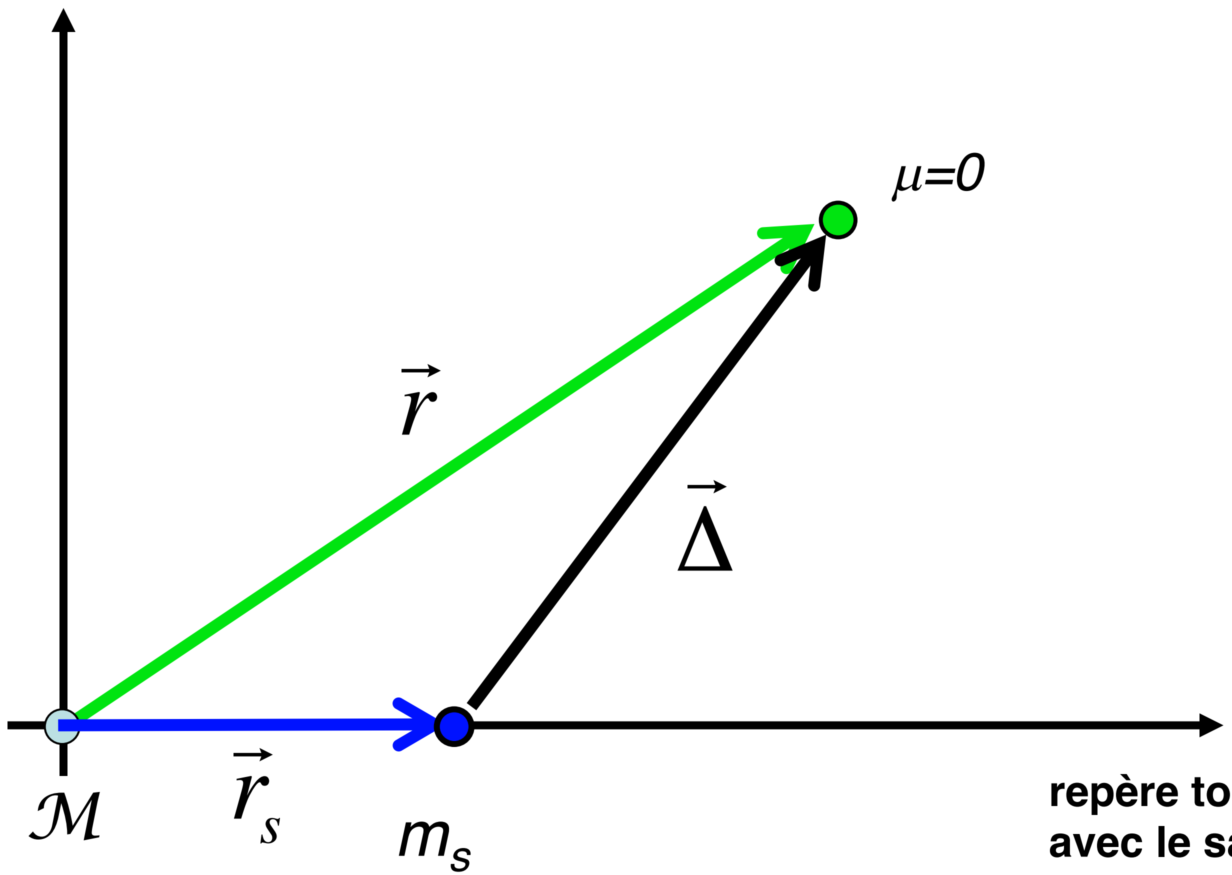
effets des non-linéarités: approche géométrique
(le deuxième modèle fondamental des résonances)

problème *restreint, circulaire (mais pas nécessairement plan)*



repère tournant
avec le satellite
à la vitesse angulaire
n_s

interprétation de la constante de Jacobi

dynamique de la particule dans repère tournant avec le perturbateur

$$\boxed{\vec{\gamma}_{\mathrm{rot}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r} \quad - \frac{Gm_s}{\Delta^3}\vec{\Delta} \quad - \frac{Gm_s}{r_s^3}\vec{r}_s \quad + n_s^2\vec{r} \quad + 2\vec{v}_{\mathrm{rot}} \times \vec{n}_s}$$

$$\underbrace{}_{\boxed{1}} \qquad \underbrace{}_{\boxed{2}} \qquad \underbrace{}_{\boxed{3}} \qquad \underbrace{}_{\boxed{4}} \qquad \underbrace{}_{\boxed{5}}$$

1: accélération *directe* due à $\mathcal{M}$
2: accélération *directe* due à m_s
3: accélération *indirecte* due à m_s
4: accélération *centrifuge* due à la rotation du système
5: accélération de *Coriolis* due à la rotation du système

NB. l'accélération de Coriolis ne dérive *pas* d'un potentiel, mais elle est quand même *conservative* en terme de potentiel:

$$U_{\text{rot}} = -\frac{GM}{r} \quad + Gm_s\left(\frac{r \cdot \vec{r}_s}{r_s^{\,3}} - \frac{1}{\Delta}\right) \quad - n_s^2 r^2/2$$

donc, la quantité:

$$\boxed{J = \frac{1}{2}v^2_{\text{rot}} - \frac{GM}{r} \quad + Gm_s\left(\frac{r \cdot \vec{r}_s}{r_s^{\,3}} - \frac{1}{\Delta}\right) \quad - n_s^2 r^2/2}$$

est conservée: c'est la *constante de Jacobi* mais:

$$\vec{v}_{\mathrm{rot}} = \vec{v} + \vec{r} \times \vec{n}_s$$ où $\vec{v}$ est la vitesse de la particule dans le repère inertiel

et donc: $$\boxed{J = E - \vec{n}_s \cdot \vec{H} \quad + G m_s \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_s}{r_s^{\,3}} - \frac{1}{\Delta} \right)}$$

où E et $\vec{H}$ sont l'énergie et le moment cinétique de la particule par rapport à la planète, *dans le repère inertiel*

J: constante de Jacobi, parfois appelée paramètre de *Tisserand*

NB. valide *uniquement* pour orbite satellite circulaire!
NB'. valide même si le problème n'est *pas* plan

$$\dot{J} = \dot{E} - \vec{n}_s \cdot \dot{\vec{H}} \quad + G m_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_s}{r_s^3} - \frac{1}{\Delta} \right) = 0$$

$$\propto m_s \qquad \propto m_s \qquad\qquad \propto m_s$$

en négligeant les termes du second ordre:

$$\dot{E} \approx n_s \dot{H}$$

mais:

$$\begin{cases} E = & -\dfrac{GM}{2a} \\ H = & \sqrt{GMa(1-e^2)} \end{cases}$$

en utilisant la 3ème loi de Kepler et *e << 1:*

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{E} = -\dfrac{da}{a} \\ \dfrac{dH}{H} = \dfrac{da}{2a} + \dfrac{d(1-e^2)}{2(1-e^2)} \approx \dfrac{da}{2a} - \dfrac{d(e^2)}{2} \end{cases}$$

et:

$$\begin{cases} E = -(an)^2 / 2 \\ H \approx a^2 n \end{cases}$$

… et finalement, la constante de Jacobi (attention: problème circulaire) impose:

$$\boxed{\frac{da}{a} \approx \frac{n_s}{n_s - n} d(e^2)}$$

conséquences:

❍ les variations de *a* et *e* ne sont pas indépendantes

❍ si *e* est du premier ordre en m_s, alors *da* est du second *ordre* en m_s.

expression de la constante de Jacobi autour d'une résonance.
Soit:

$$\Delta n \equiv (m+1)n_s - mn - \dot{\varpi} \approx (m+1)n_s - mn$$

la distance à la résonance, alors:

$$d\Delta n \approx -m \cdot dn$$

$$3\frac{da}{a} + 2\frac{dn}{n} = 0$$ (3ème loi de Kepler)

et donc: $$\frac{da}{a} \approx \frac{2}{3m} \cdot \frac{d(\Delta n)}{n}$$

$$\frac{da}{a} \approx \frac{n_s}{n_s - n} d(e^2) \approx -m d(e^2)$$

devient finalement:

$$\boxed{2\Delta n + 3m^2 n e^2 = \text{ cste}}$$

version "locale" de la constante de Jacobi

exercice: montrer que ceci est équivalent à (cf. chapitre précédent):

$$\frac{\Delta a}{a_0} + m e^2 = \text{ constante}$$

$$\begin{cases} \dot{h} = & -\Delta n \cdot k \\ \dot{k} = & +\Delta n \cdot h + \epsilon' n_0 \\ \text{avec } J_c = & 2\Delta n + 3m^2 n e^2 = \text{ constante} \end{cases}$$

qui décrit un système à un degré de liberté, donc intégrable

NB. le portrait de phase des solutions est donc paramétrisé par la valeur de la constante de Jacobi J_c :

à chaque valeur, un portrait de phase différent

$\rightarrow$ comment retrouver les portaits de phase ?

On peut montrer (exercice) que le système ci-dessus admet l'intégrale :

$$K = e^4 - \frac{2J_c}{3m^2n_0}e^2 - \frac{8\epsilon'}{3m^2} \cdot h$$

calcul des trajectoires compliqué, mais interprétation géométrique simple :

$$e^4 - \frac{2J_c}{3m^2n_0}e^2 = K + \frac{8\epsilon'}{3m^2} \cdot h$$

dont la solution est la projection dans le plan (h, k) de deux surfaces S_1 et S_2 dans l'espace (h, k, z), où :

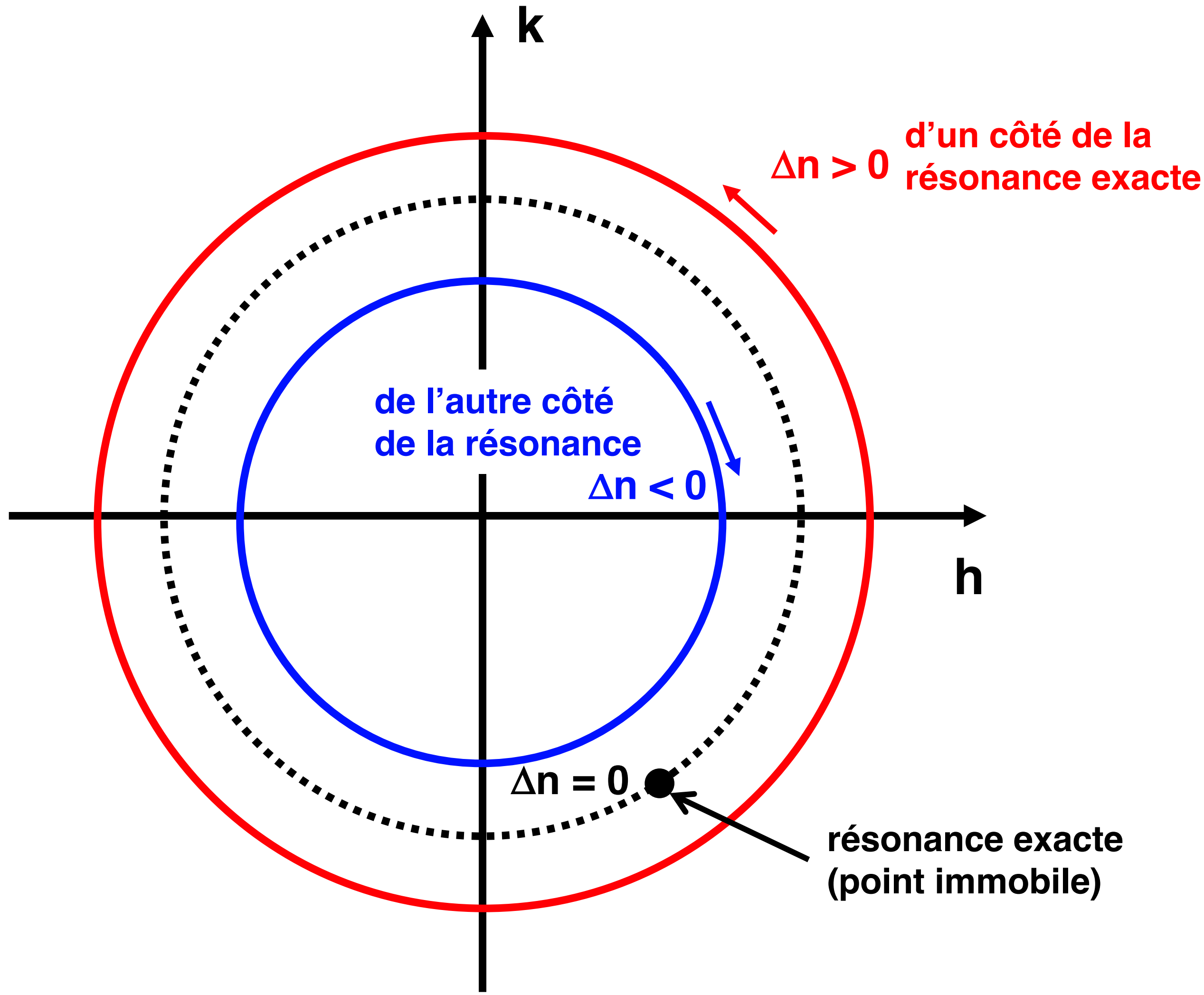
$$\left\{\begin{array}{ll} z(h,k) = & e^4 - \frac{2J_c}{3m^2 n_0} e^2 \rightarrow \text{ surface } S_1 \\ \\ z(h,k) = & K + \frac{8\epsilon'}{3m^2} \cdot h \rightarrow \text{ surface } S_2 \\ \end{array}\right.$$

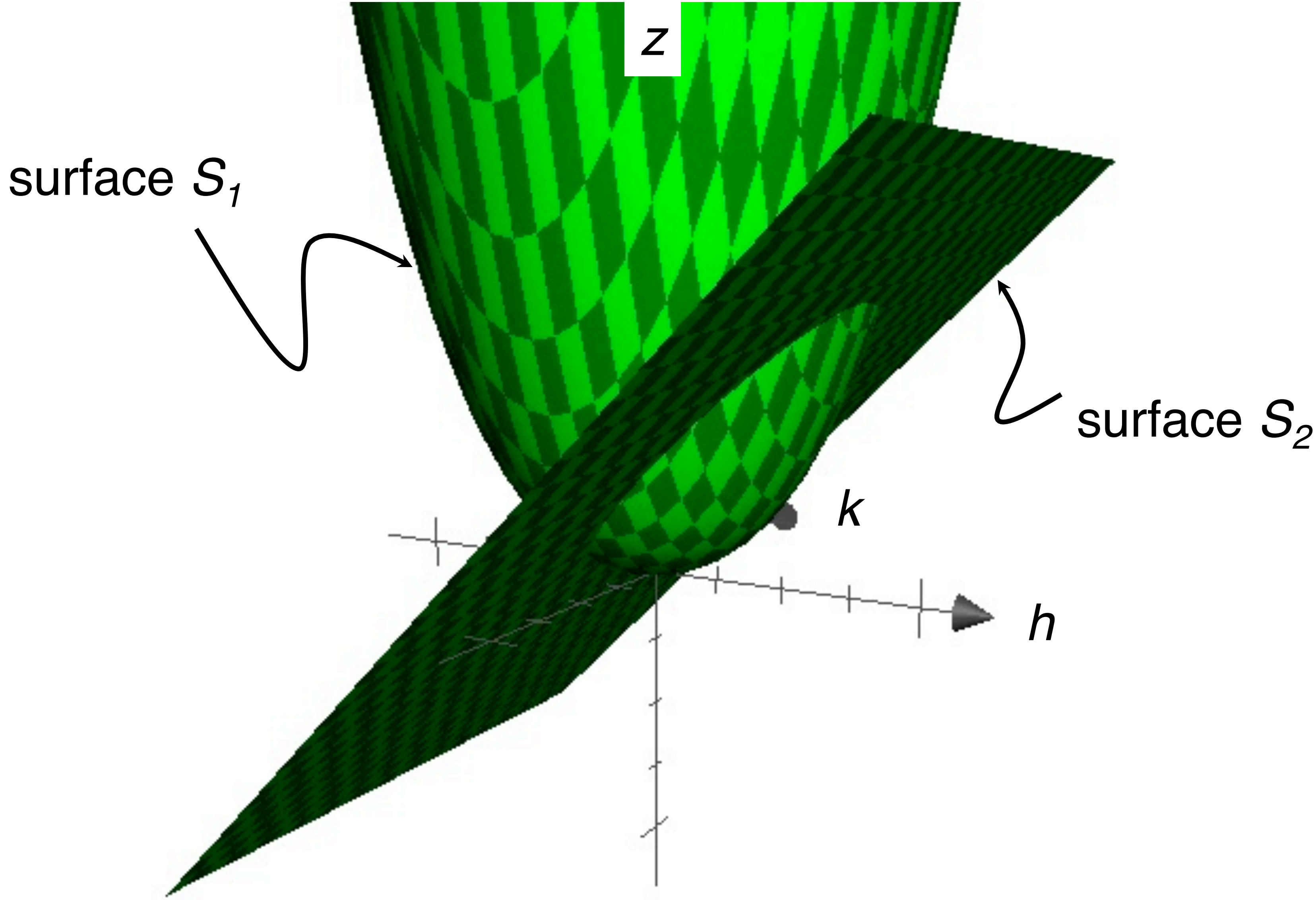
surface S_1 : “bol” ou “chapeau mexicain” selon signe de J_c
surface S_2 : plan parallèle à l’axe Ok

En résumé : à chaque valeur de J_c correspond une famille de solutions (un portrait de phase), chaque solution étant associée à une valeur de K.

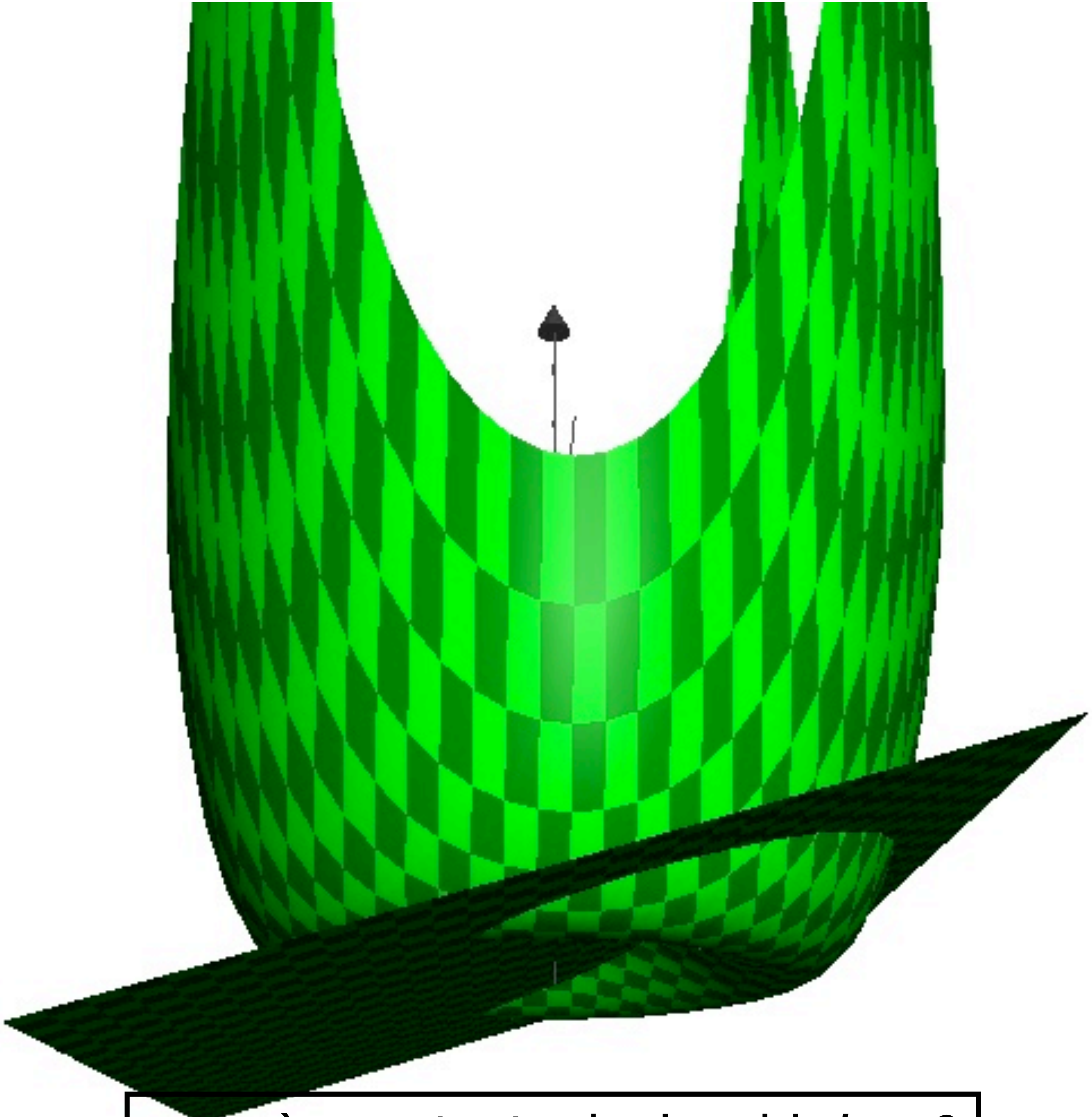
Question, comment le portrait de résonance trivial ε’ = 0 (aucune perturbation) est-il transformé avec ε’ ≠ 0

$$\begin{cases} \dot{h} = -\Delta n \cdot k \\ \dot{k} = +\Delta n \cdot h \end{cases}$$

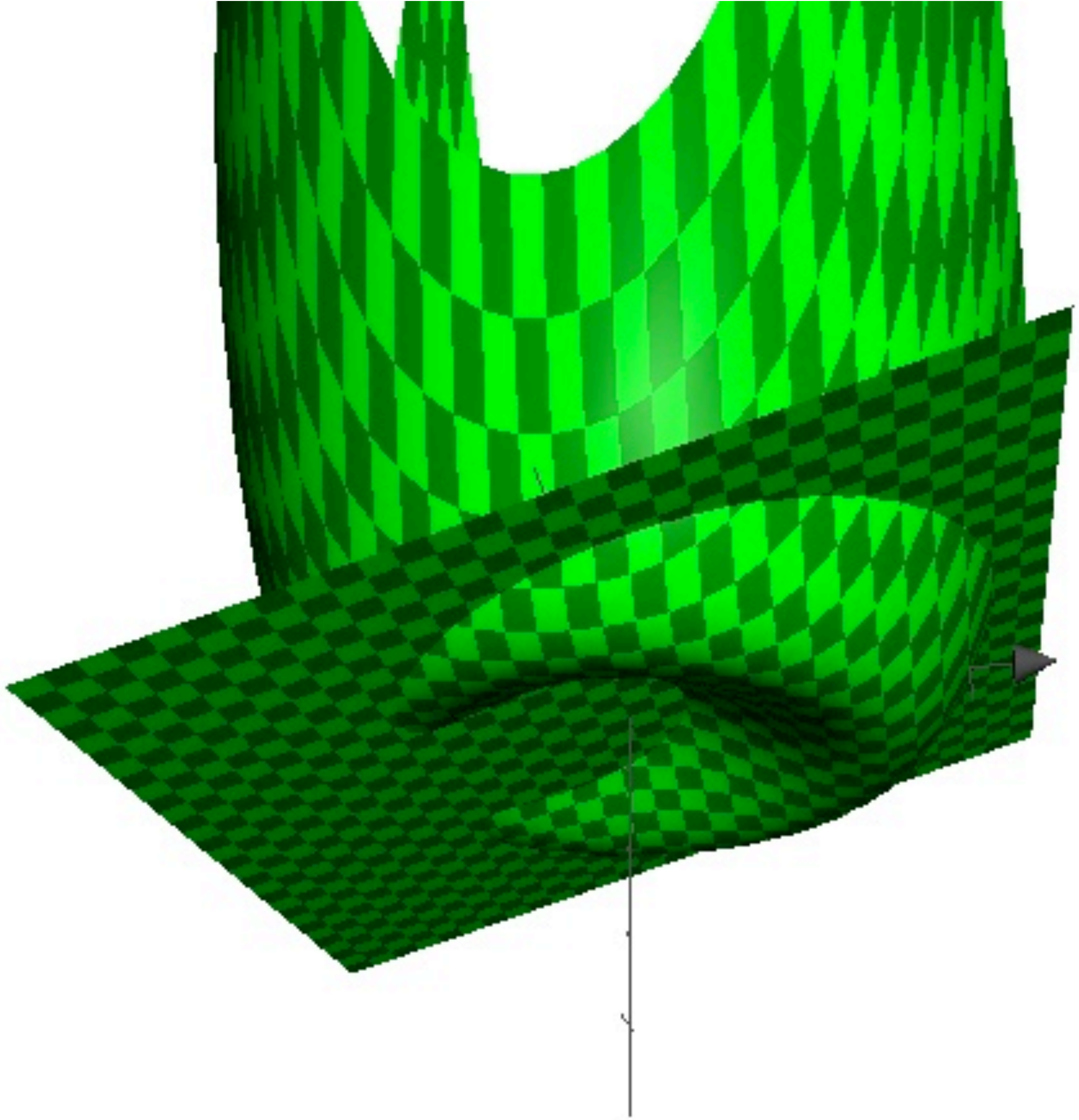


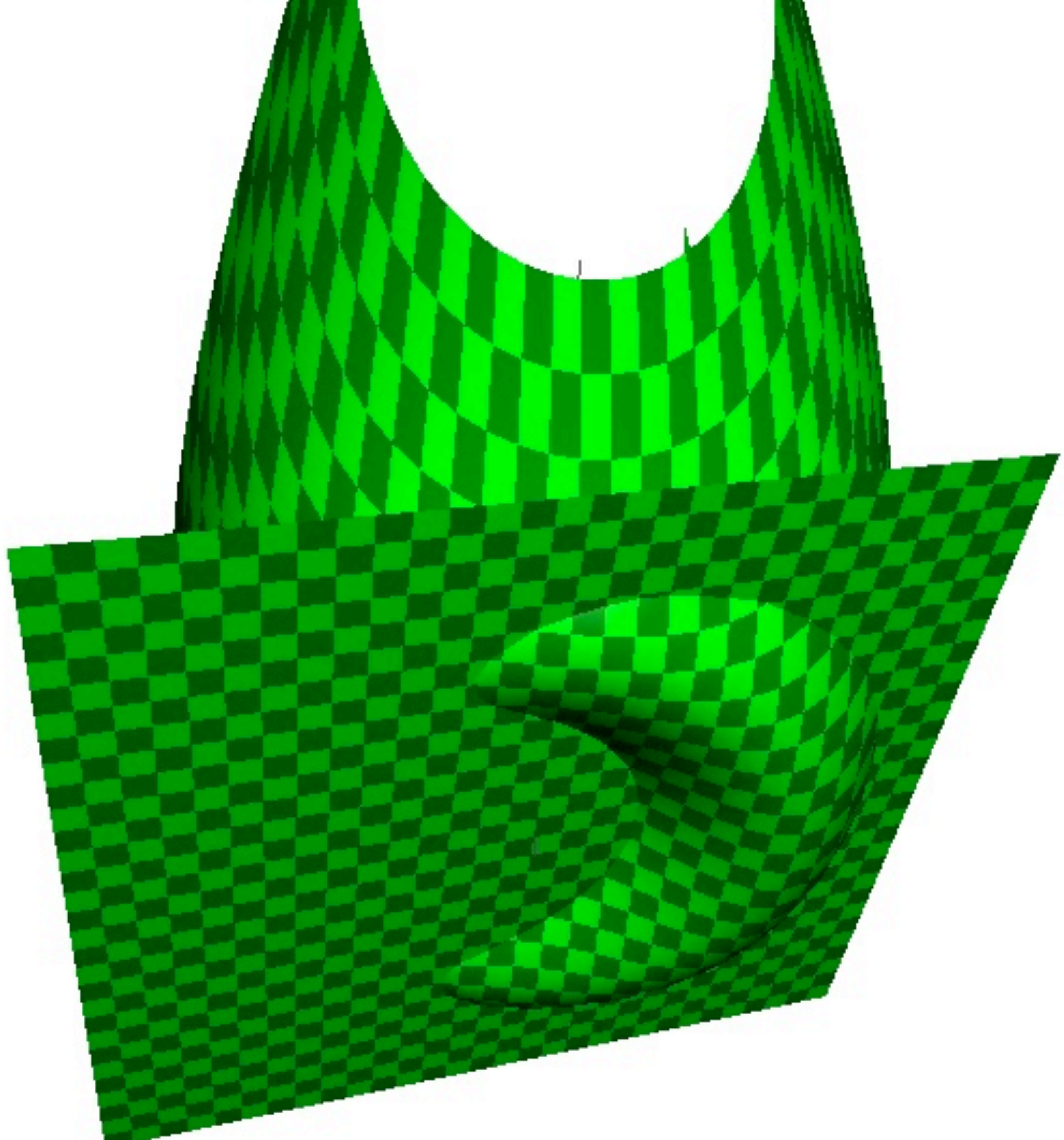


cas où constante de Jacobi $J_c < 0$



cas où constante de Jacobi $J_c > 0$





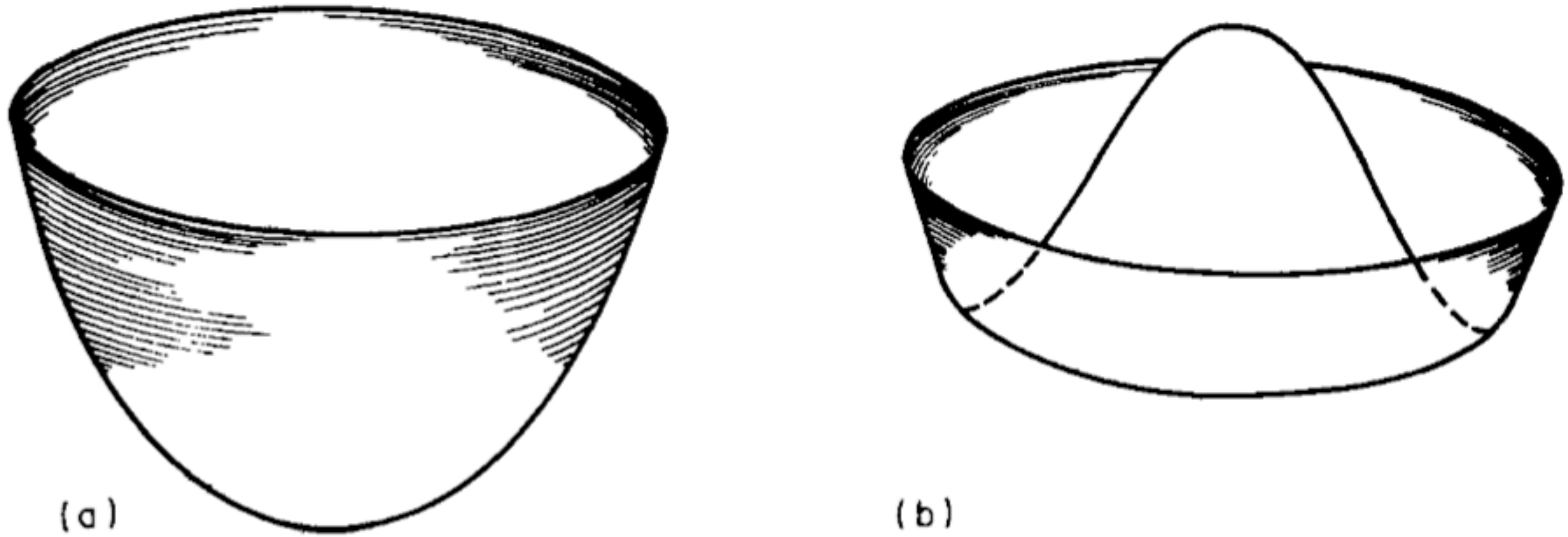


Fig. 1. The unperturbed Hamiltonian $F_0(k, h)$.
(a) $\omega^0 > 0$, (b) $\omega^0 < 0$ (in both cases $n^0 > 0$).

tiré de S. Ferraz-Mello ("Resonances in regular variables I: Morphogenetic analysis of the orbits in the case of a first order resonance", *Celestial Mechanics* **35**, 209-220, 1985)

Ferraz-Mello *Cel. Mech.* **35**, 209-220, 1985)

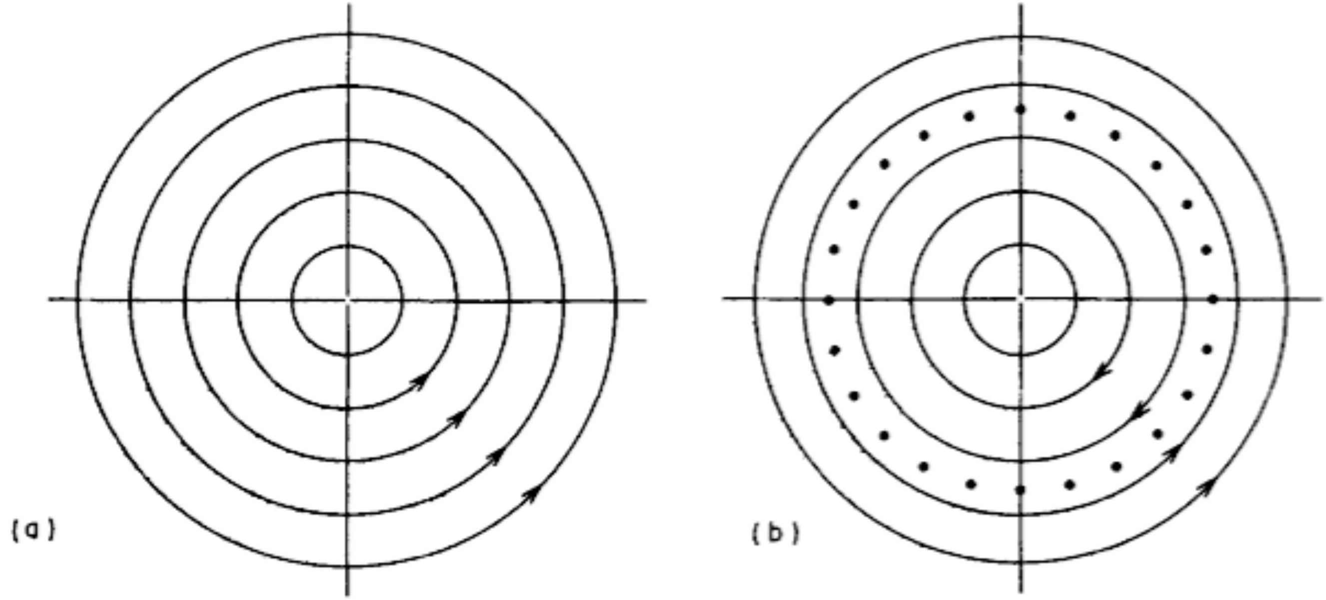


Fig. 2. Orbits defined by the unperturbed Hamiltonian in the plane (k, h).
The dots represent a continuous sequence of equilibrium solutions.

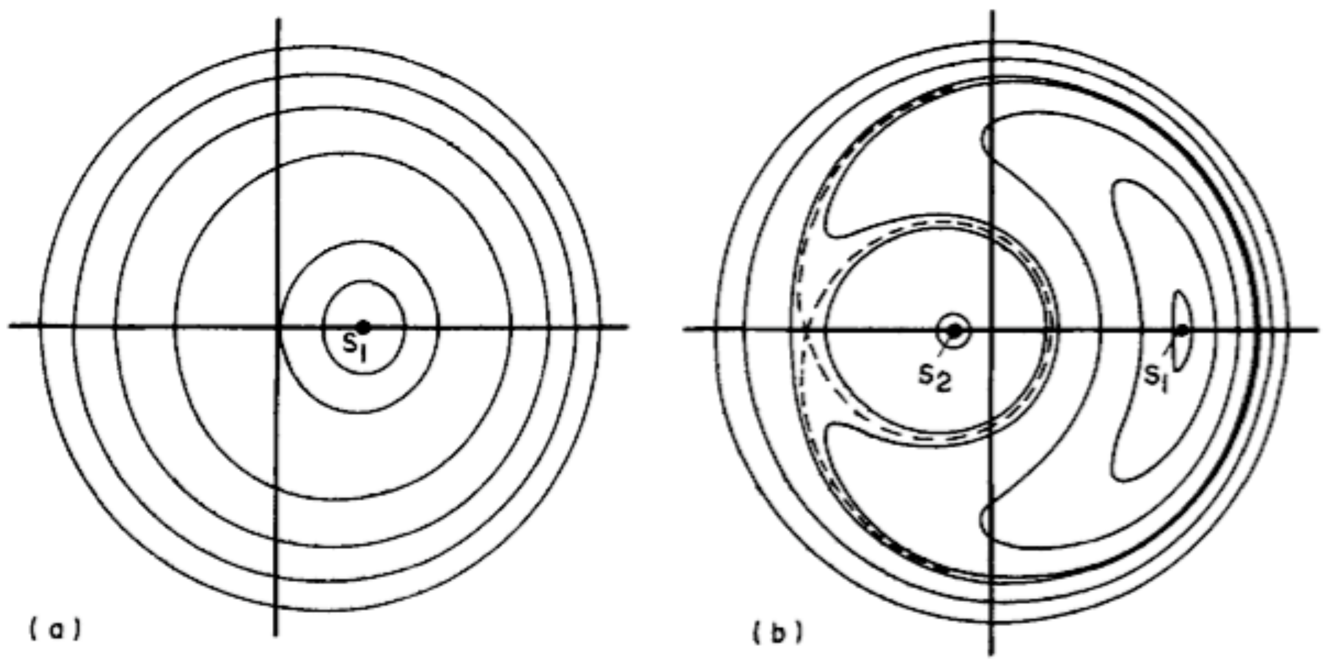


Fig. 3. Orbits defined by the perturbed Hamiltonian in the plane (k, h).

résumé de la situation

on considère le pb *restreint plan* (3ème corps de masse nulle) →

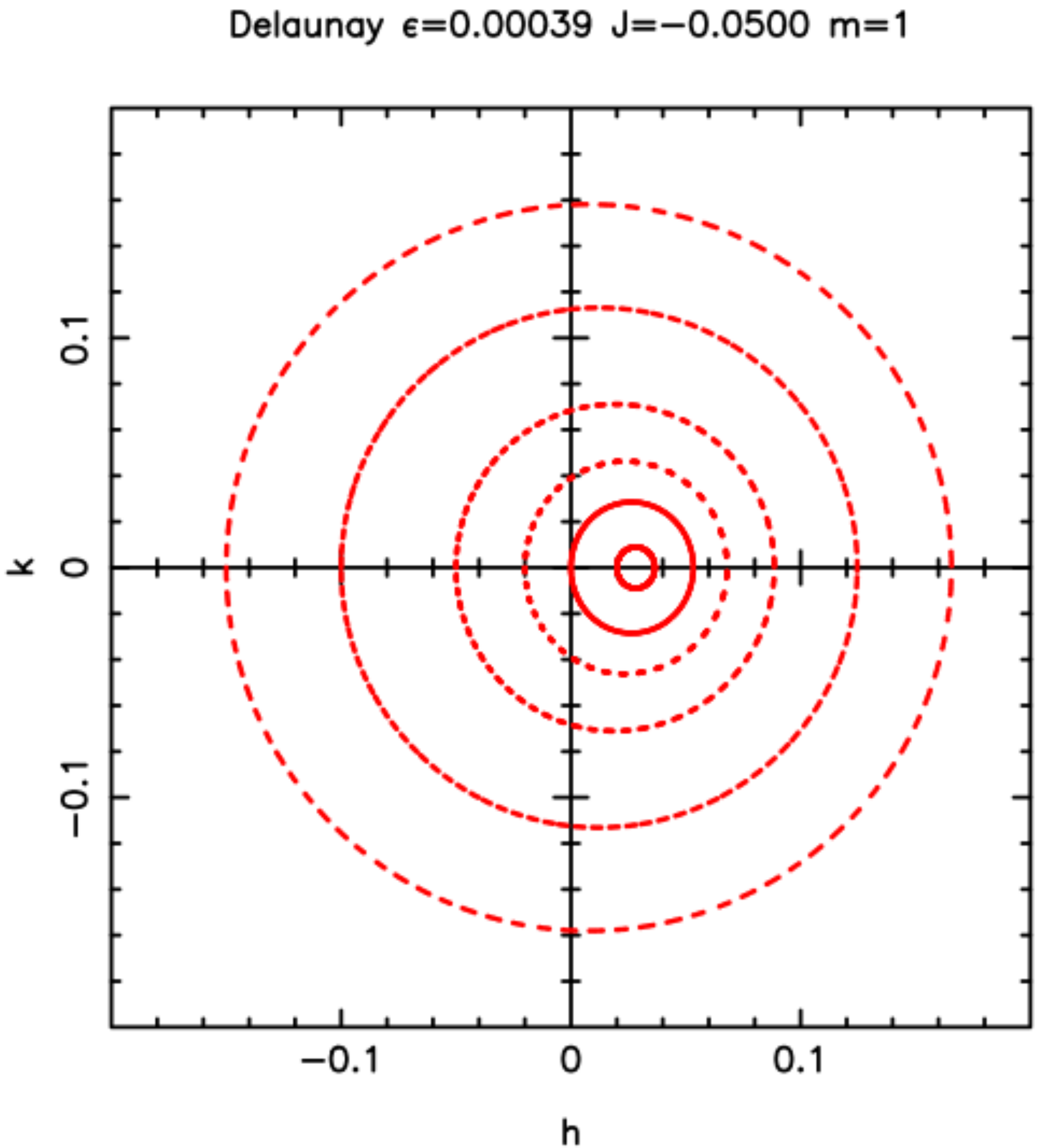
pb à *deux degrés* de liberté *non autonome* (dépend du temps)

de plus, si le pb est *circulaire* (perturbateur sur orbite circulaire parcourue à vitesse uniforme) → l'énergie dans le repère tournant est conservée → *constante de Jacobi* J_C (en plus du hamiltonien) →

le pb est *intégrable* (deux degrés de liberté, deux intégrales)

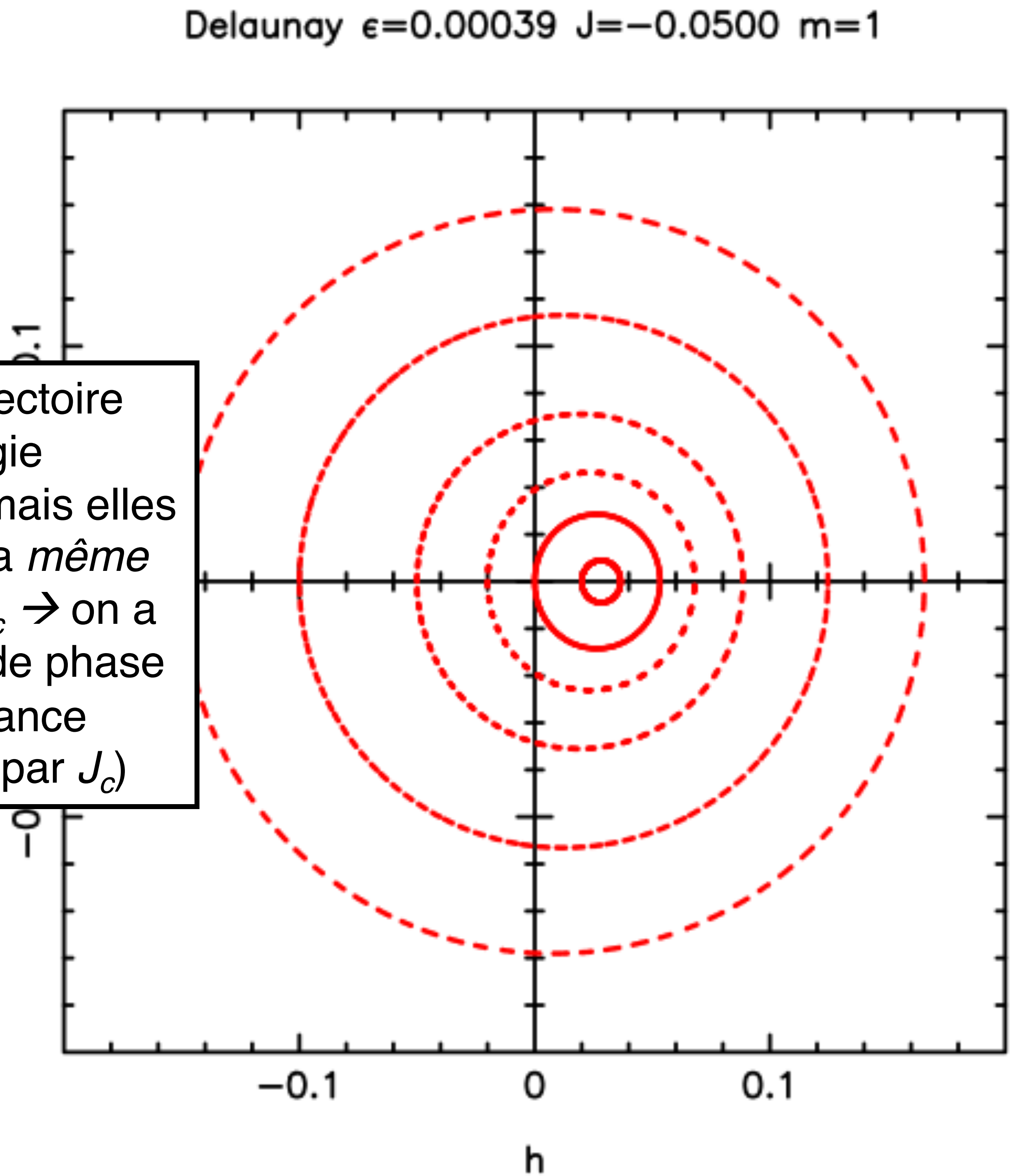
$$\begin{cases} \dot{h} = & -\Delta n \cdot k \\ \dot{k} = & +\Delta n \cdot h + \epsilon' n_0 \\ \text{avec } J_c = & 2\Delta n + 3m^2 n e^2 = \text{ constante} \end{cases}$$

pour *chaque* valeur de J_c, on obtient un portrait de phase où *chaque* trajectoire de *(h,k)* correspond à une valeur différente (énergie) du hamiltonien



astéroïde de
masse nulle
(pb restreint) en
résonance 2:1
avec Jupiter, de
masse m_s= 0.00
(relative au Sole

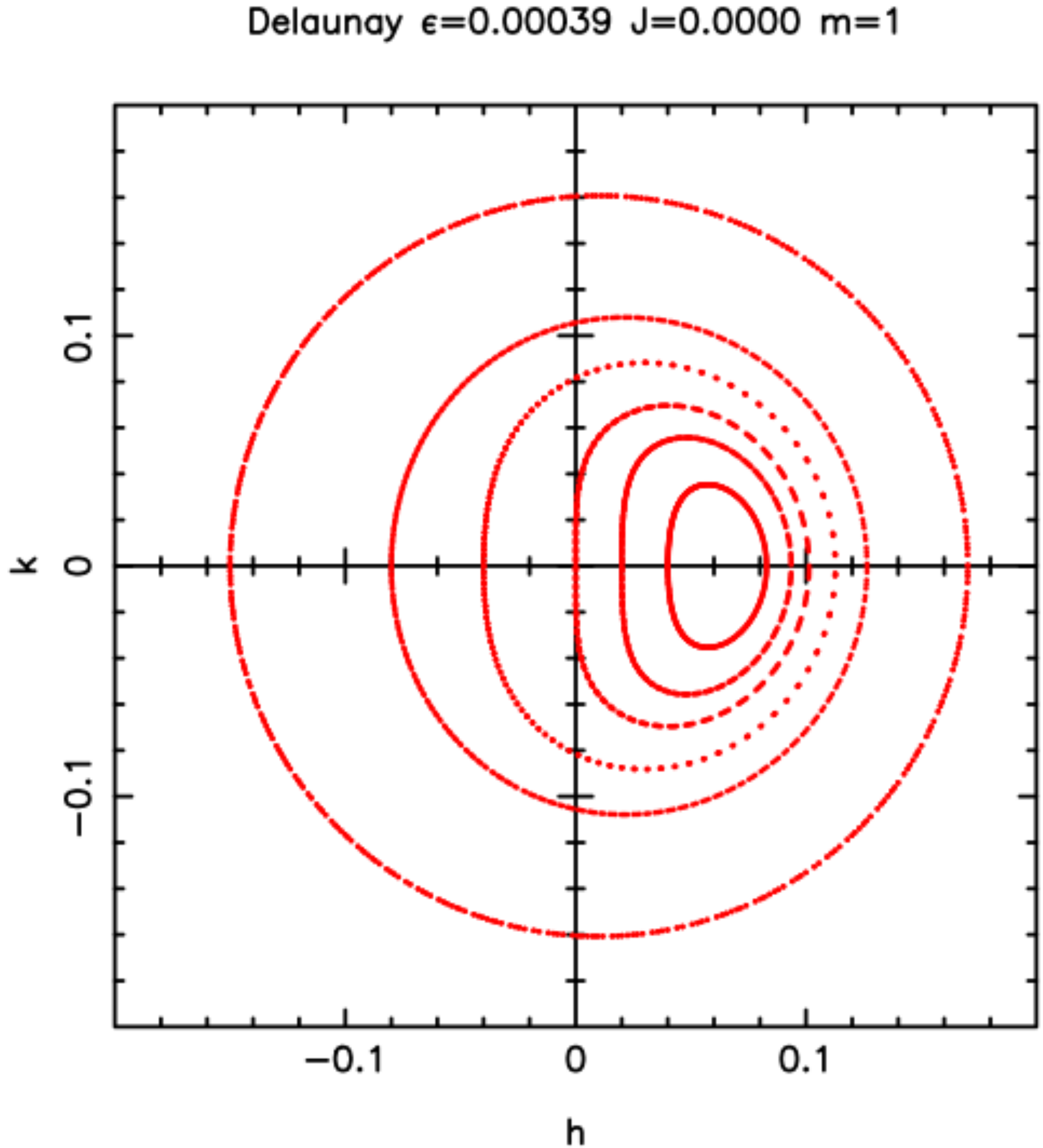
J_C= -0.05



chaque trajectoire à une énergie différente, mais elles ont toutes la *même* valeur de J_c → on a *un* portrait de phase de la résonance (paramétré par J_c)

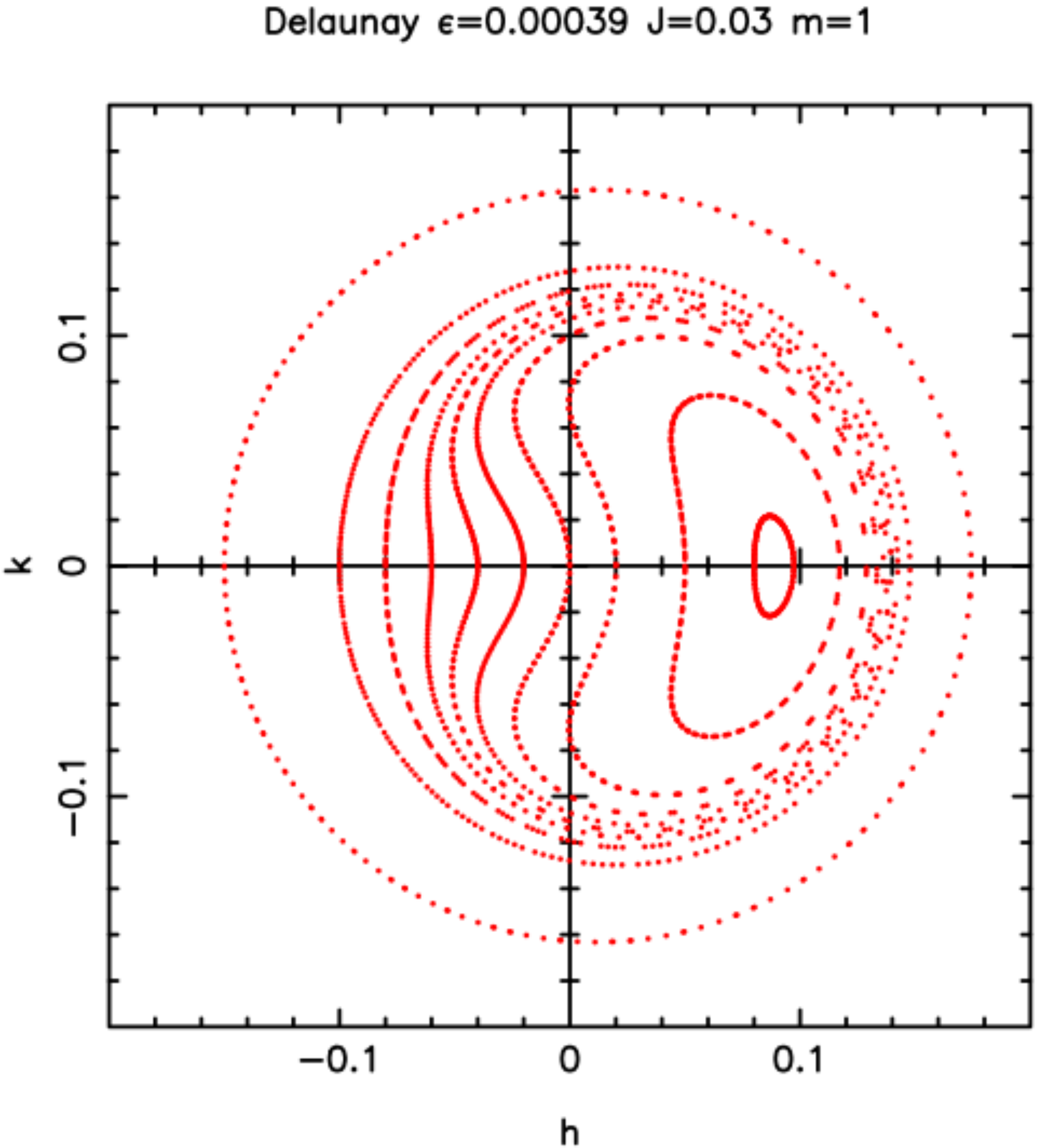
astéroïde de masse nulle (pb restreint) en résonance 2:1 avec Jupiter, de masse m_s= 0.00 (relative au Sole

J_C= -0.05



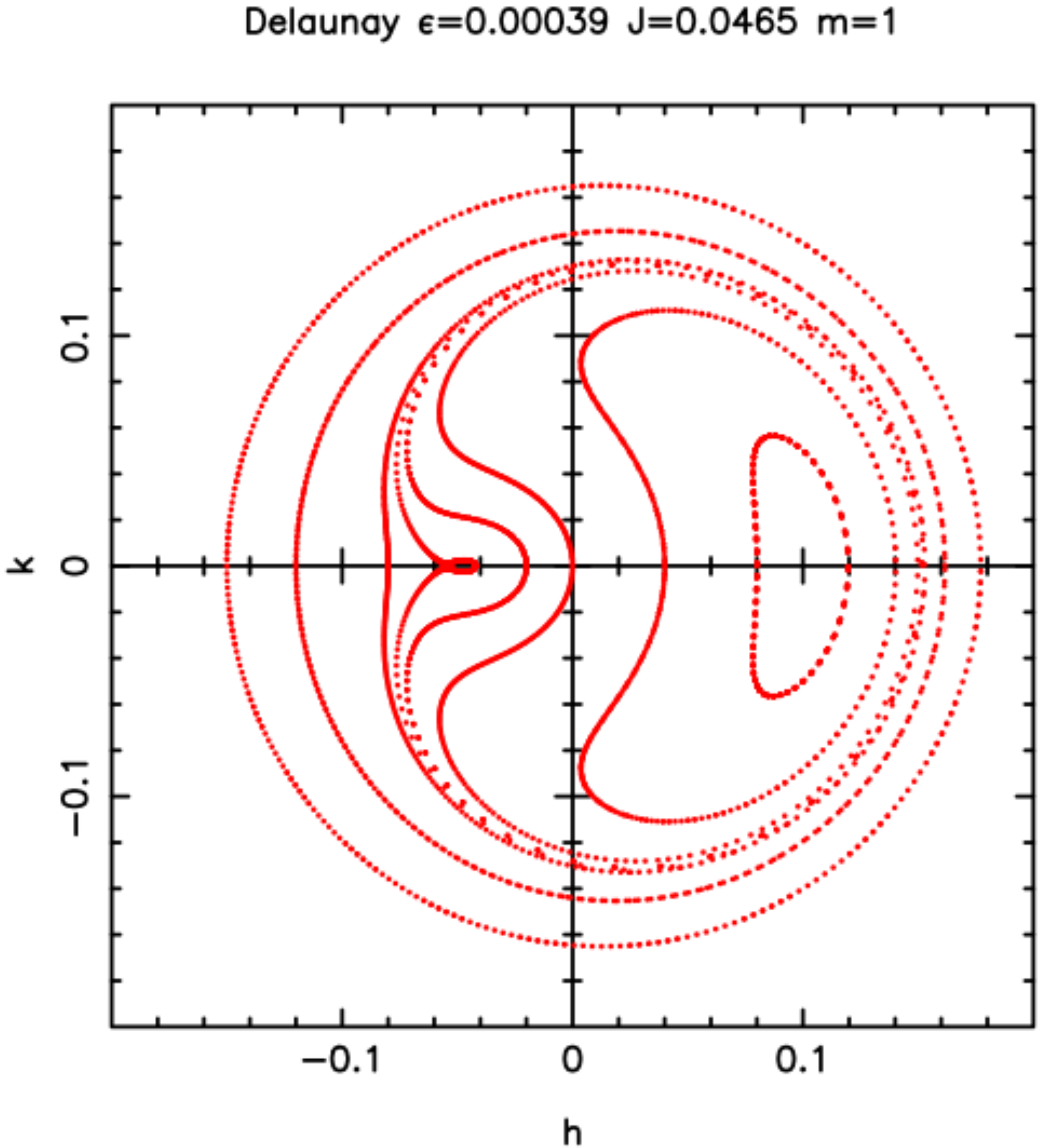
astéroïde de
masse nulle
(pb restreint) en
résonance 2:1
avec Jupiter, de
masse m_s= 0.00
(relative au Sole

J_C= 0



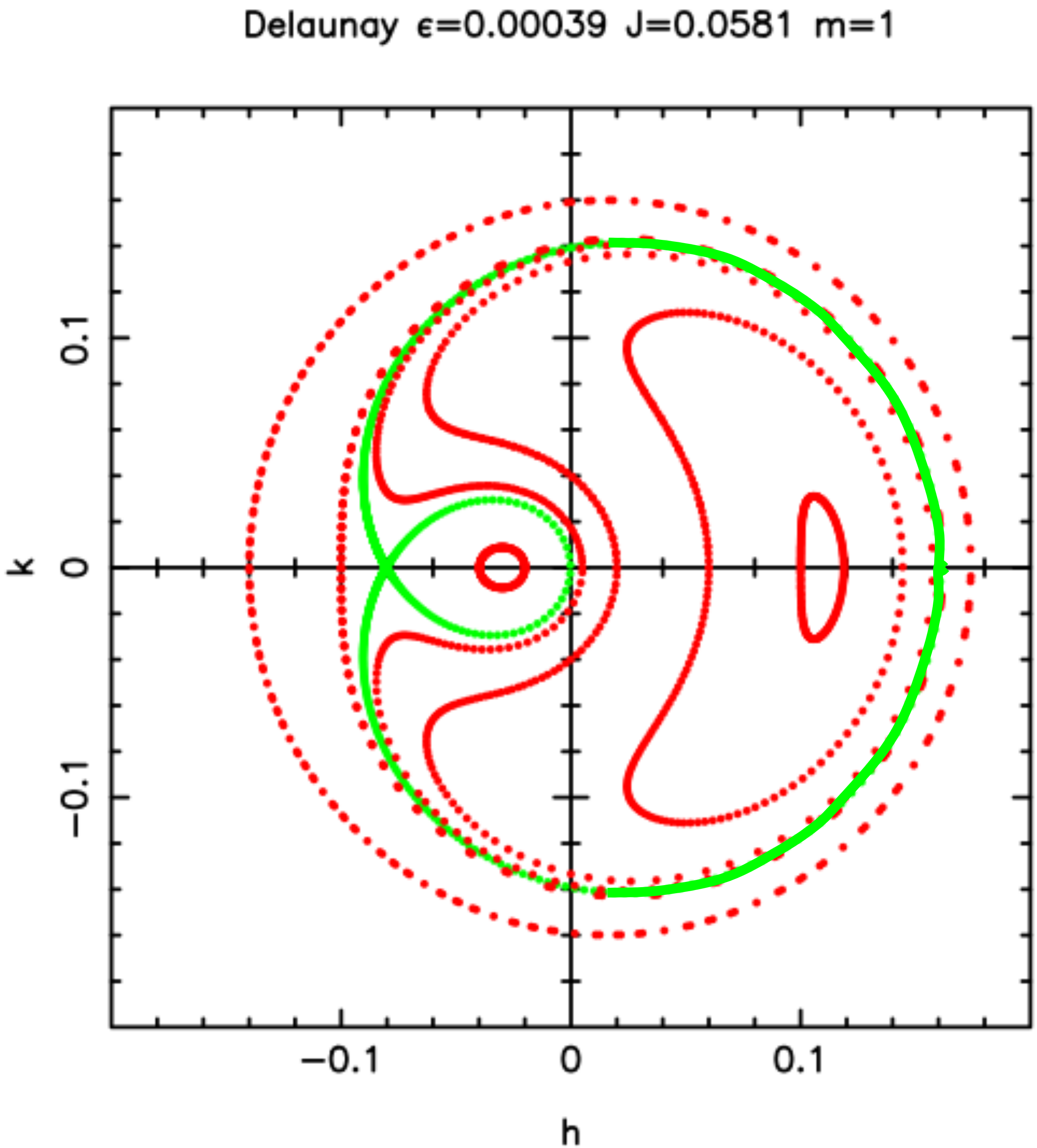
astéroïde de
masse nulle
(pb restreint) en
résonance 2:1
avec Jupiter, de
masse m_s= 0.00
(relative au Sole

J_C= +0.03



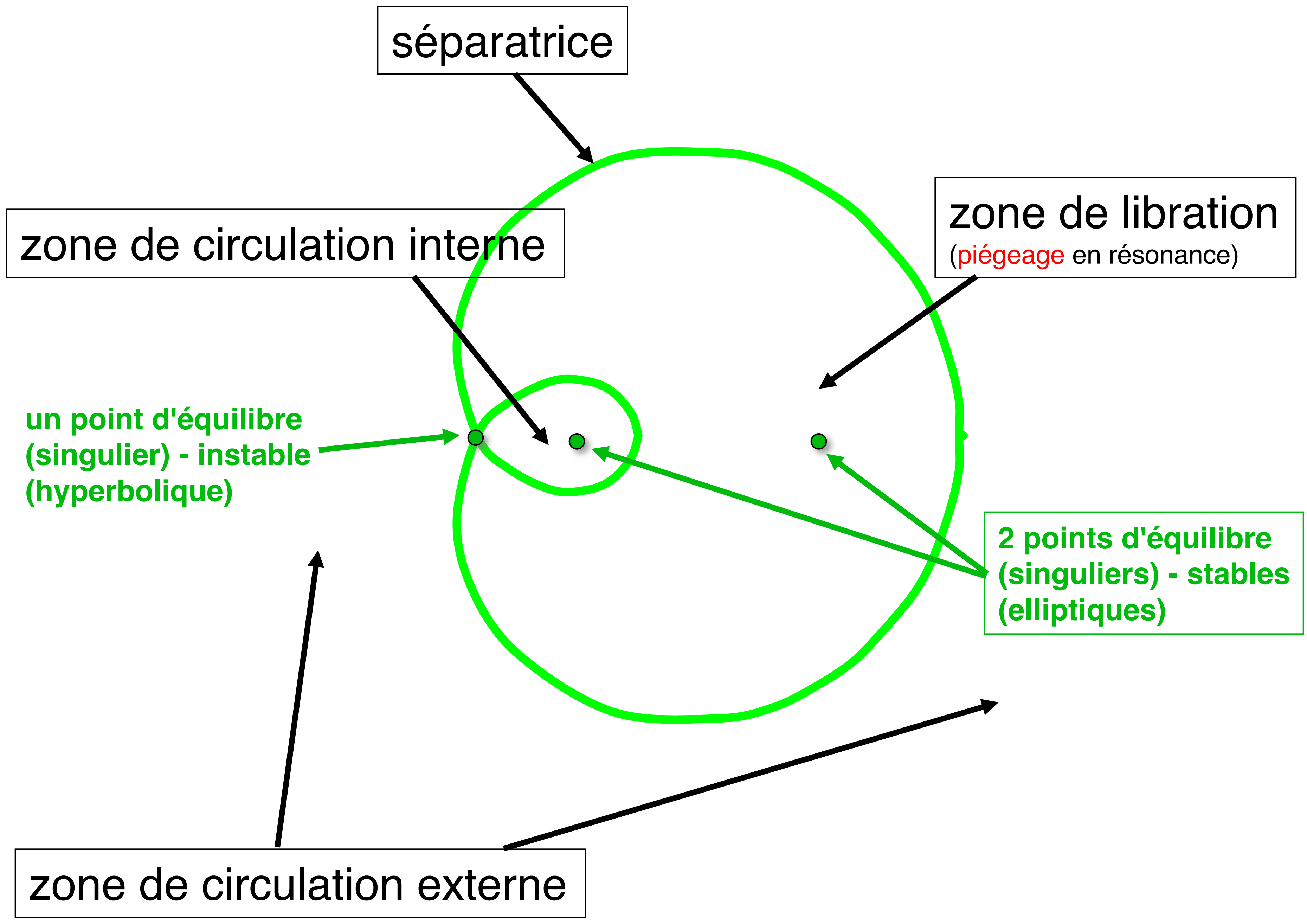
astéroïde de
masse nulle
(pb restreint) en
résonance 2:1
avec Jupiter, de
masse m_s= 0.00
(relative au Sole

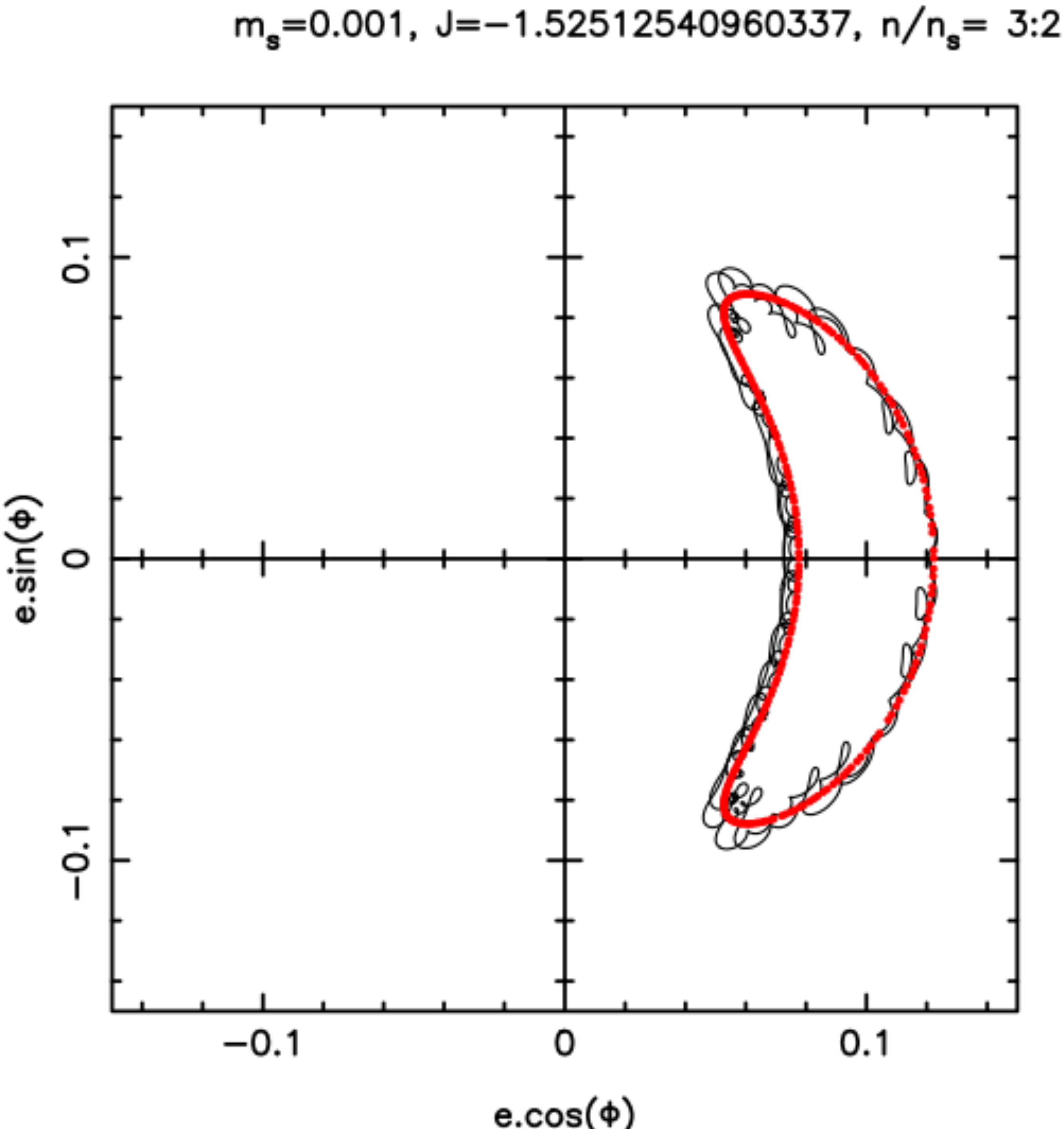
J_C= +0.0465



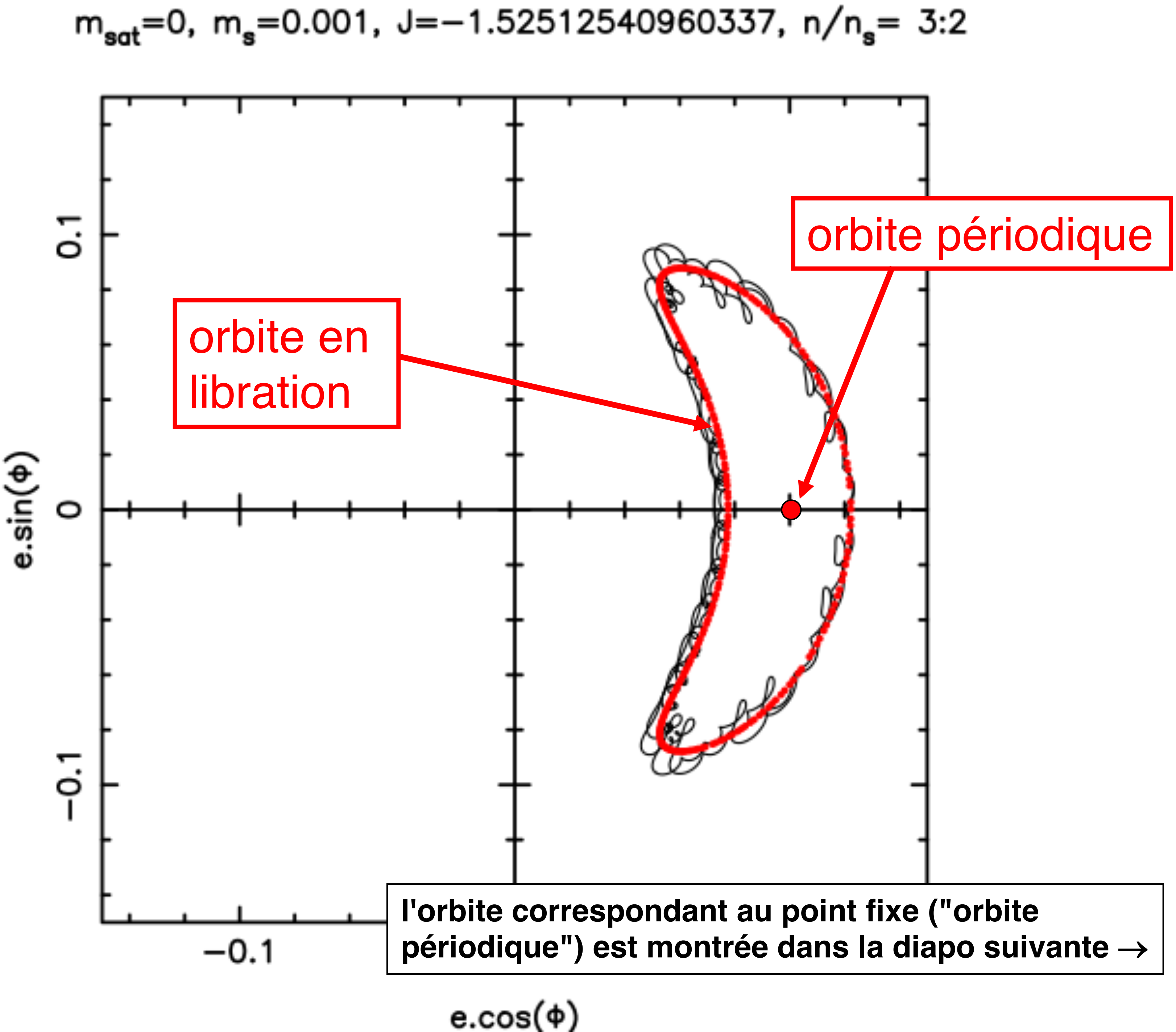
astéroïde de
masse nulle
(pb restreint) en
résonance 2:1
avec Jupiter, de
masse m_s= 0.00
(relative au Sole

J_C= +0.0581

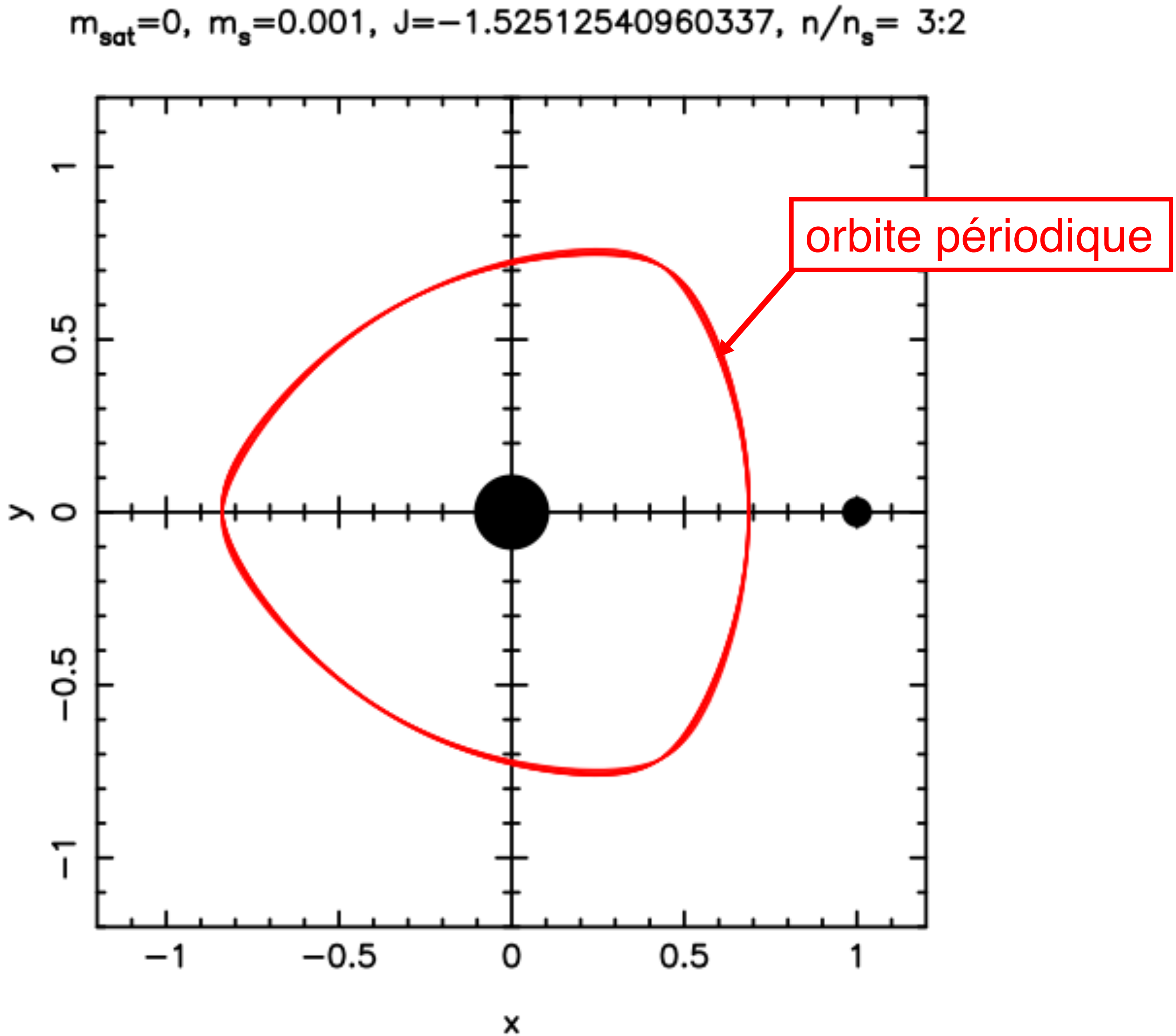

séparatrice
zone de circulation interne
zone de libration
(piégeage en résonance)
un point d'équilibre
(singulier) - instable
(hyperbolique)
2 points d'équilibre
(singuliers) - stables
(elliptiques)
zone de circulation externe



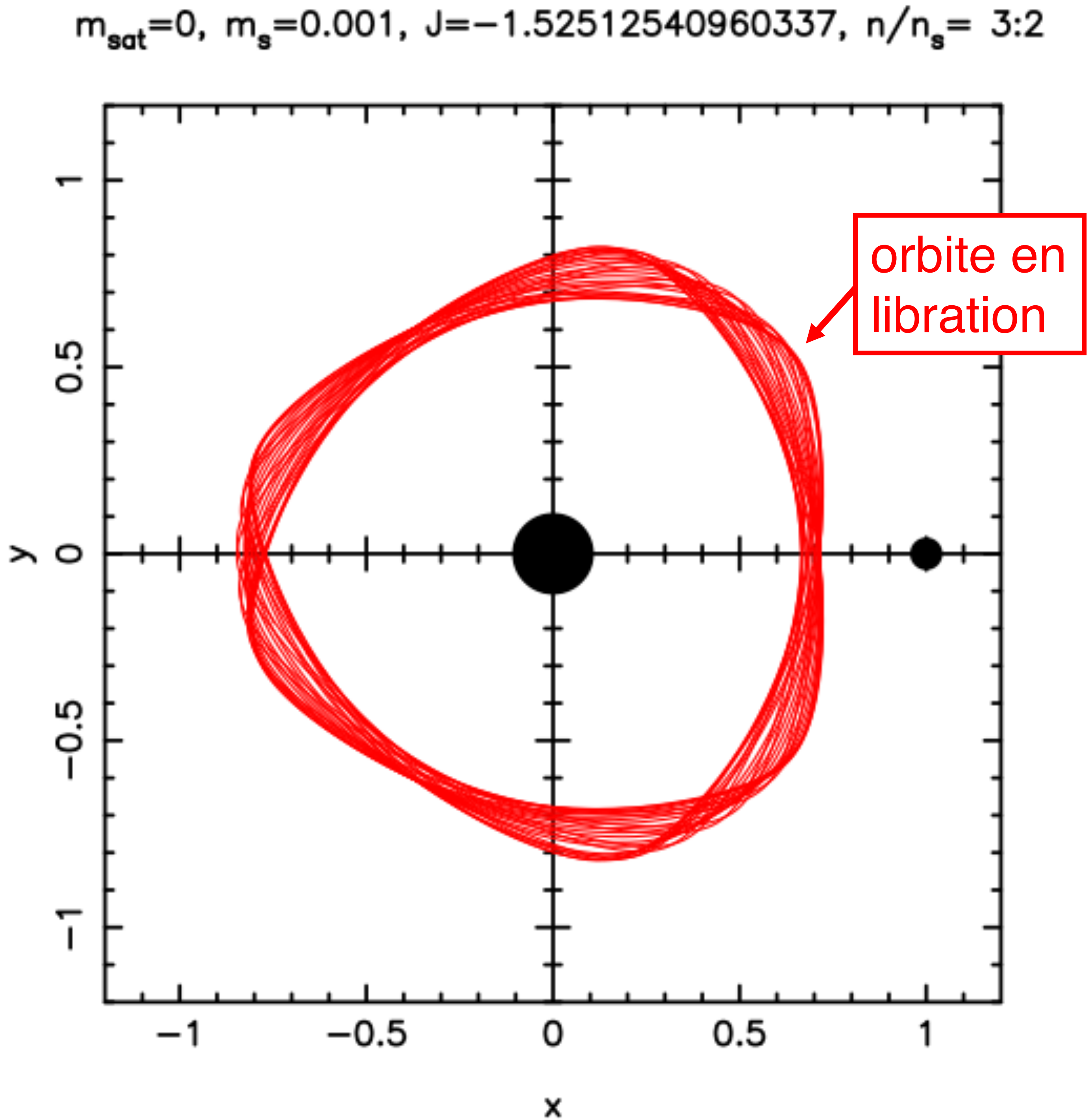
m_s=0.001, J=−1.52512540960337, n/n_s= 3:2
0.1
0
−0.1
e.sin(Φ)
−0.1
0
0.1
e.cos(Φ)



l'orbite correspondant au point fixe ("orbite périodique") est montrée dans la diapo suivante →

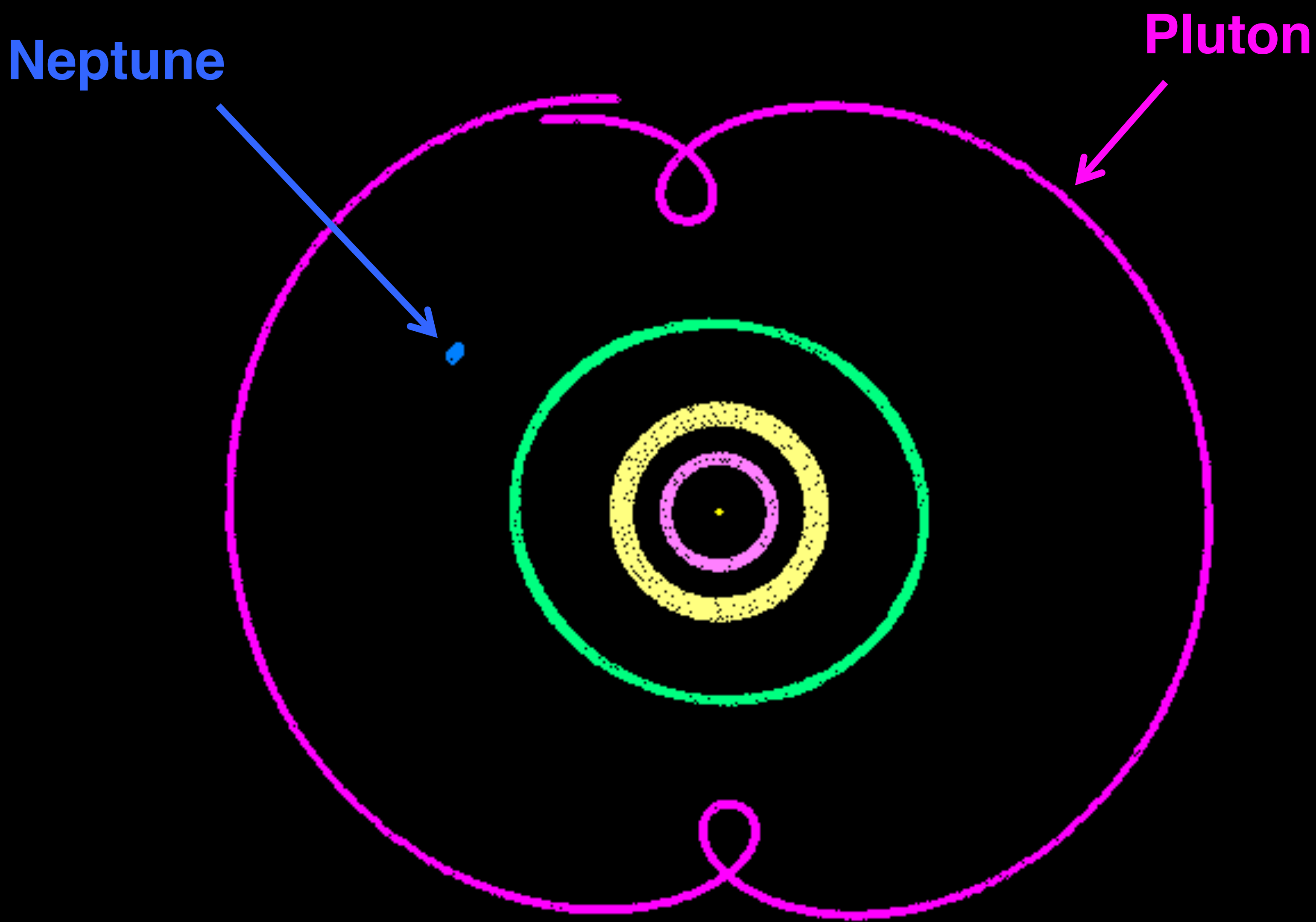


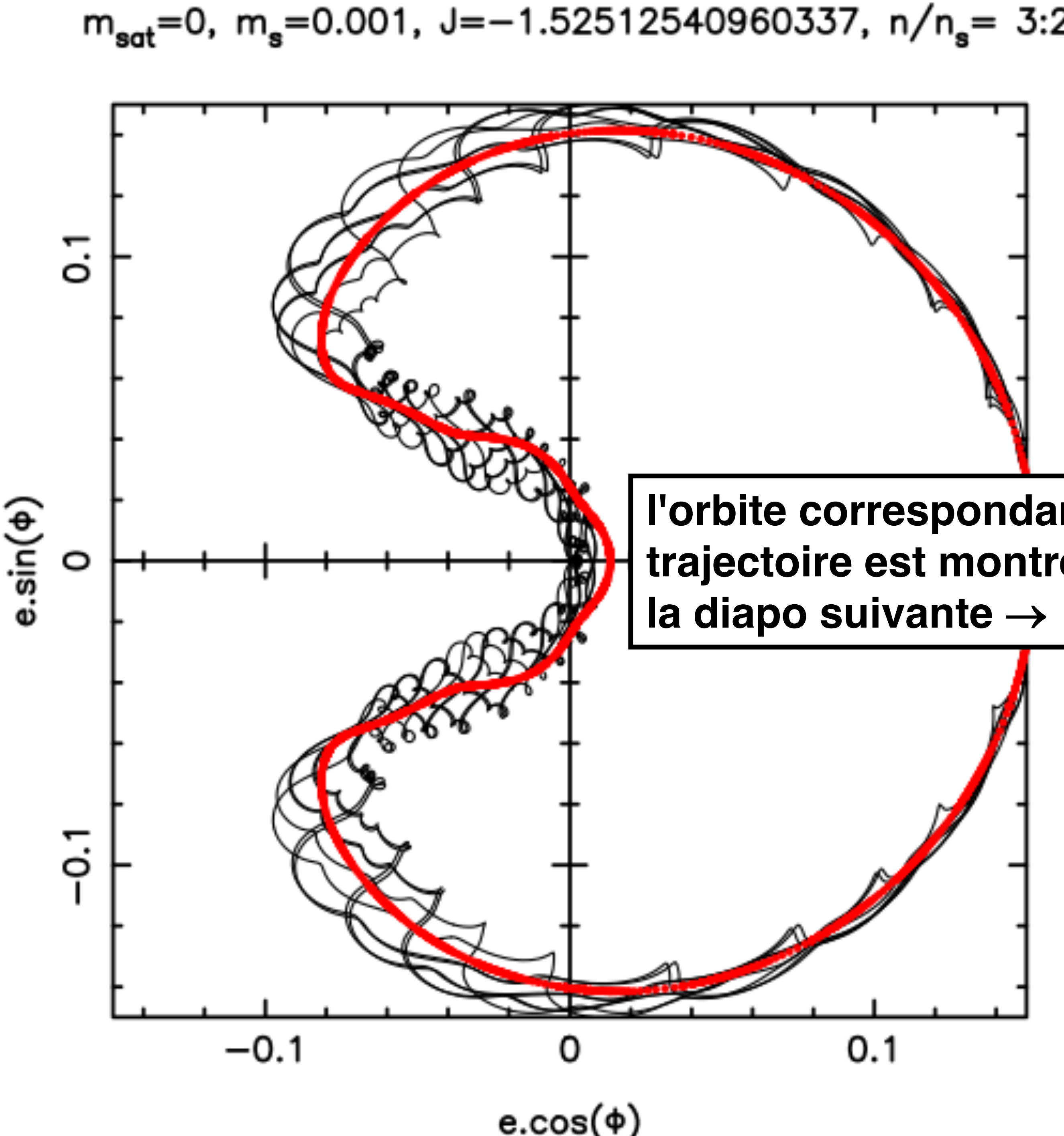
m_sat=0, m_s=0.001, J=−1.52512540960337, n/n_s= 3:2
orbite périodique
x
y
−1
−0.5
0
0.5
1



m_{sat}=0, m_s=0.001, J=−1.52512540960337, n/n_s= 3:2
orbite en
libration
y
x
−1
−0.5
0
0.5
1

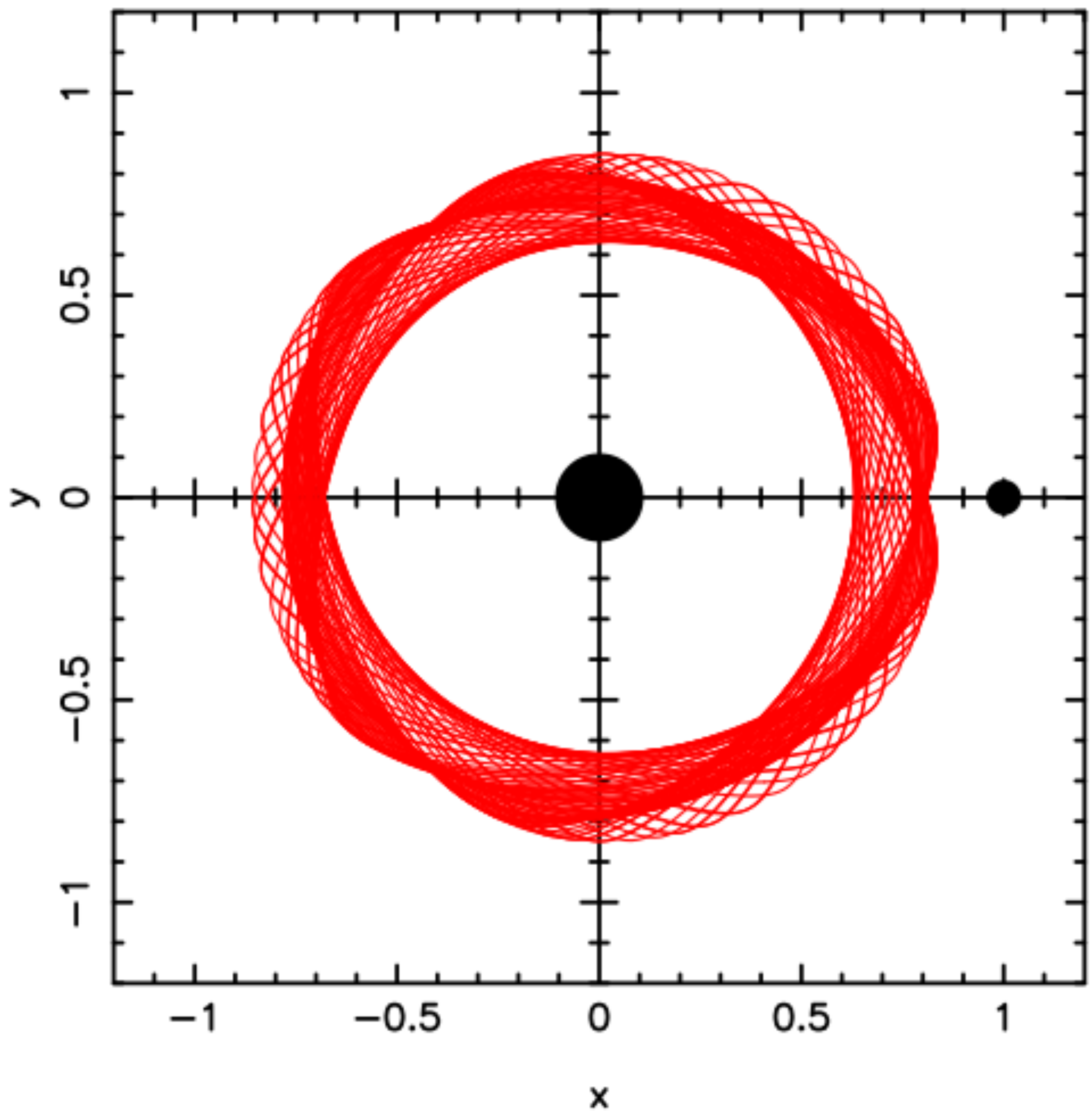
« mécanisme de protection »

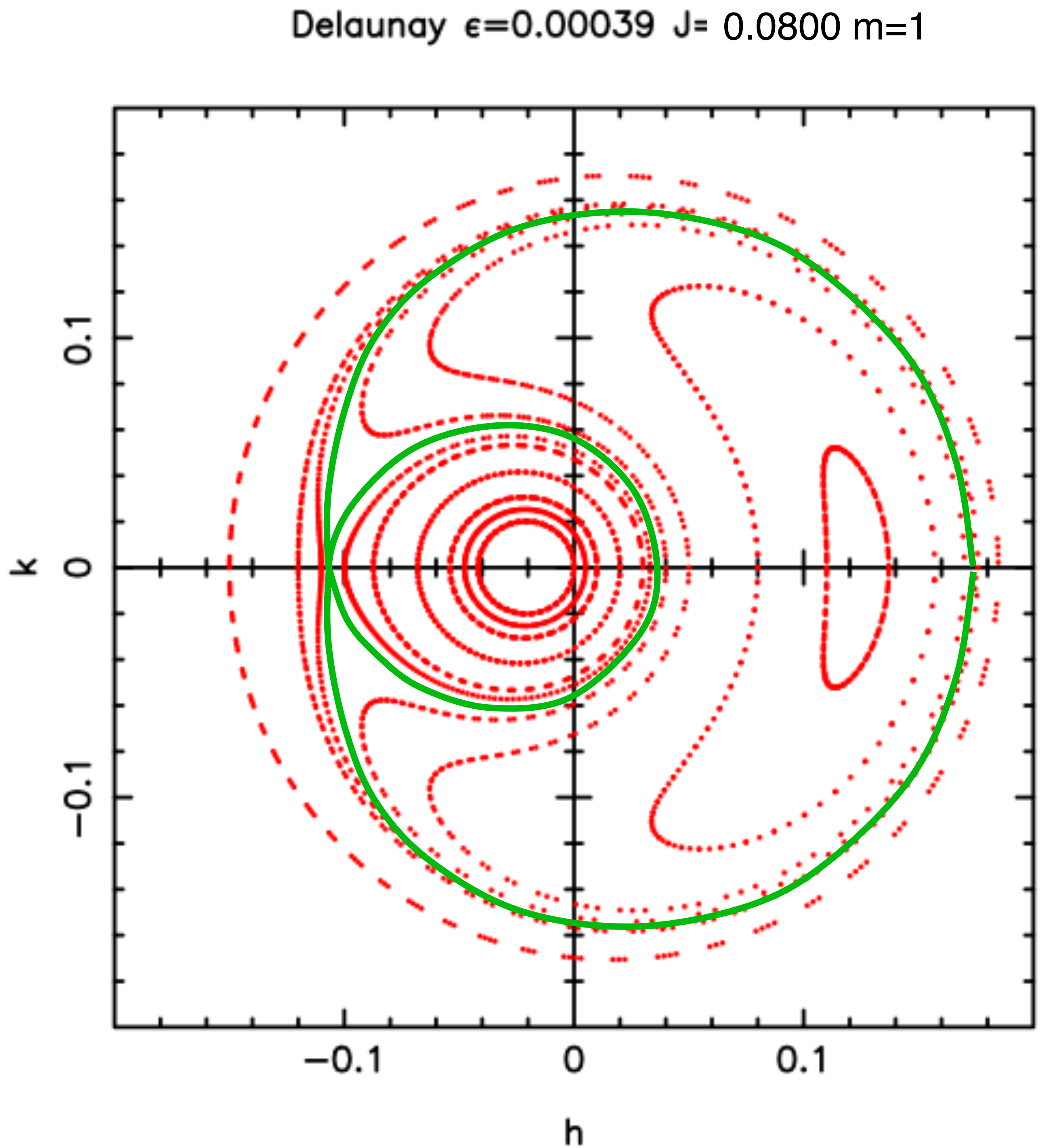




l'orbite correspondant à cette trajectoire est montrée dans la diapo suivante →

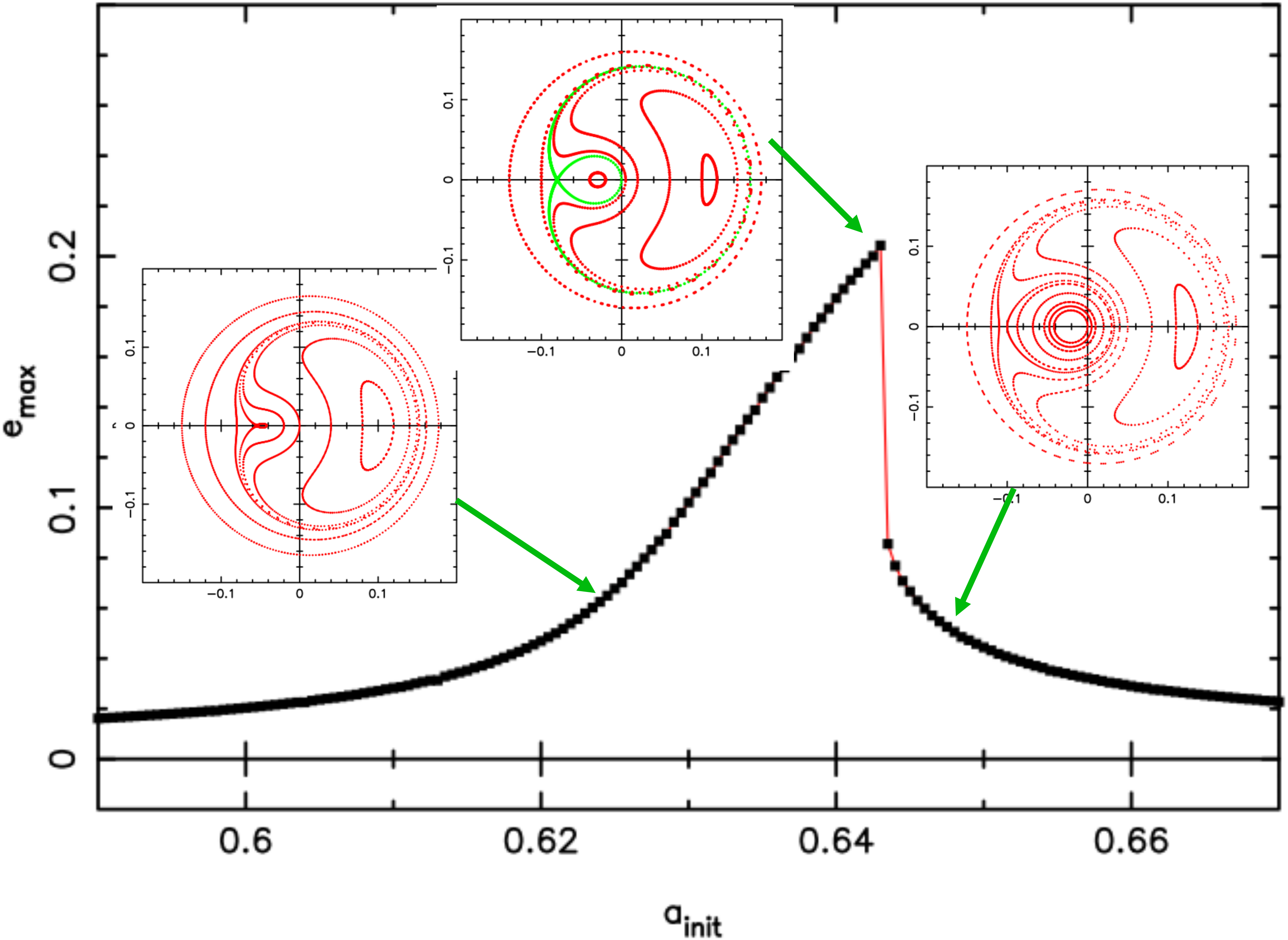
m_{sat}=0, m_s=0.001, J=−1.52512540960337, n/n_s= 3:2



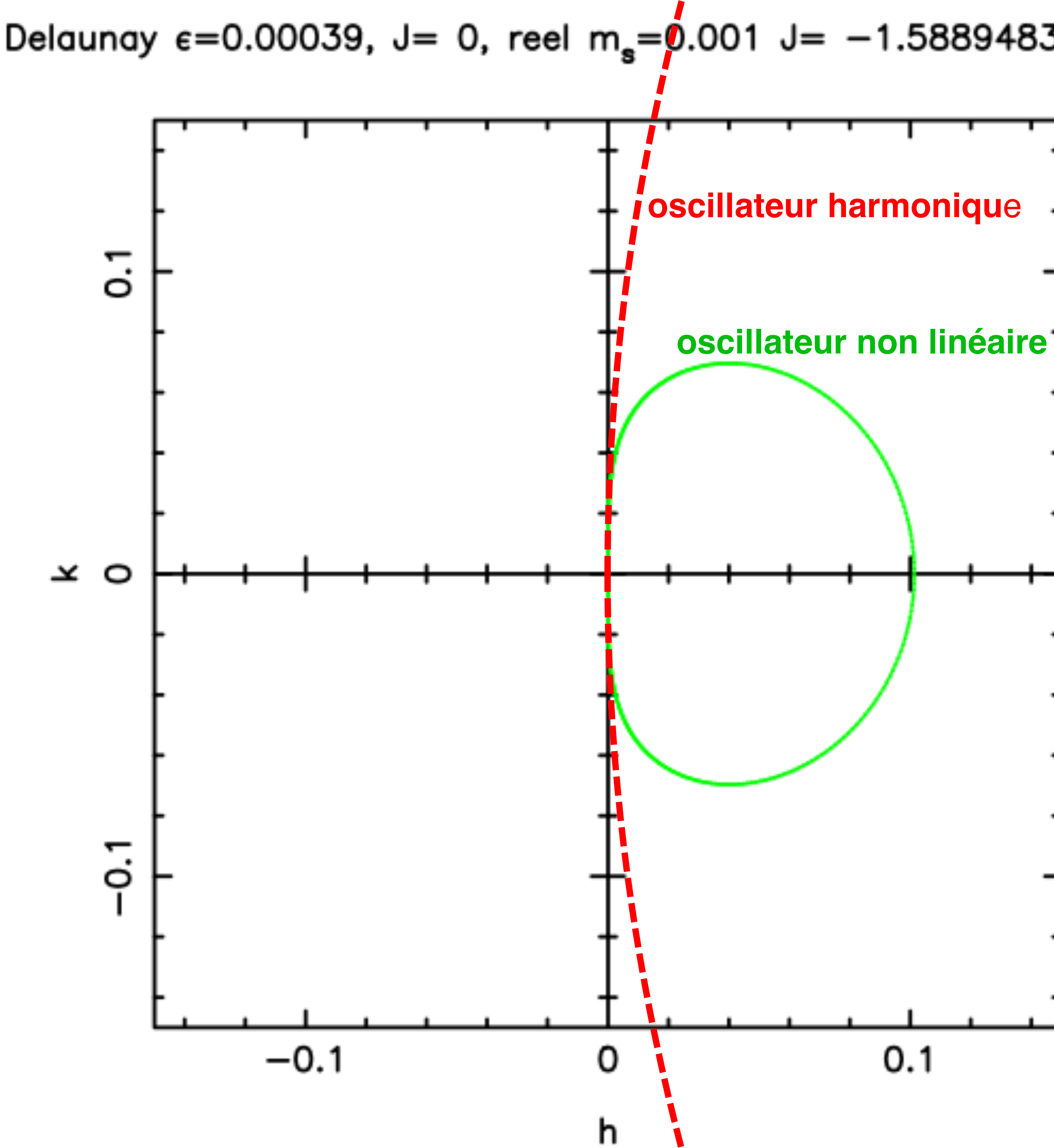


astéroïde de
masse nulle
(pb restreint) en
résonance 2:1
avec Jupiter, de
masse m_s= 0.00
(relative au Sole

J_C= +0.08

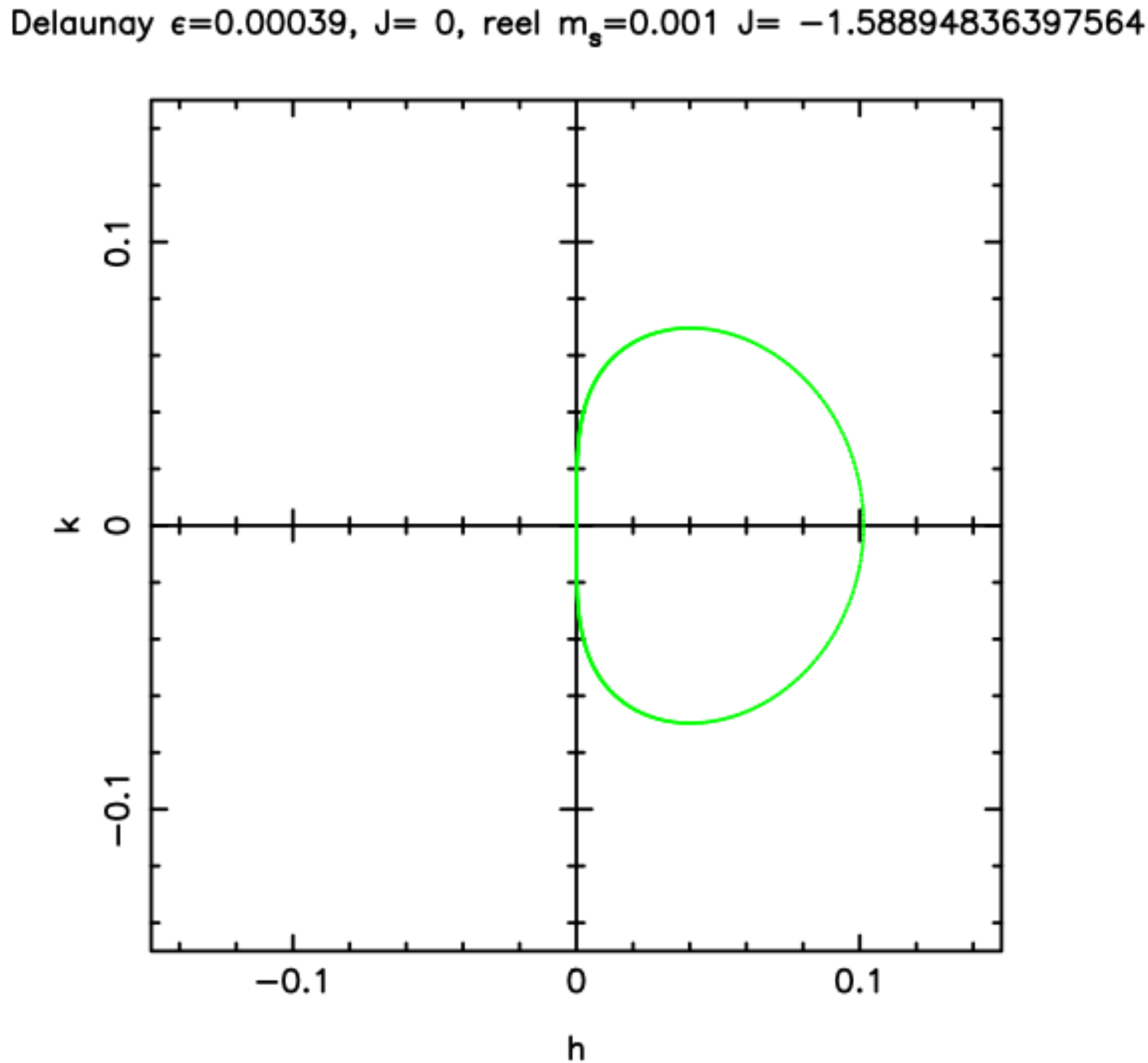


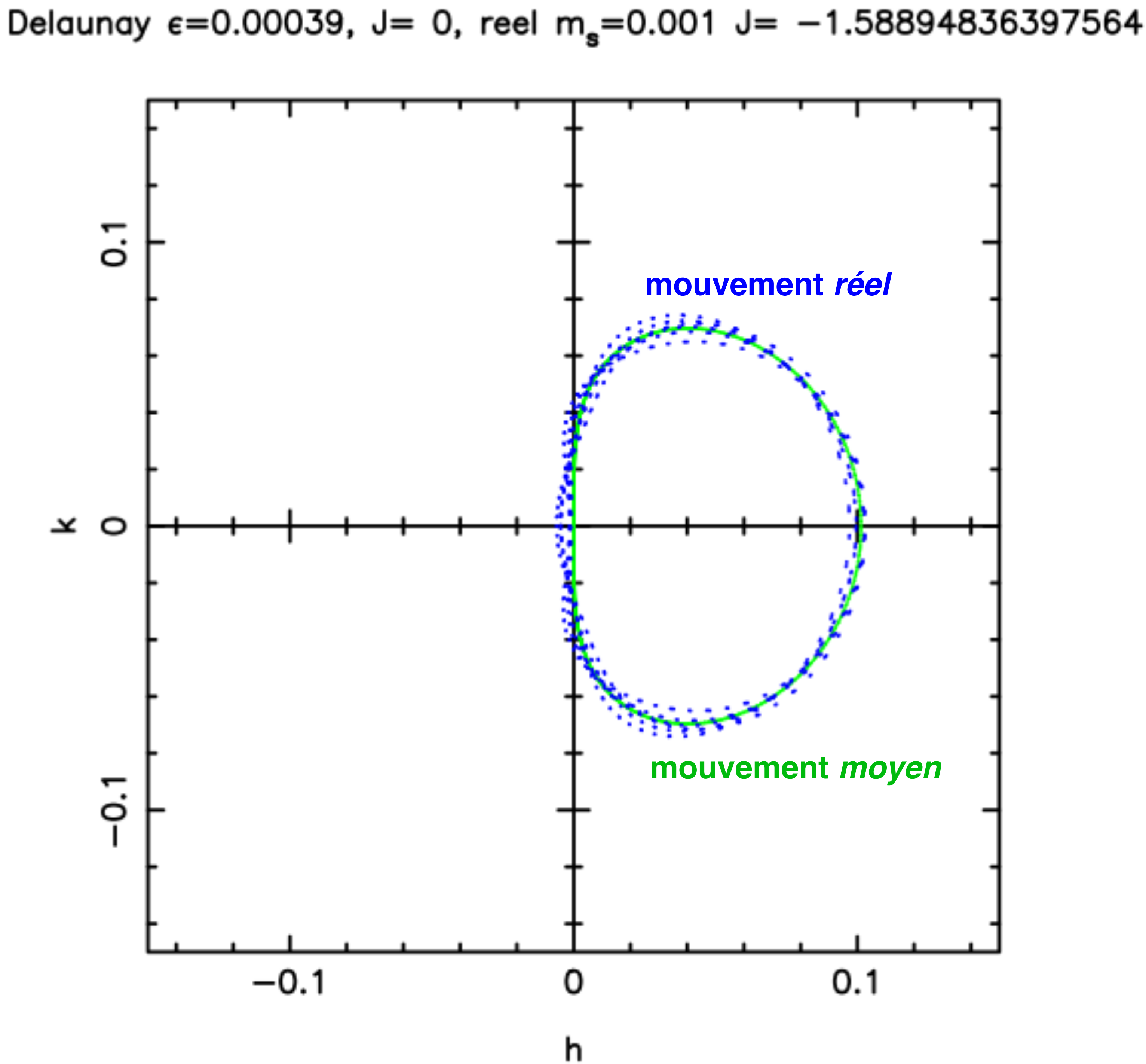
e_max
a_init
0
0.1
0.2
0.6
0.62
0.64
0.66
−0.1
0
0.1



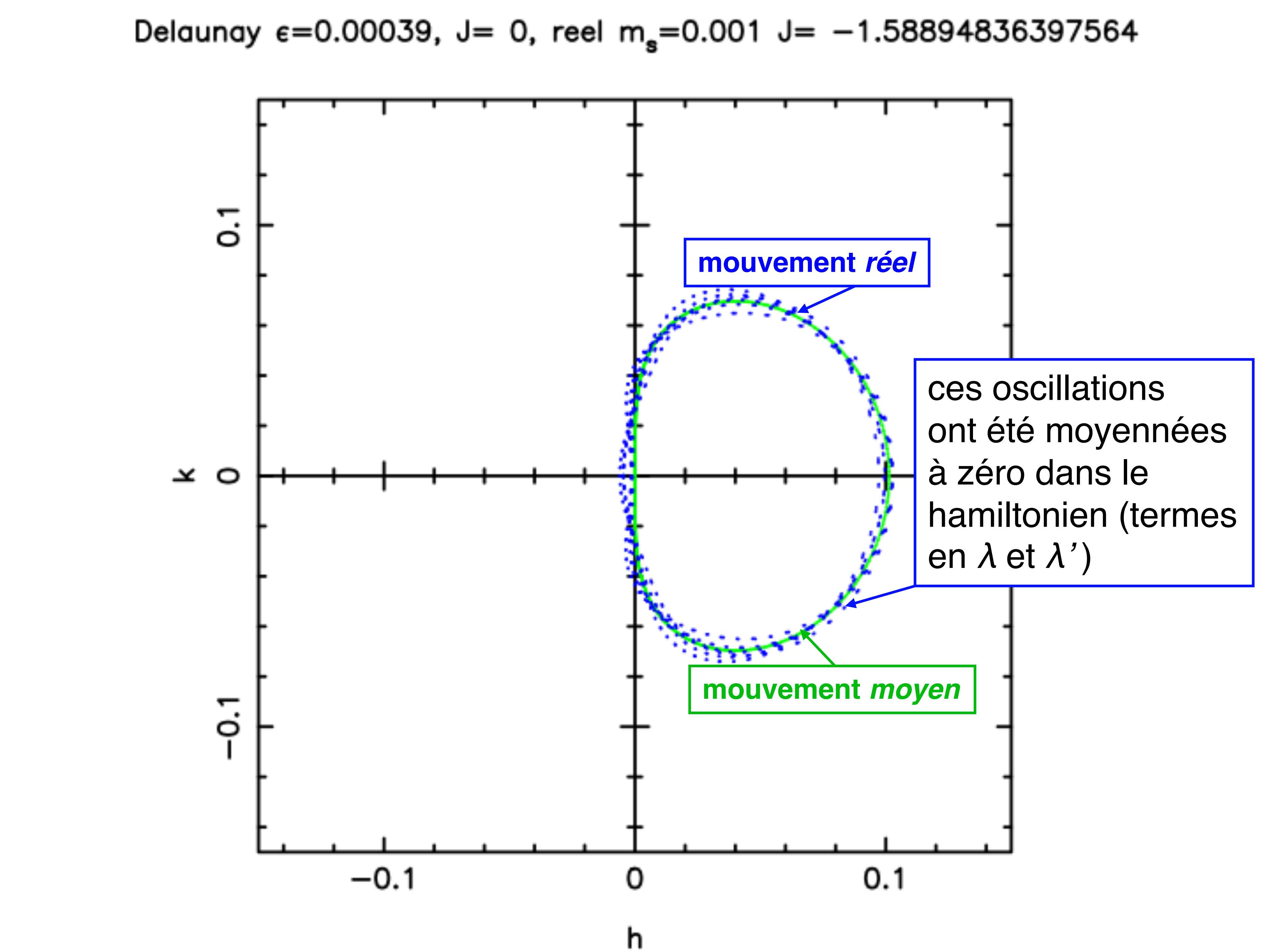
astéroïde de masse nulle (pb restreint) en résonance 2:1 avec Jupiter, de masse m_s= 0.00 (relative au Sole

J_C= -1.5889…

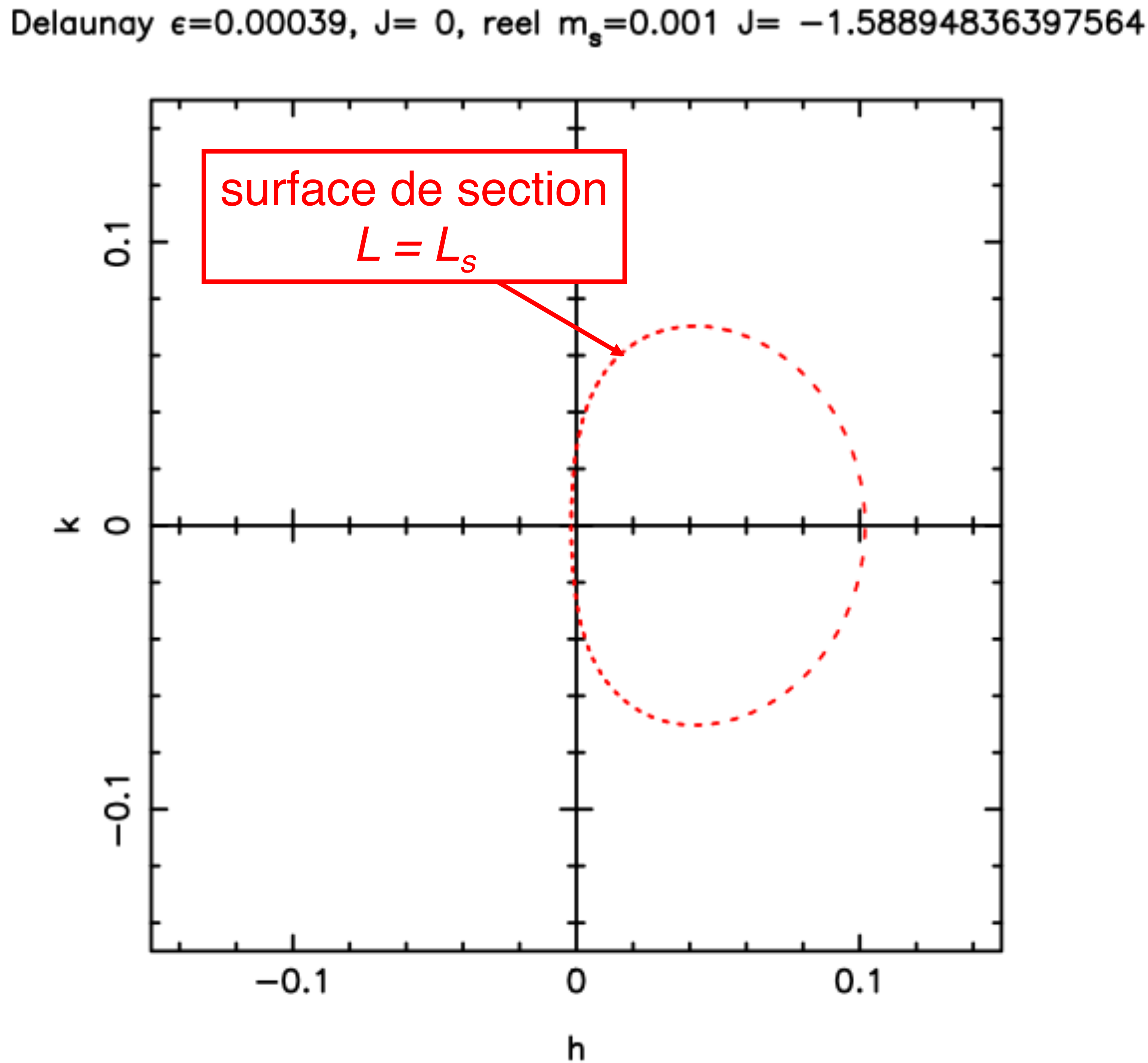

Delaunay ϵ=0.00039, J= 0, reel m_s=0.001 J= −1.58894836397564
0.1
0
−0.1
k
−0.1
0
0.1
h



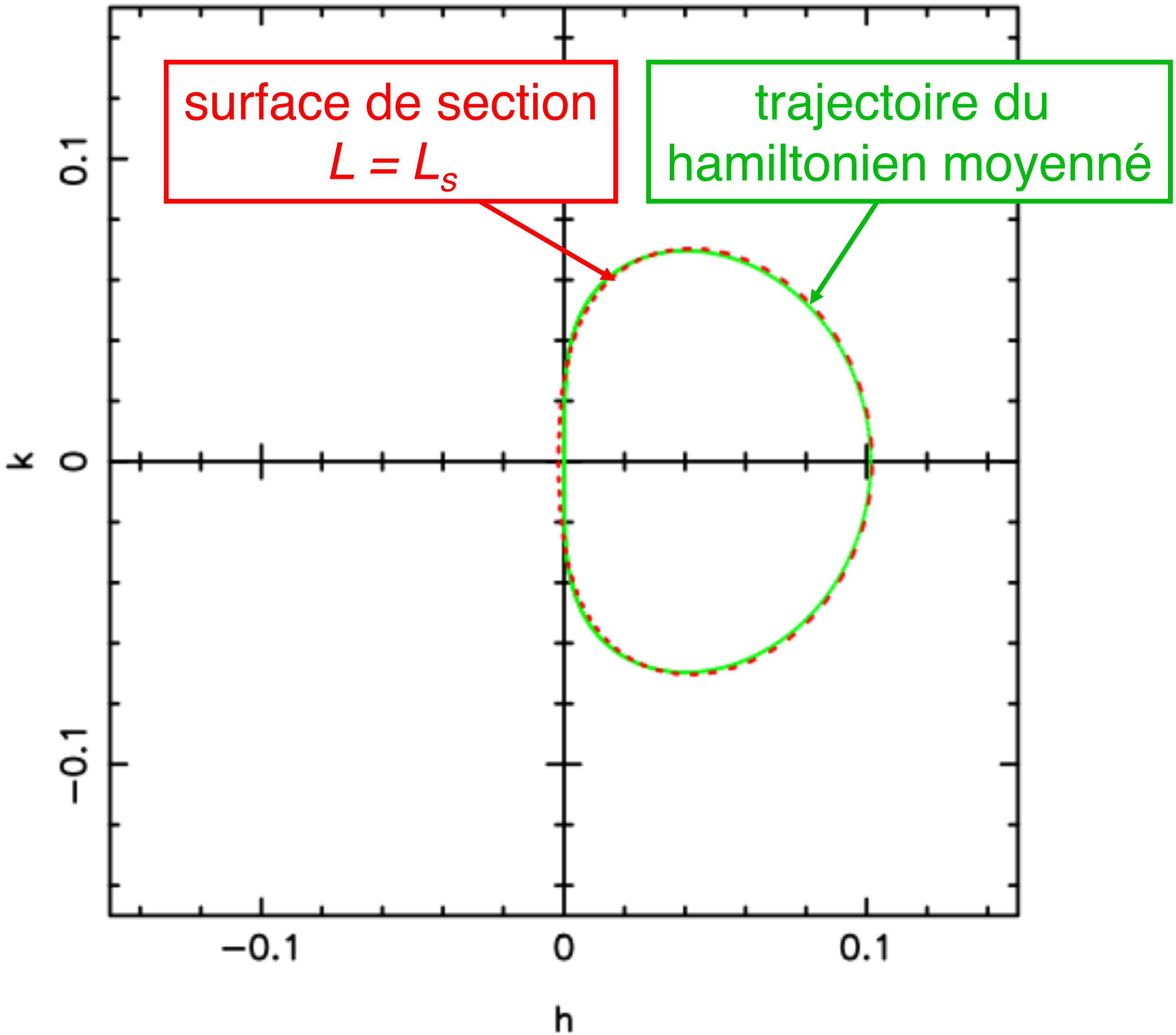
Delaunay ϵ=0.00039, J= 0, reel m_s=0.001 J= −1.58894836397564
mouvement *réel*
mouvement *moyen*
0.1
0
−0.1
k
−0.1
0
0.1
h

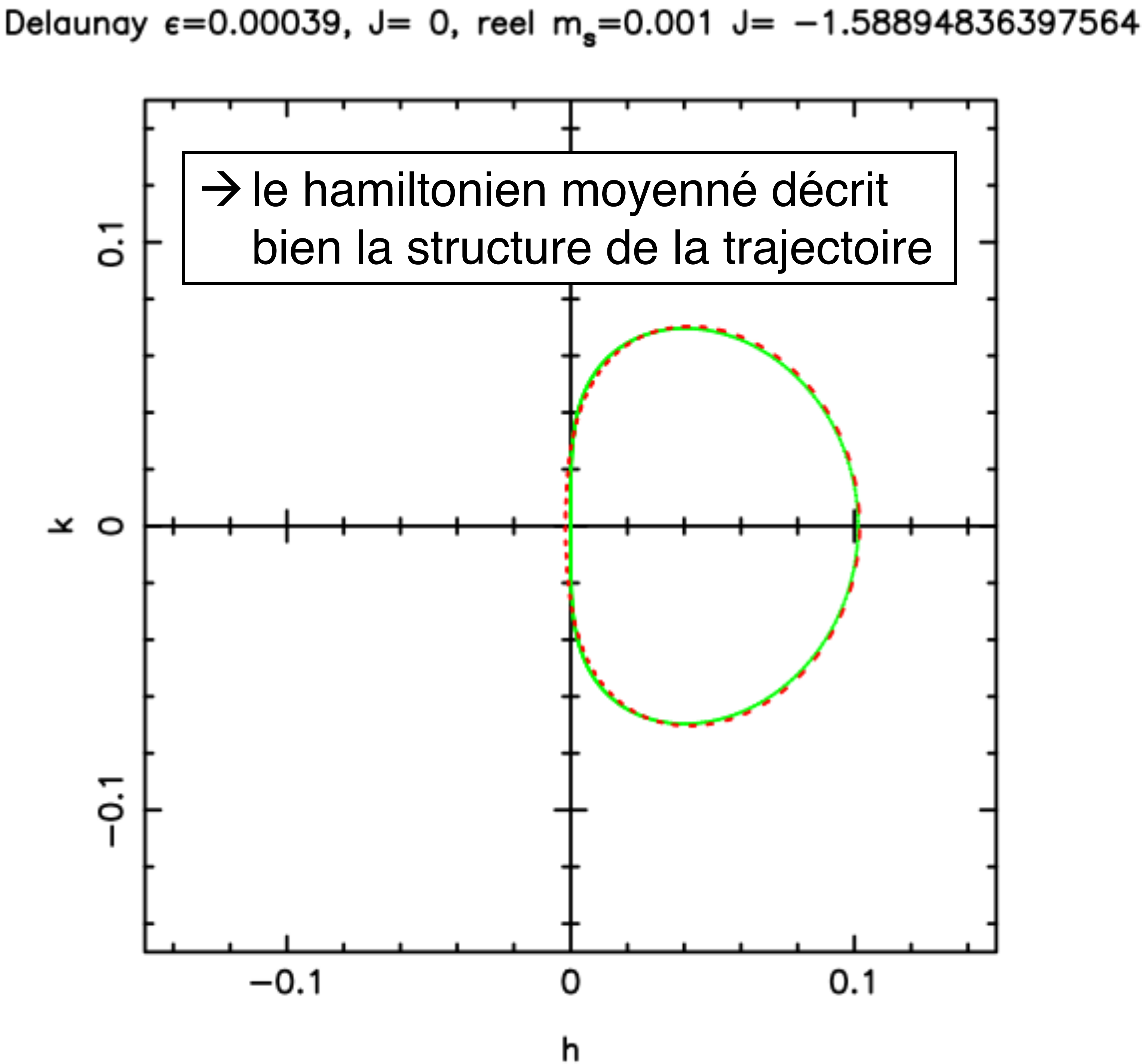


Delaunay ϵ=0.00039, J= 0, reel m$_s$=0.001 J= −1.58894836397564
0.1
0
−0.1
k
−0.1
0
0.1
h
mouvement *réel*
mouvement *moyen*
ces oscillations ont été moyennées à zéro dans le hamiltonien (termes en λ et λ')

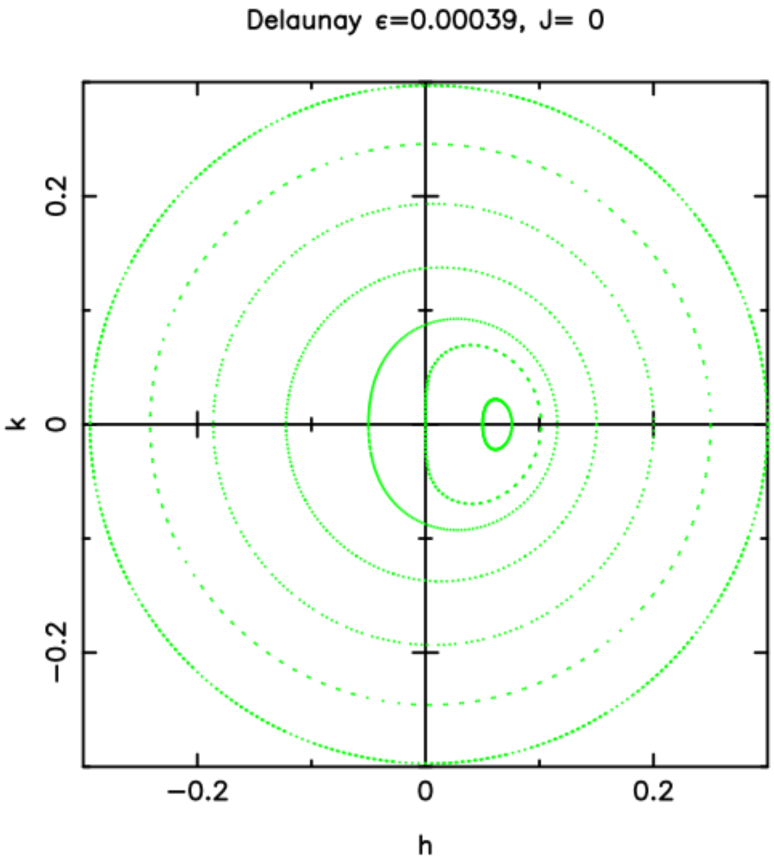

Delaunay ϵ=0.00039, J= 0, reel m_s=0.001 J= −1.58894836397564
surface de section
$L = L_s$
0.1
0
−0.1
k
−0.1
0
0.1
h

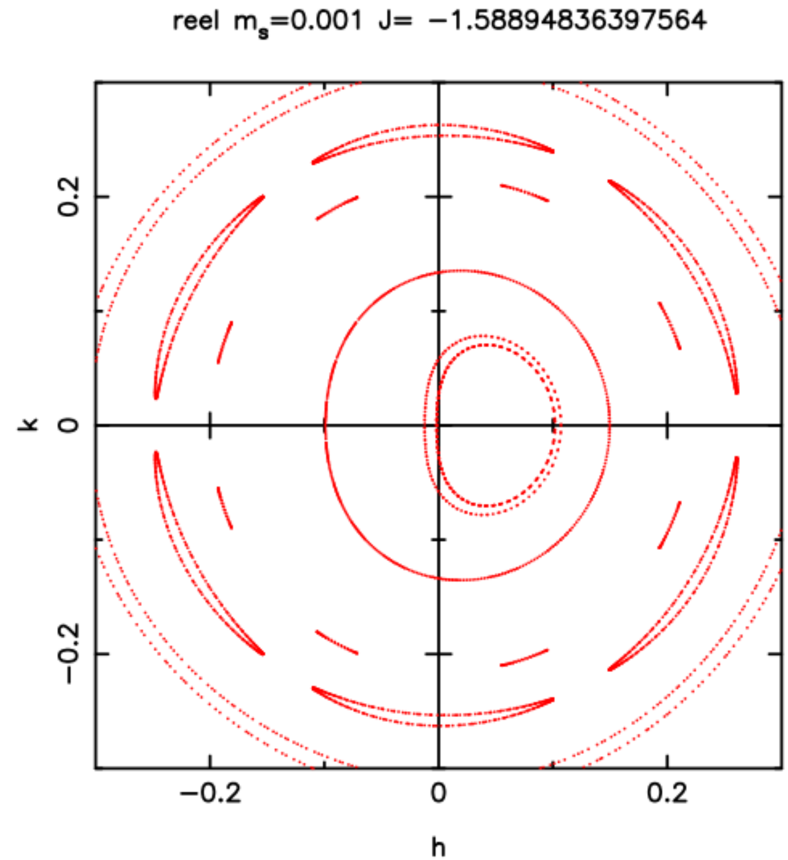
Delaunay ϵ=0.00039, J= 0, reel m_s=0.001 J= −1.58894836397564





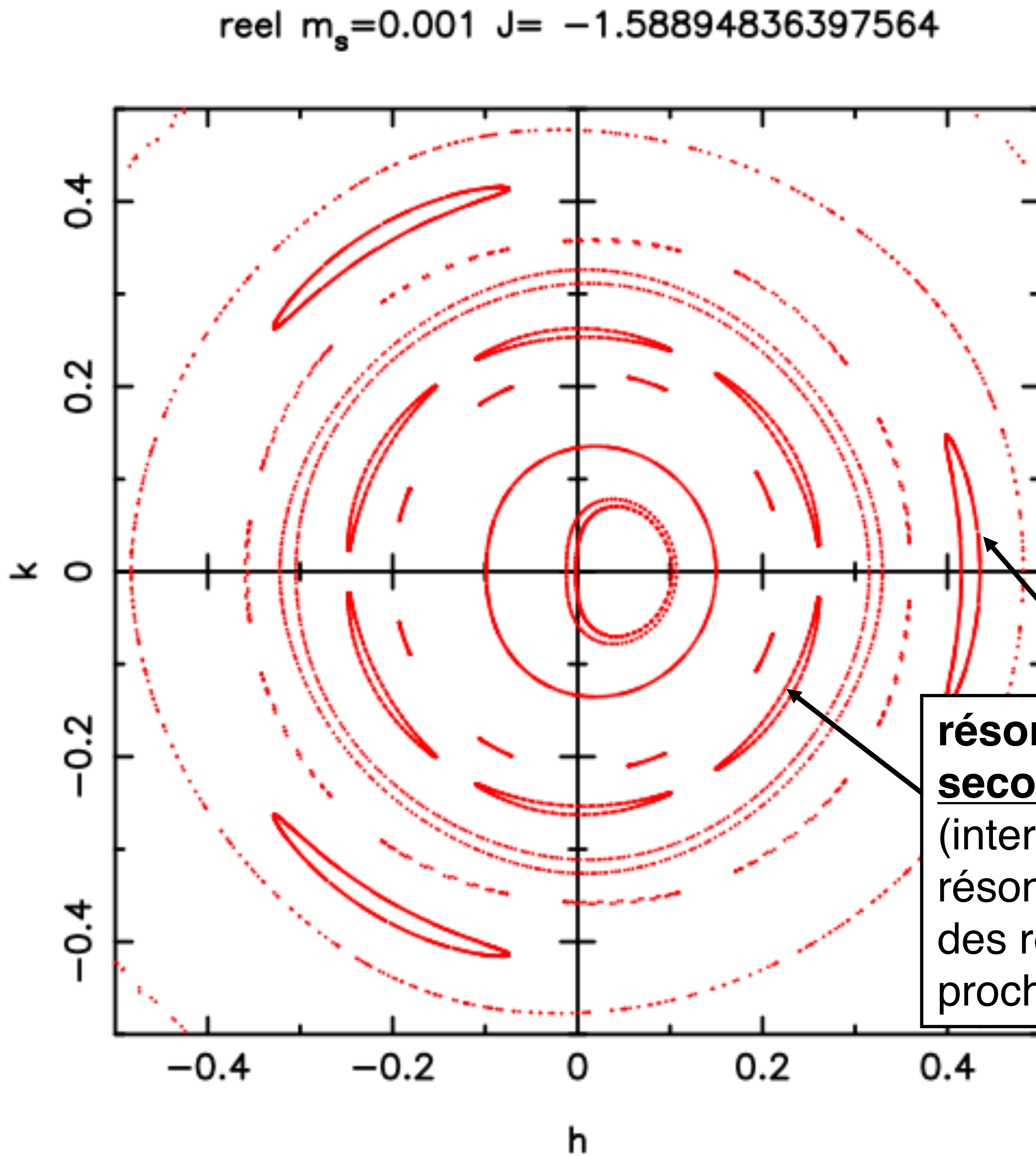
→ le hamiltonien moyenné décrit bien la structure de la trajectoire mais cela n'est plus vrai pour les grandes excentricités



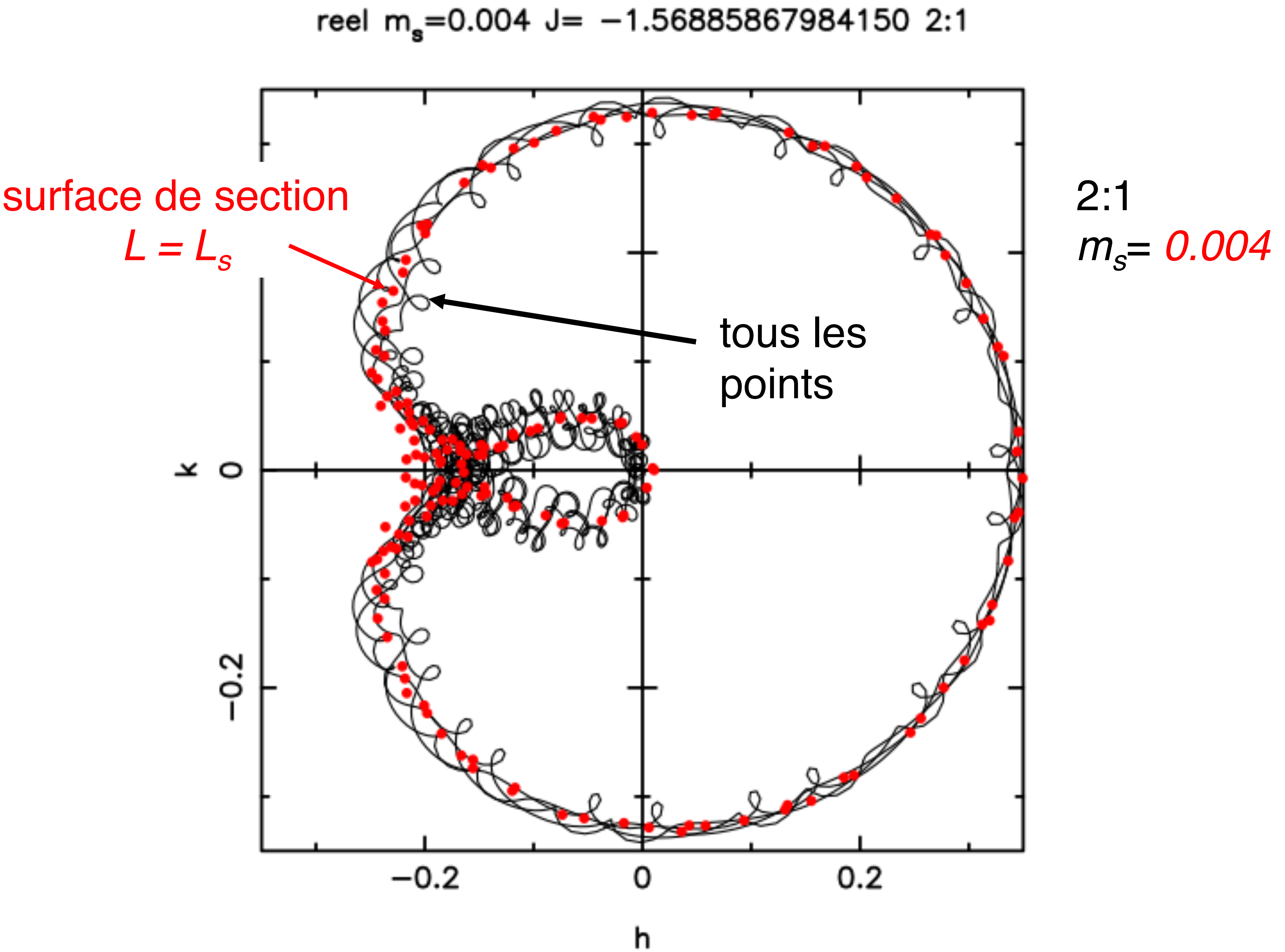


trajectoires du pb *moyenné*

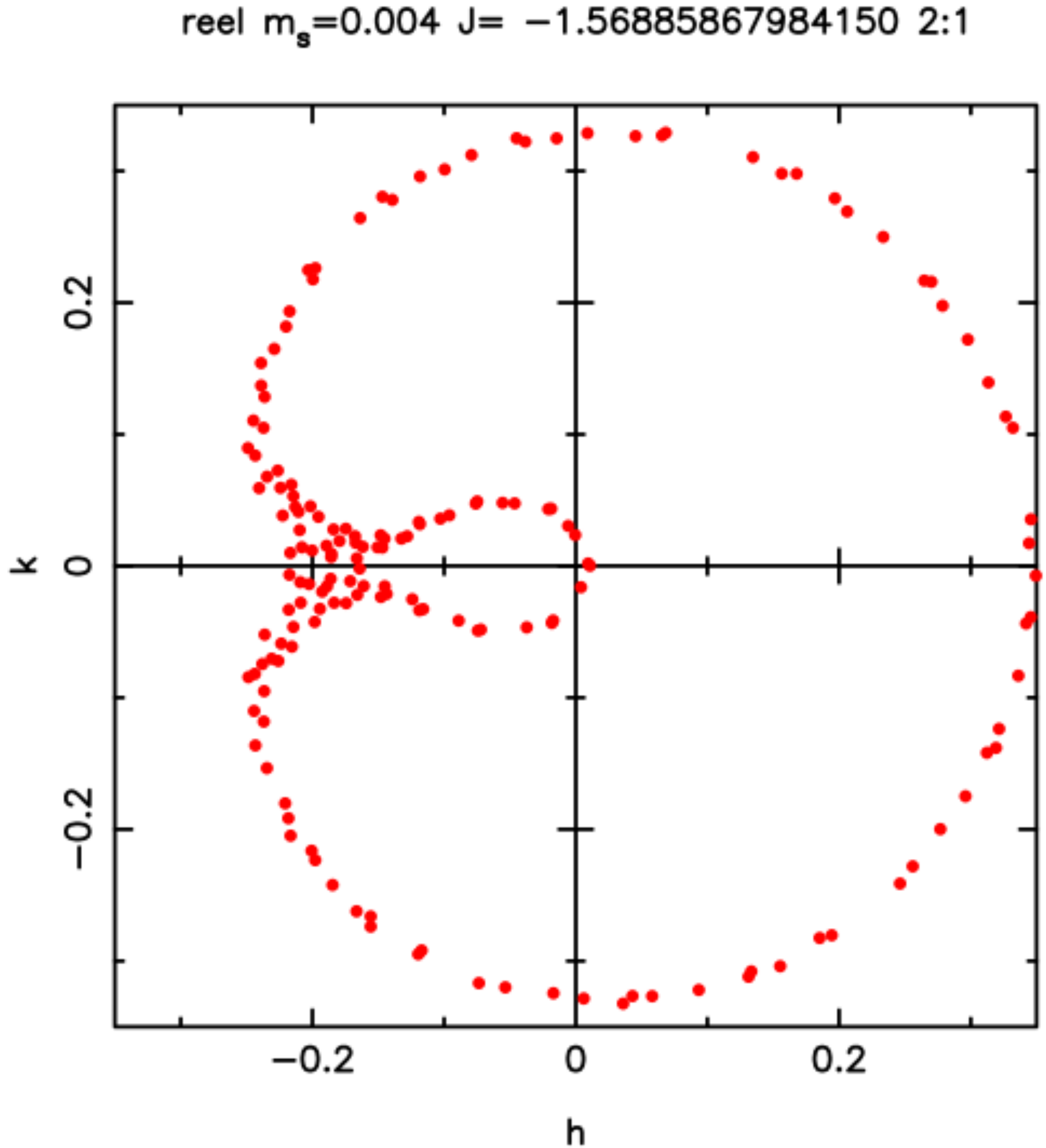
trajectoires du pb *réel* (surface de section, pb circulaire, $L=L_s$)



résonances
<u>secondaires</u>
(interaction de la résonance 2:1 avec des résonances proches)

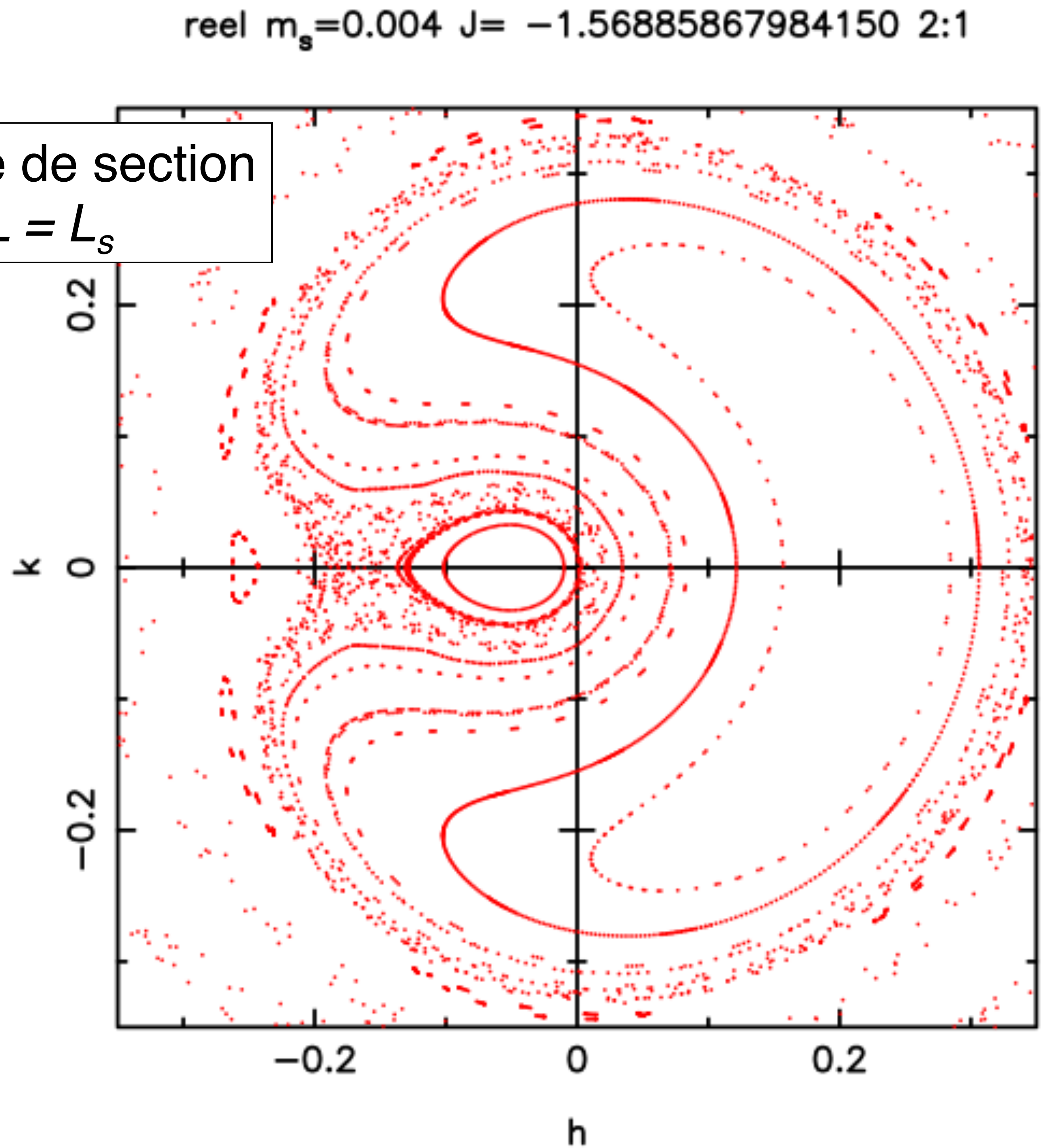


reel m_s=0.004 J= −1.56885867984150 2:1
surface de section
$L = L_s$
tous les
points
2:1
m_s= 0.004
k
h
0
−0.2
0.2



2:1

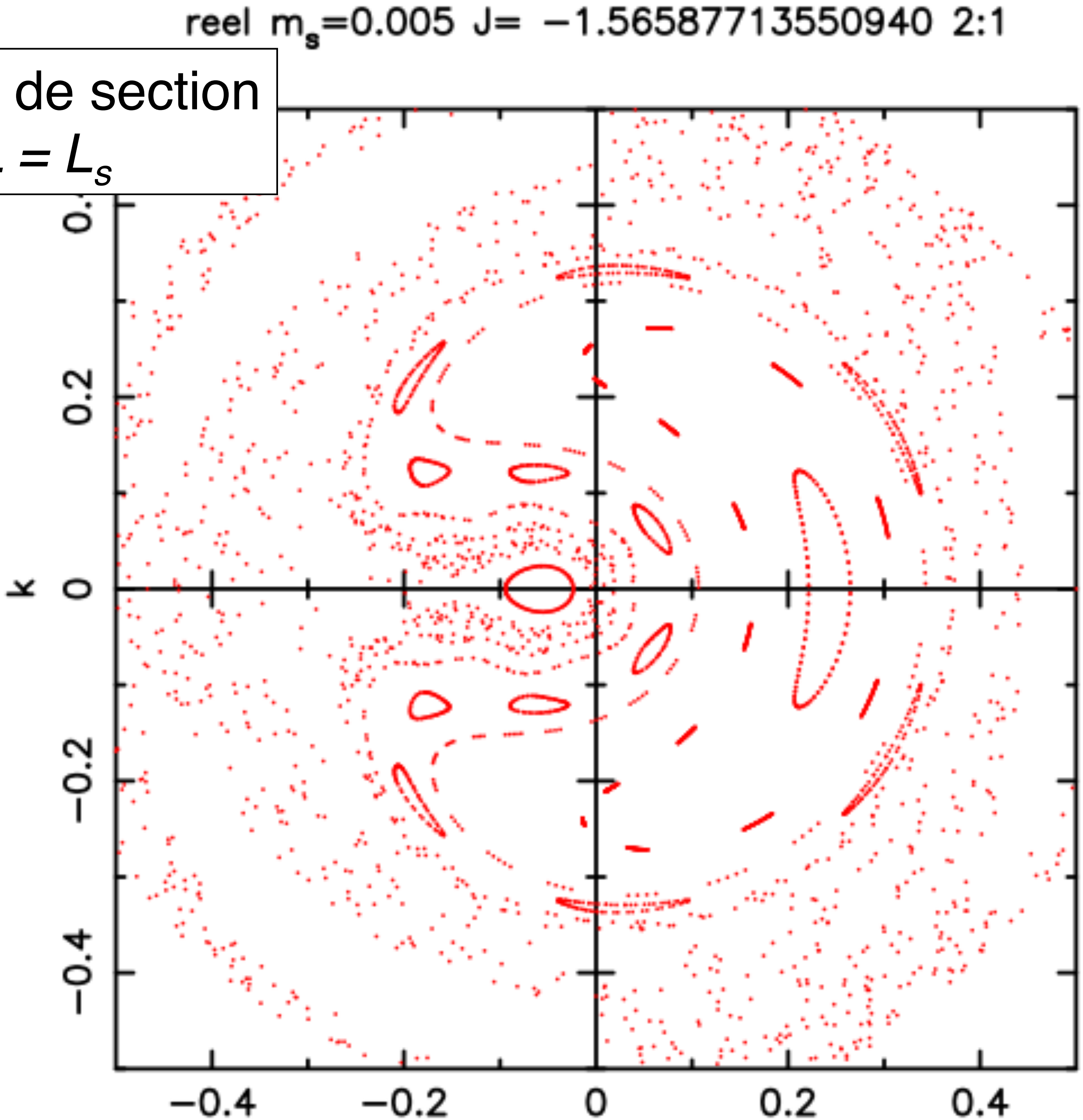
m_s= 0.004



surface de section
$L = L_s$

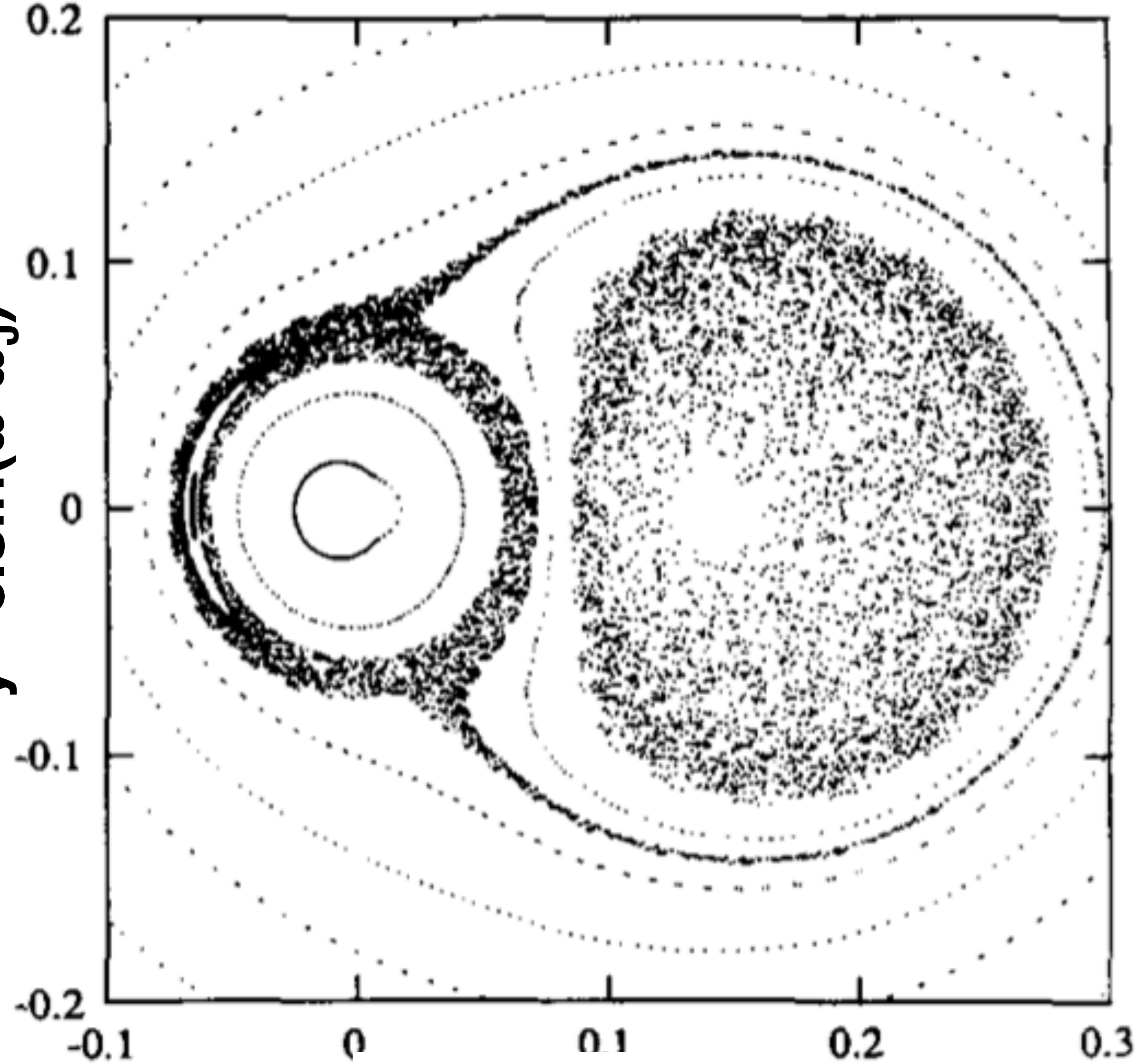
2:1
m_s= 0.004

surface de section
$L = L_s$



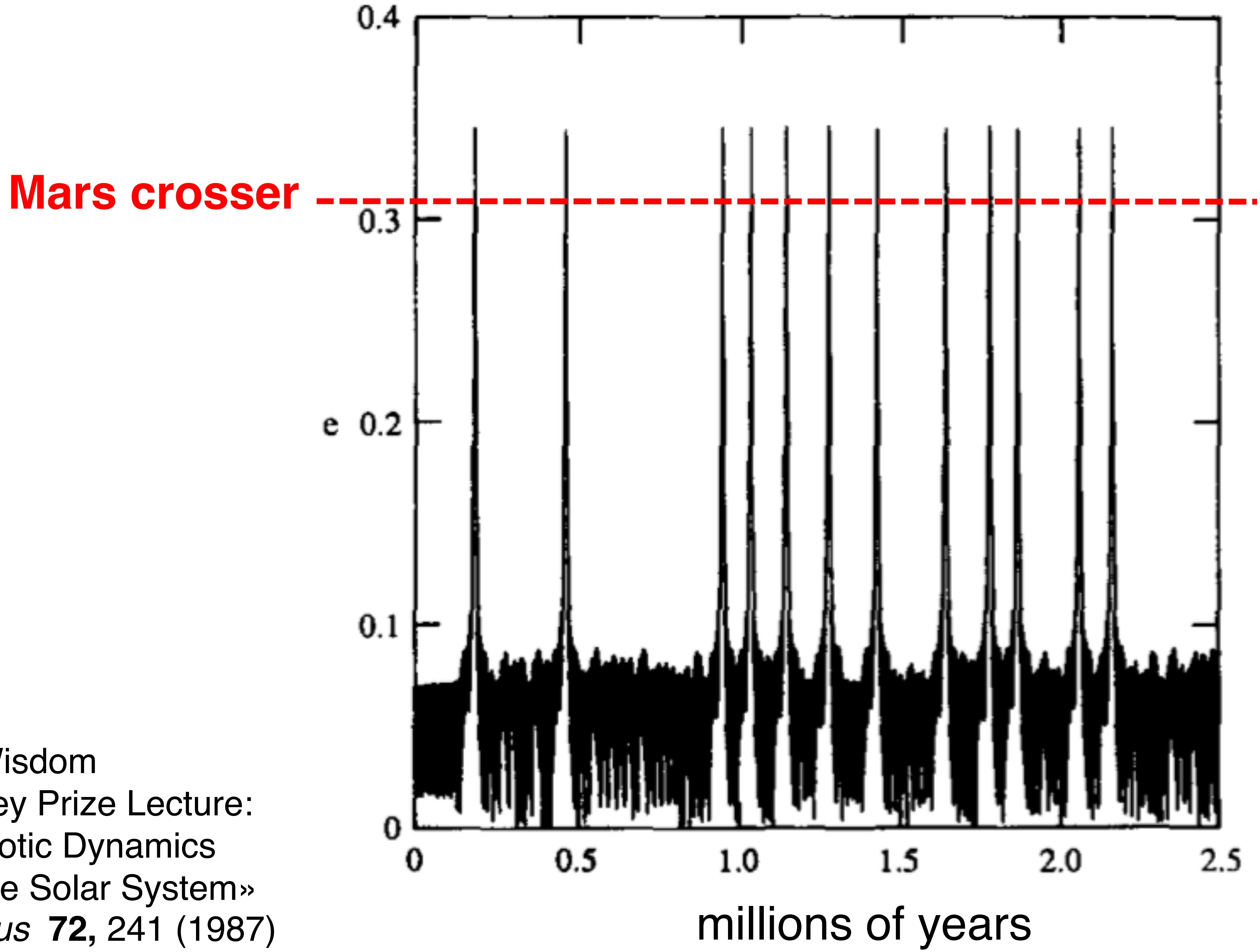
2:1
m_s= 0.005

surface de section de l'orbite précédente



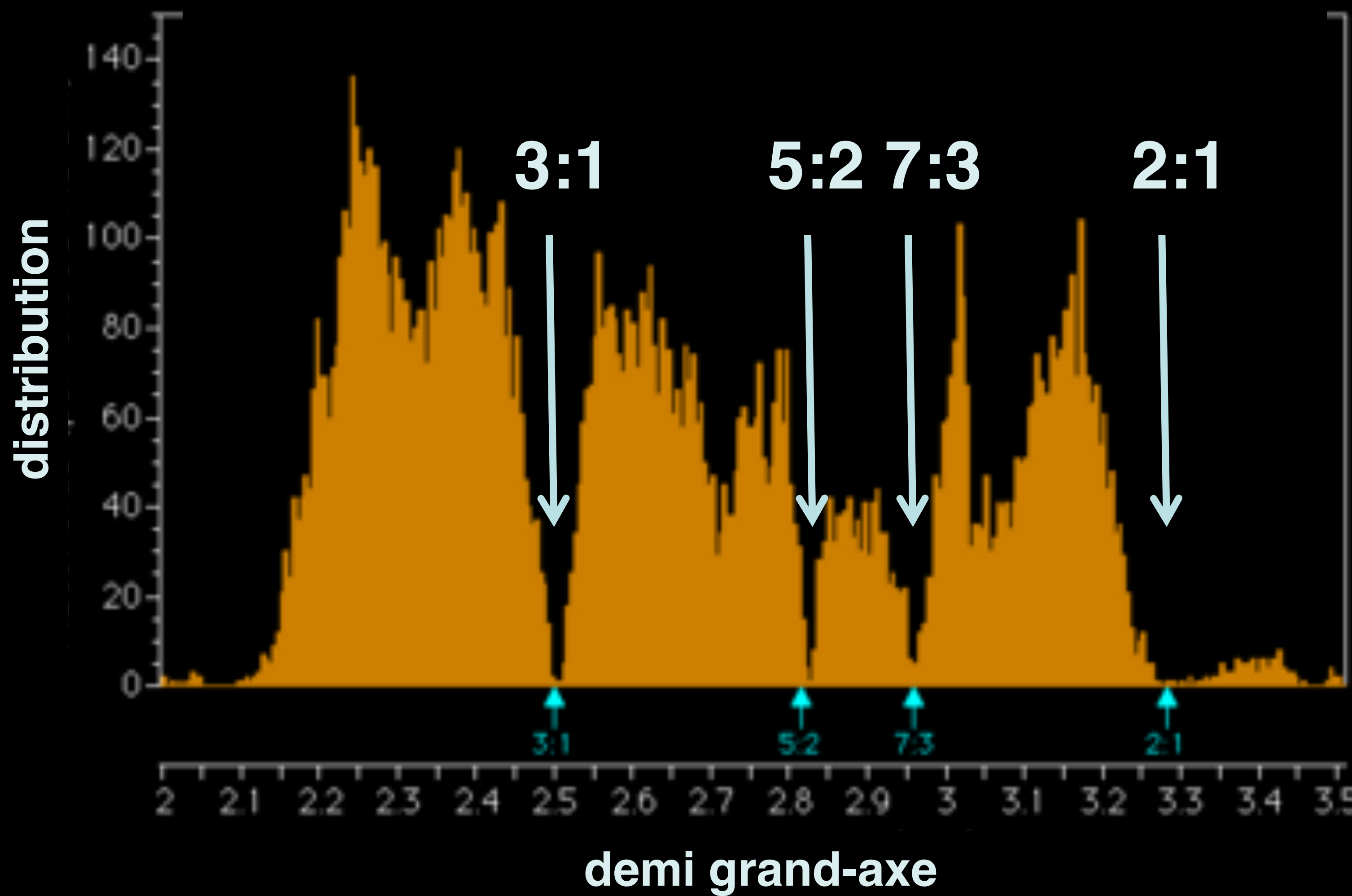
x= e.cos(ω-ω$_J$)

y= e.sin(ω-ω$_J$)



J. Wisdom
«Urey Prize Lecture:
Chaotic Dynamics
in the Solar System»
Icarus **72,** 241 (1987)

les résonance de moyen mouvement
exemple des divisions de Kirkwood
ceinture principale d’astéroïdes



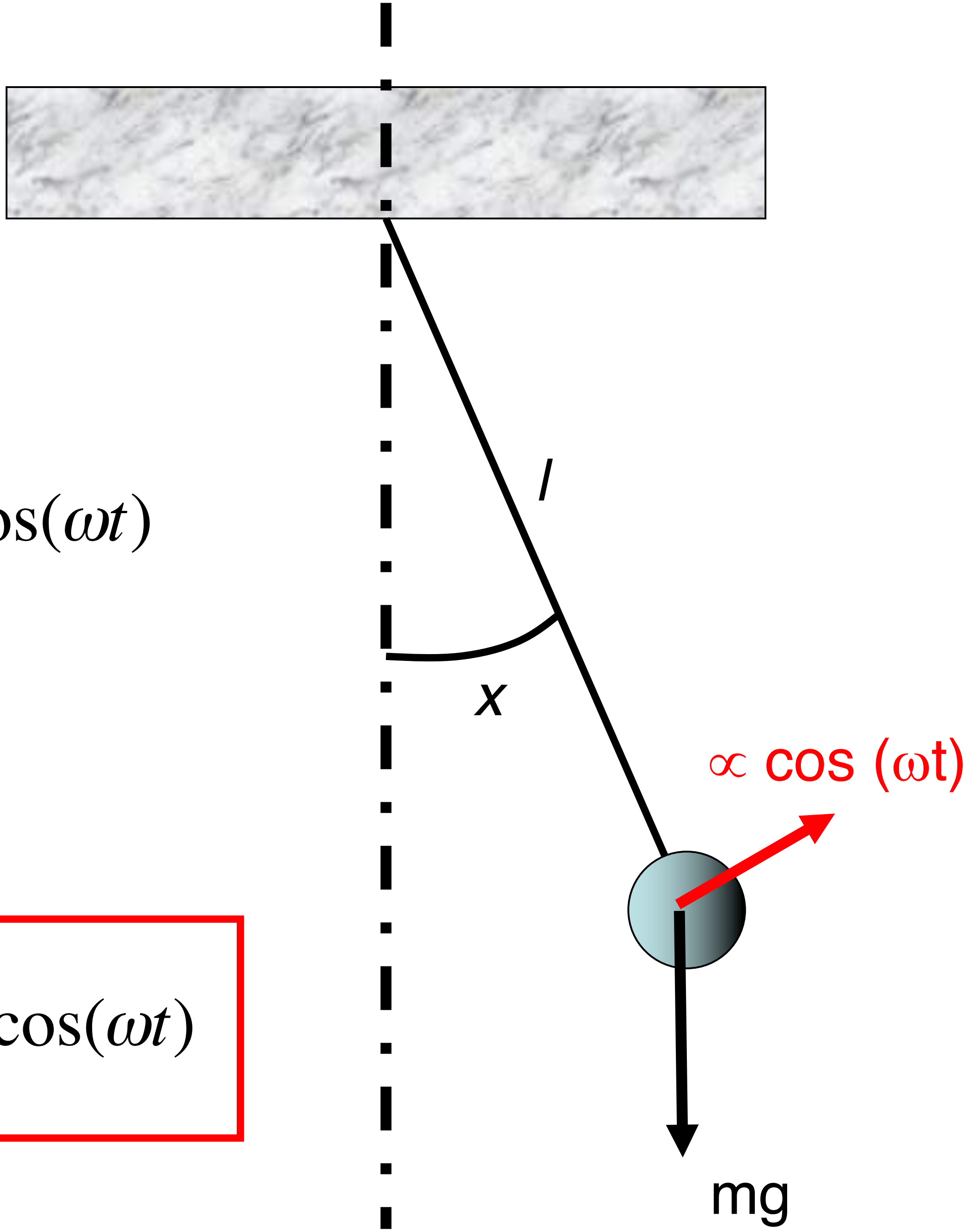
ressemblance avec le pendule simple…

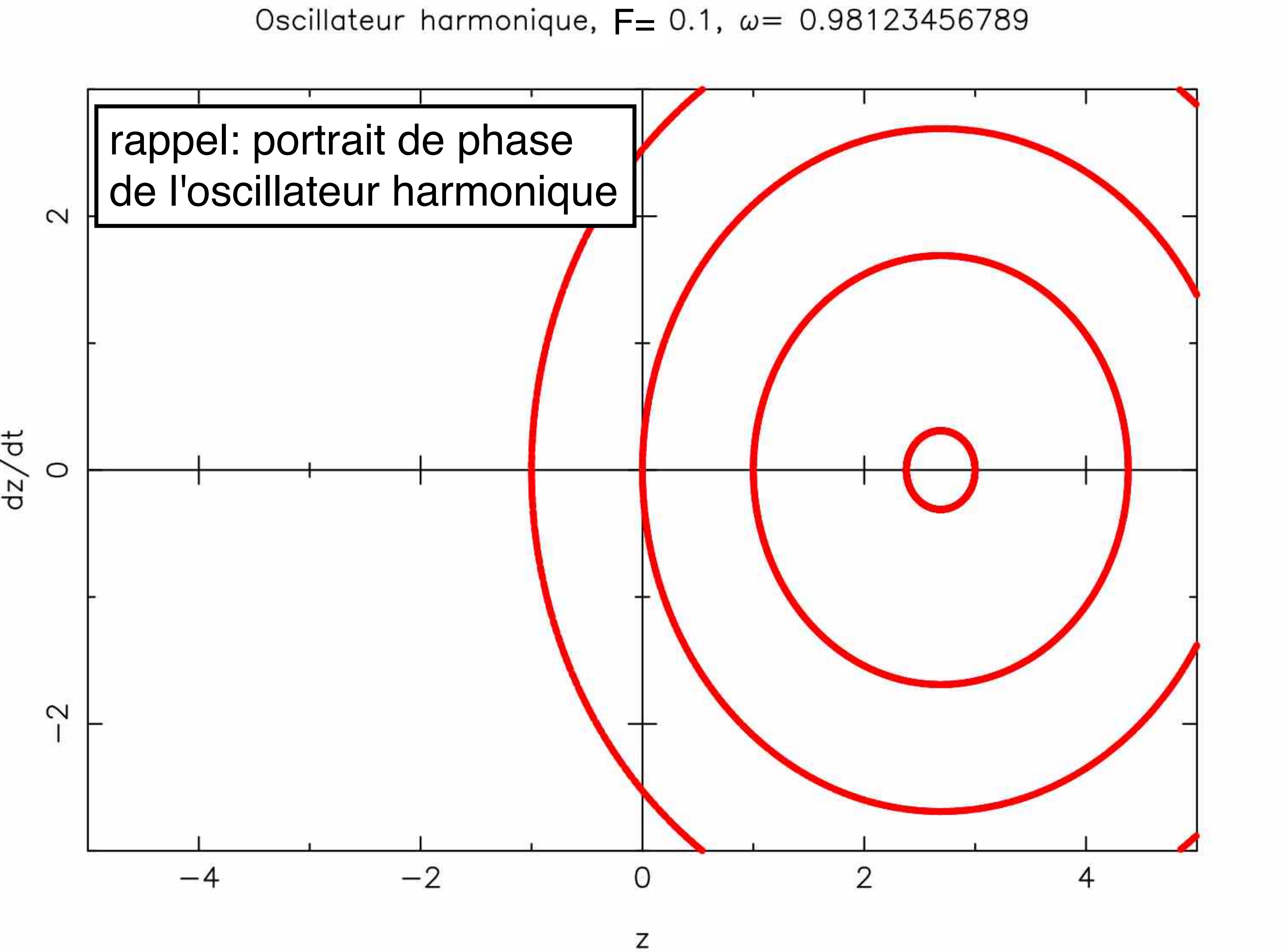
"toy model":

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}\cdot\sin(x) + F\cdot\cos(\omega t)$$

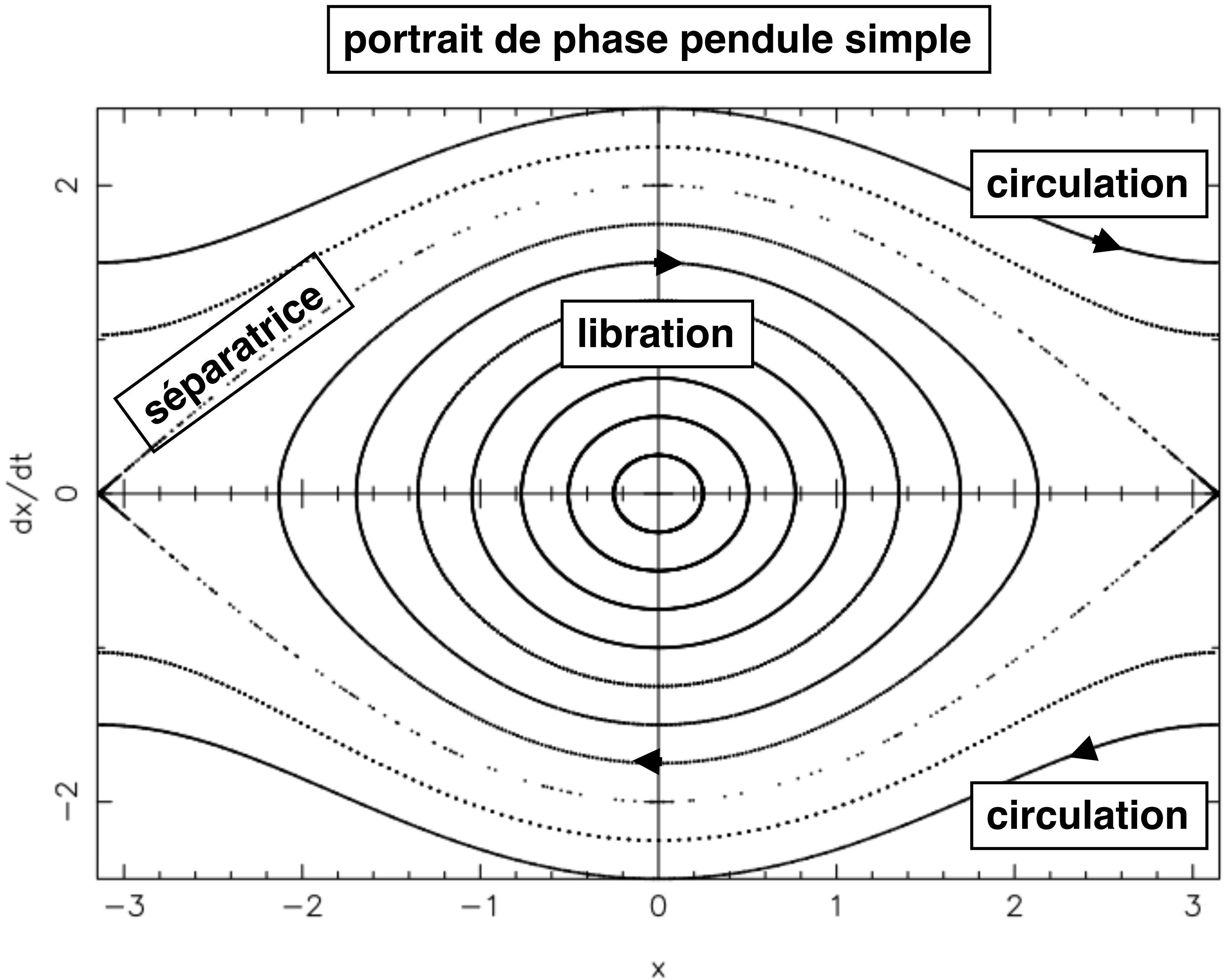
soit :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0{}^2\cdot\sin(x) + F\cdot\cos(\omega t)}$$

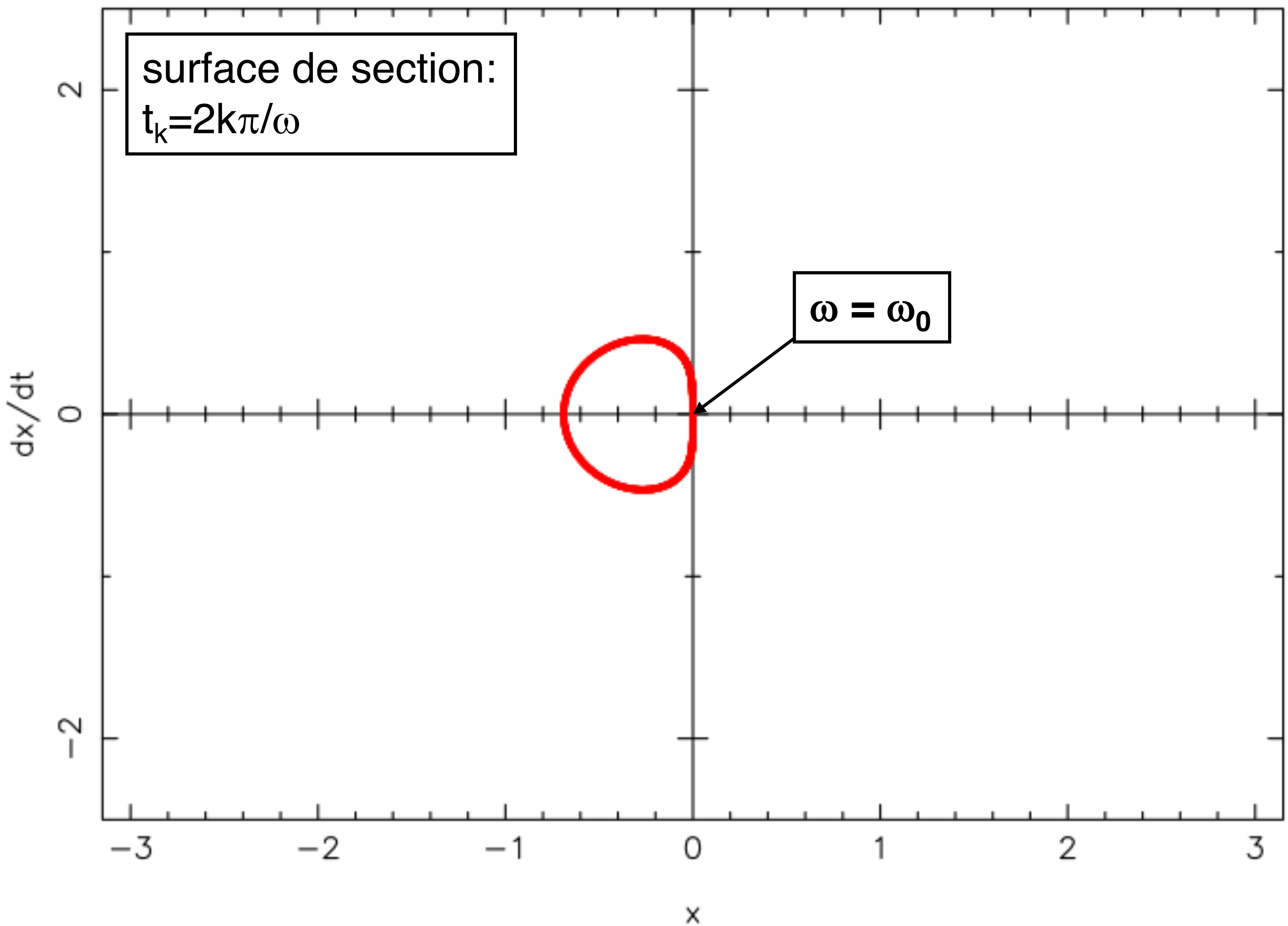


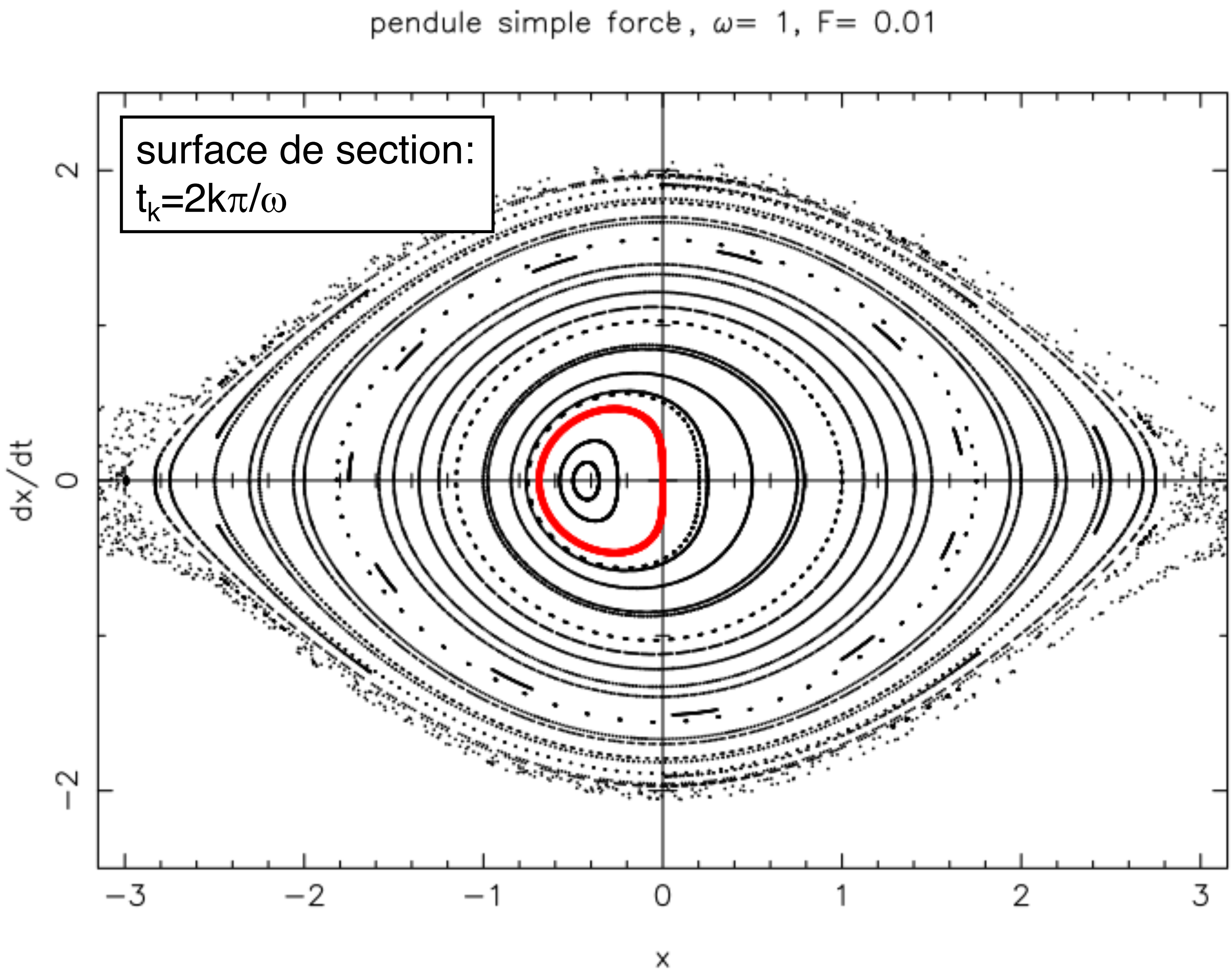


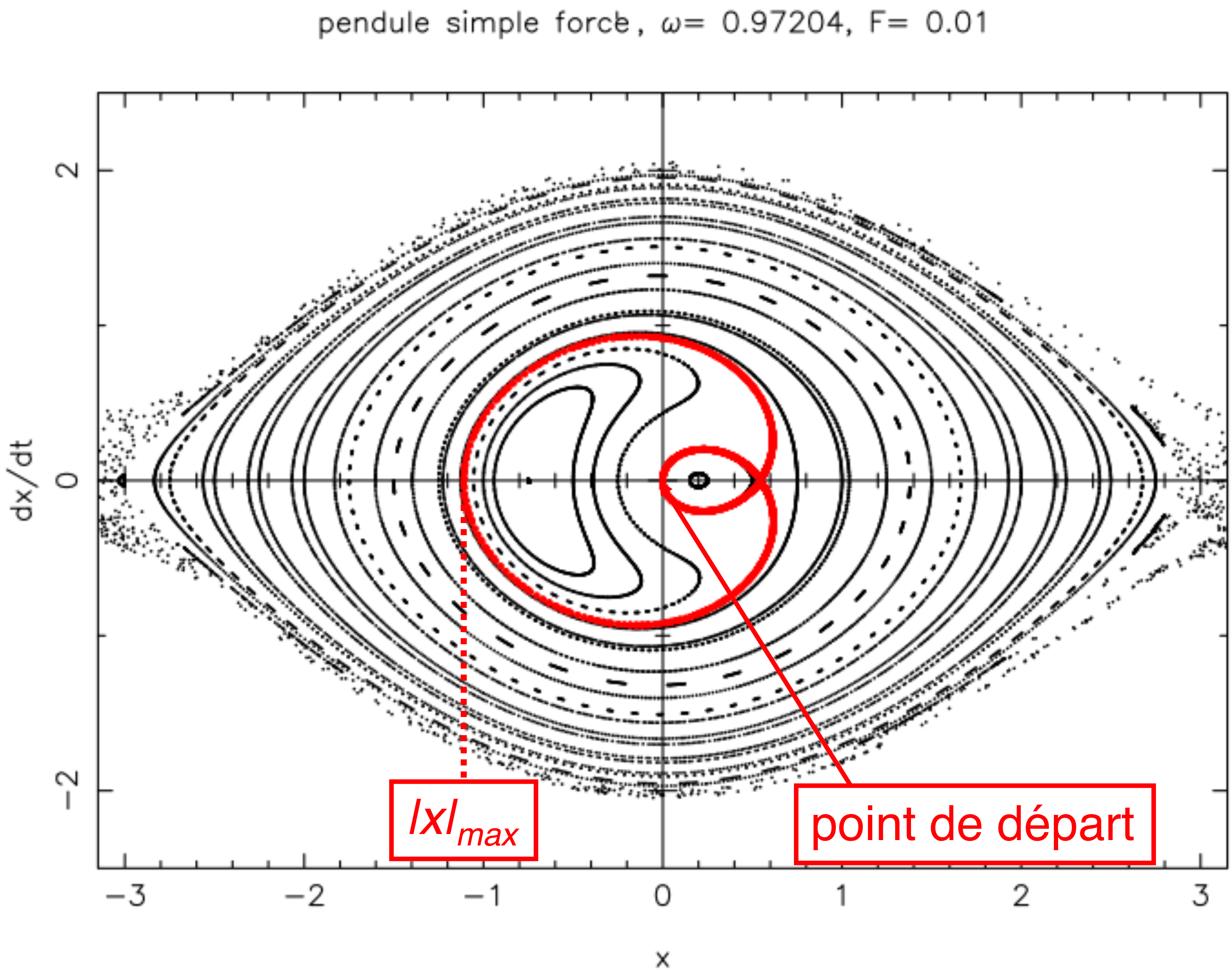
Oscillateur harmonique, F= 0.1, ω= 0.98123456789
rappel: portrait de phase
de l'oscillateur harmonique
dz/dt
2
0
−2
−4
−2
0
2
4
z


portrait de phase pendule simple
circulation
séparatrice
libration
circulation
2
0
−2
dx/dt
−3
−2
−1
0
1
2
3
x

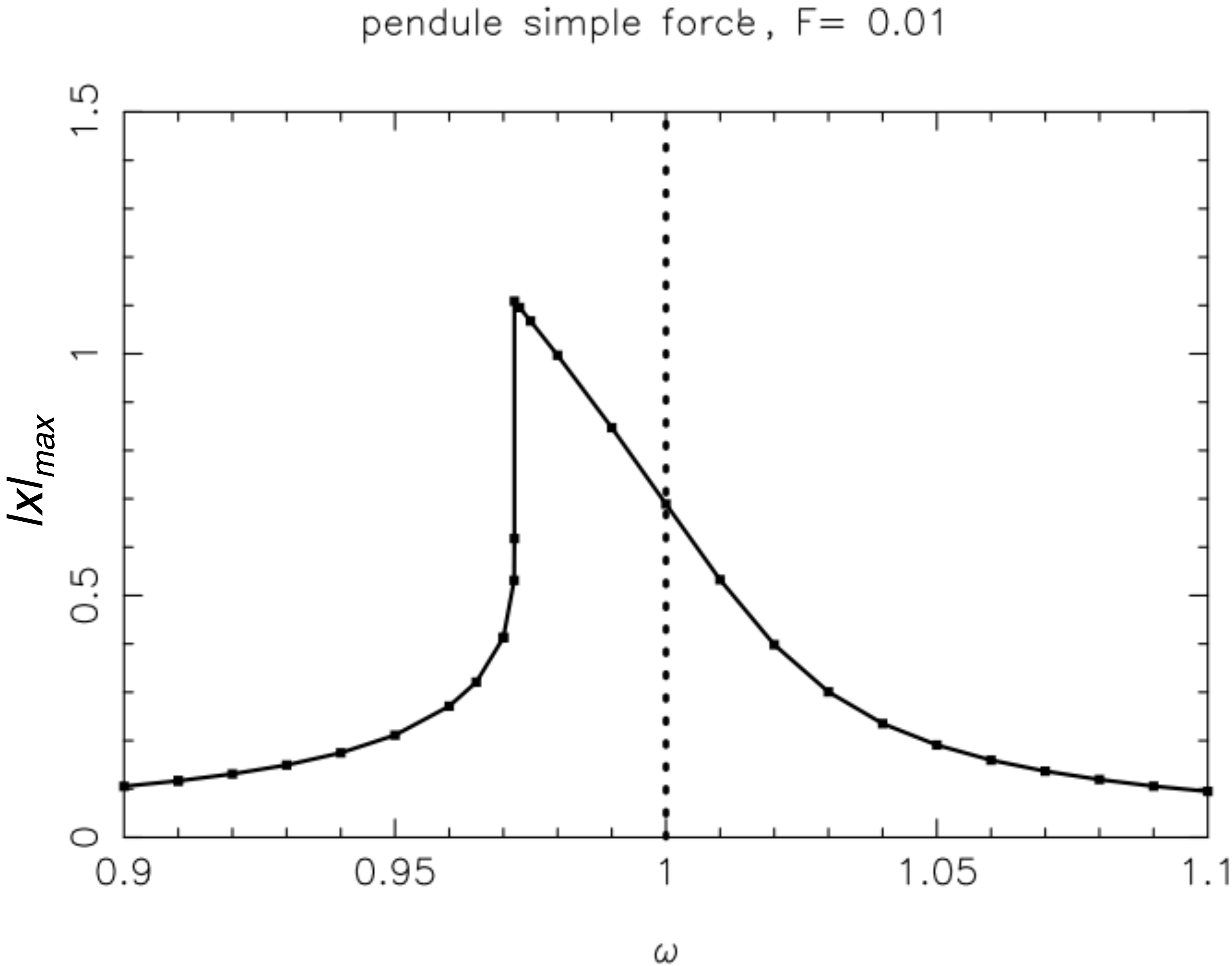
portrait de phase pendule simple forcé




pendule simple forcé, ω= 1, F= 0.01
surface de section:
$t_k=2k\pi/\omega$
dx/dt
2
0
−2
−3
−2
−1
0
1
2
3
x



pendule simple force, ω= 0.97204, F= 0.01
2
0
−2
dx/dt
−3
−2
−1
0
1
2
3
x
|x|max
point de départ


pendule simple force, F= 0.01
1.5
1
0.5
0
$|x|_{max}$
0.9
0.95
1
1.05
1.1
ω