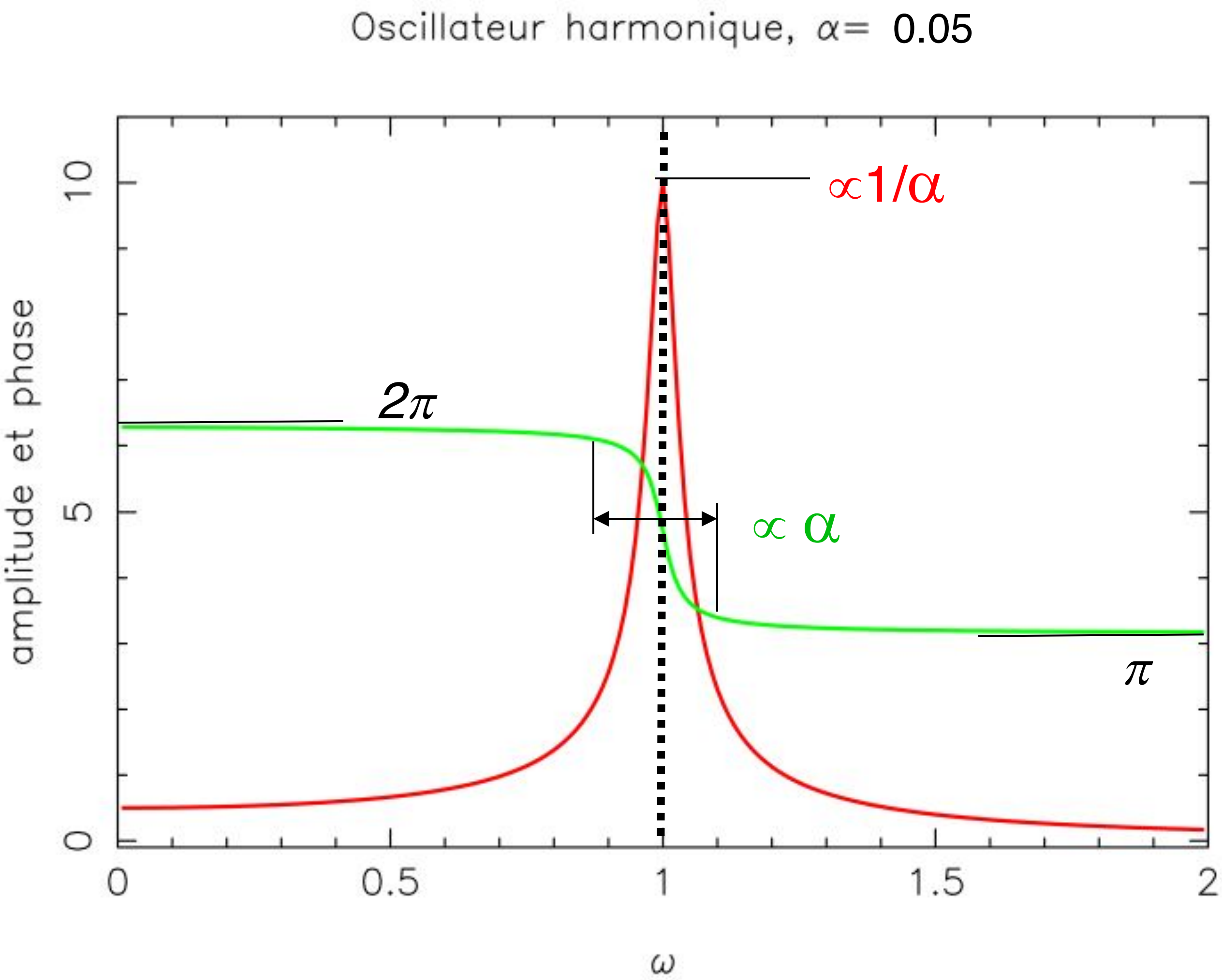

solution générale
dz/dt
partie libre
de la solution
z
Δω : vitesse angulaire de la
surface de section de la solution
libre autour de la solution forcée
partie forcée de la solution (∝ 1/Δω)
(argument 0 ou π selon signe de Δω)

en résumé:

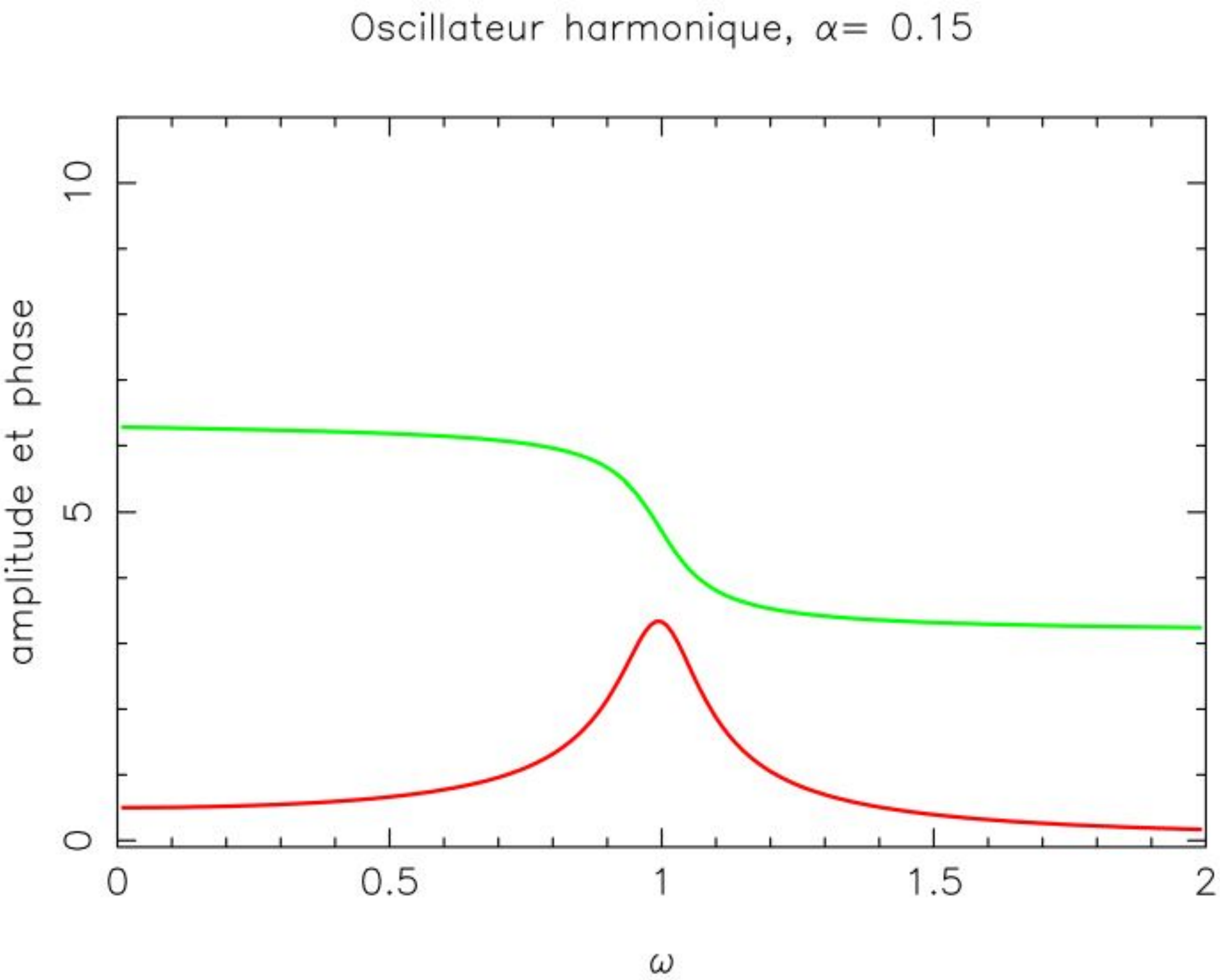
la partie forcée (point fixe) devient grande près de la résonance ($\Delta\omega \sim 0$), eg infinie pour cas harmonique, mais en général la non-linéarité sature la solution à une valeur finie

la solution libre tourne lentement (à la vitesse angulaire $\Delta\omega \sim 0$) autour du point fixe (une fois affectuée la surface de section)

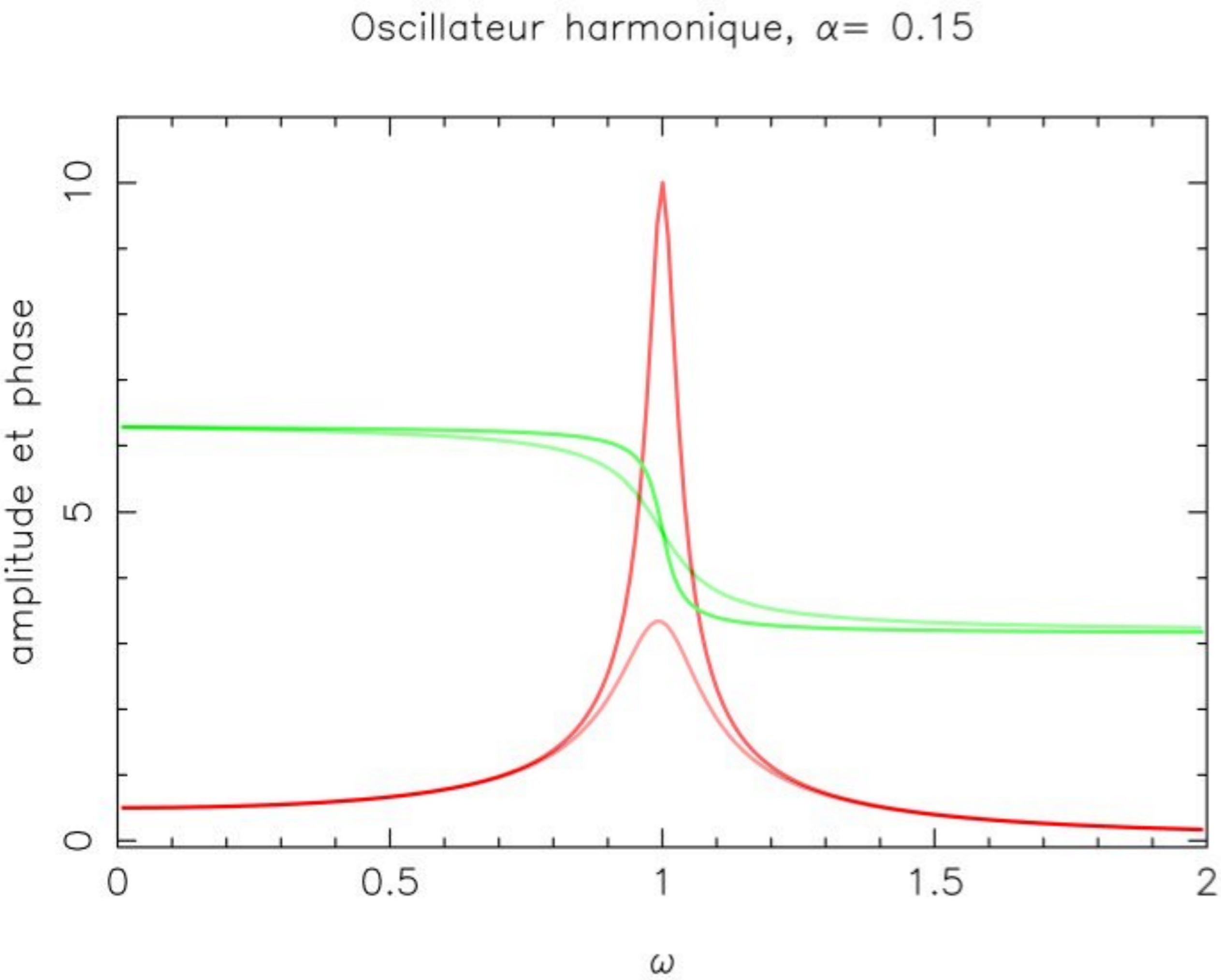
au passage à la résonance exacte ($\Delta\omega = 0$) la phase de la solution forcée subit une discontinuité de 180° et la rotation de la solution libre change de direction



Oscillateur harmonique, α= 0.05
amplitude et phase
ω
10
5
0
0
0.5
1
1.5
2
∝1/α
2π
∝ α
π



Oscillateur harmonique, α= 0.15
amplitude et phase
0
5
10
0
0.5
1
1.5
2
ω



Oscillateur harmonique, α= 0.15
amplitude et phase
ω
0
5
10
0
0.5
1
1.5
2

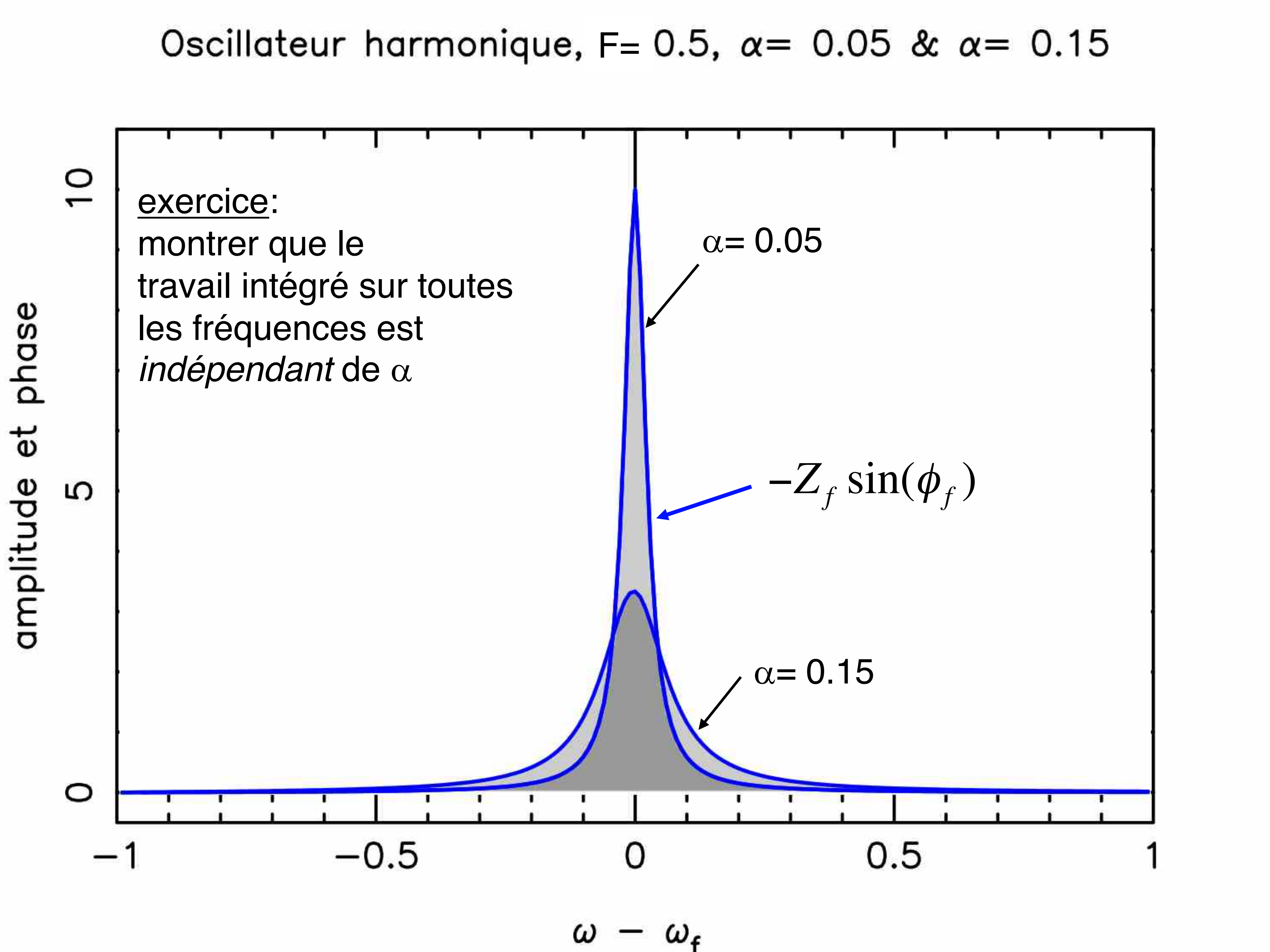
exercice:

montrer que lorsque le cycle limite est atteint, alors:

énergie dissipée = énergie fournie par l'opérateur

et:

énergie fournie: $\propto -Z_f \sin(\phi_f)$



Oscillateur harmonique, F= 0.5, α= 0.05 & α= 0.15
exercice:
montrer que le travail intégré sur toutes les fréquences est *indépendant* de α
α= 0.05
$-Z_f \sin(\phi_f)$
α= 0.15
amplitude et phase
$\omega - \omega_f$
0
5
10
−1
−0.5
0
0.5
1

Ce qui nous avons appris dans ce chapitre:

- l'effet des termes à hautes fréquences dans une Equa. Diff. ont tendance à se moyenner à zéro. On peut les ignorer (averaging method) pour se concentrer sur les termes à basse fréquence.

- c'est une recette qu'il faut utiliser avec précaution. Les termes à hautes fréquences peuvent être essentiels pour l'apparition du chaos.

- le cas simple du pendule harmonique (linéaire) fournit des comportements génériques des systèmes résonants →

- la partie forcée devient grande près de la résonance (lorsque $\Delta\omega = f_{libre} - f_{forcée} \sim 0$). La perturbation résonante peut être petite, mais conduit à une réponse grande sur un temps grand.

Ce qui nous avons appris dans ce chapitre, suite:

- la solution forcée devient infinie dans le cas harmonique, mais est en général bornée à cause de la non-linéarité de l'équation.

- la méthode des surface de section de Poincaré révèle la structure des solutions (portrait de phase), en particulier →

- la solution forcée est un point fixe, autour de laquelle la solution libre tourne lentement (à la vitesse angulaire $\Delta\omega \sim 0$)

- au passage à la résonance exacte ($\Delta\omega = 0$) la phase de la solution forcée subit une discontinuité de 180° .

- dans le cas habituel non-linéaire, des séparatrices dans les portraits de phase provoquent des discontinuités dans le comportement des solutions. Nous verrons que le chaos peut apparaître autour des séparatrices.

Ce qui nous avons appris dans ce chapitre, suite:

un petit terme de dissipation provoque un léger déphasage entre la solution forcée et le terme de forçage. Ce déphasage assure que l'énergie dissipée est exactement compensée par le terme de forçage.

la dissipation limite par ailleurs la réponse du système et élargit la zone de résonance, et ce dans les mêmes proportions.