

Notions d'astrophysique

Bruno Sicardy

Université Pierre et Marie Curie (Paris)

Maîtrise, Université Pierre et Marie Curie

Notes de cours

Date de mise à jour: 12 mars 2005

Table des matières

1	L'étoffe de la matière	1
1.1	L'histoire du monde en onze chapitres et demi	1
1.2	Particules et médiateurs	6
1.3	Les interactions fondamentales	6
1.4	Leptons contre hadrons	7
1.4.1	Leptons.	8
1.4.2	Quarks	8
1.4.3	Baryons et mésons	9
1.4.4	Saveur et interaction faible	10
1.5	Fermions et bosons	11
1.6	Effets macroscopiques	12
1.7	Les limites de la connaissance	13
1.7.1	Des problèmes ouverts	13
1.7.2	L'unification des forces	13
2	Les étoiles: la genèse	15
2.1	Les nuages interstellaires	15
2.2	Effondrement d'un nuage interstellaire	16
2.2.1	Masse de Jeans	17
2.2.2	Rayon de Jeans	18

2.3	Temps de chute libre	18
2.4	La barrière rotationnelle	20
3	Etoiles: la naissance	23
3.1	Etoiles, naines brunes et planètes	23
3.2	Un problème de poids	23
3.3	Le problème de l'énergie	24
3.3.1	Energie chimique	24
3.3.2	Energie gravitationnelle: le temps de Kelvin-Helmholtz	25
3.3.3	Energie nucléaire	26
3.4	Température interne d'une proto-étoile	26
3.5	La masse stellaire minimale	28
3.6	La masse stellaire maximum	30
4	Etoiles: l'âge adulte	33
4.1	Relation masse-luminosité	34
4.1.1	Diffusion des photons dans une étoile	34
4.1.2	Durée de vie d'une étoile	36
4.2	Fusion de l'hydrogène	36
4.2.1	Le cycle p-p	36
4.2.2	Le cycle CNO	37
5	La fournaise stellaire	39
5.1	L'effet tunnel	40
5.2	Distribution maxwellienne des vitesses	41
5.3	Taux de production nucléaire	42
6	La mort des étoiles	47
6.1	L'épuisement des réserves nucléaires	47

6.2	La structure en couches	47
6.3	Géantes rouges	48
6.4	Naines blanches	49
6.5	Supernovae	49
6.5.1	La masse de Chandrashekhar	49
6.5.2	L'explosion de la supernova	51
6.5.3	Luminosité d'une supernova	52
6.6	Etoile à neutrons	53
6.6.1	Rayon	53
6.6.2	Pulsar	53
6.7	Trou noir	54
A	La pression de dégénérescence	55
A.1	Cas classique	57
A.2	Cas relativiste	57
B	Le théorème du viriel	59
B.1	Démonstration	59
B.2	Validité	61

Chapitre 1

L'étoffe de la matière

Les progrès de la Physique, depuis un demi-siècle, ont prouvé aussi clairement qu'il est possible la nature atomique de la matière. Dans l'état actuel de nos connaissances, il n'est plus guère contesté par aucun physicien, que la matière ne soit formée par la combinaison de quelques éléments primordiaux (probablement deux seulement, le proton et l'électron) [...]

Louis de Broglie, *Ondes et mouvements*, 1926.

1.1 L'histoire du monde en onze chapitres et demi

Les phénomènes naturels sont en général très compliqués. On ne sait pas comment vont évoluer les nuages, ni ce que fera le chat en se réveillant de sa sieste. En revanche, on sait qu'il ne pourra pas sauter au-dessus d'une certaine hauteur, et on peut expliquer pourquoi la Terre a quelques milliers de kilomètres de diamètre.

Ces phénomènes sont profondément liés à la nature de la matière qui nous constitue, et aux forces qui la régissent. Nous allons passer en revue ici ce que nous avons pu apprendre dans les derniers siècles, ou même les dernières années, sur "l'étoffe de la matière".

La gravitation. La première interaction physique fondamentale a été découverte par Isaac Newton, et a été baptisée gravitation universelle. Elle explique aussi bien la chute des corps à la surface de la Terre que le mouvement de la Lune autour de notre globe, ou que le mouvement des planètes autour du Soleil.

Paradoxalement, cette force est de loin la plus faible parmi les quatre interactions que nous connaissons actuellement (voir la Table I). Elle est caractérisée par une constante de couplage très petite, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$.

L'électromagnétisme. D'autres forces ont été étudiées au 19^{ème} siècle, à savoir les interactions électriques et magnétiques. Elles expliquent la circulation d'un courant dans un éclair, la décharge électrostatique que l'on ressent par temps sec après friction d'un objet, la déviation d'une boussole ou les aurores boréales.

C'est James Clerk Maxwell qui a unifié ces deux types de forces dans un formalisme appelé électromagnétisme. Ce formalisme explique le fonctionnement des moteurs électriques, les communications sans fil, la propagation de la lumière, etc... Les interactions électromagnétiques font apparaître comme constante la vitesse de la lumière, $c = 3 \times 10^8$ m sec⁻¹.

La relativité. Ce formalisme est vite entré en conflit avec la mécanique classique de Galilée et Newton. Soit cette dernière était correcte, et la lumière aurait dû se propager dans un milieu baptisé "éther", et c n'était pas une constante, soit l'électromagnétisme était valide, et nos notions classiques de temps et d'espace étaient en partie erronées.

Les expériences d'Albert Michelson et Edward Morley ont montré en 1887 que l'éther n'existe pas. L'électromagnétisme a donc "gagné" et la vitesse de la lumière est apparue comme une constante universelle, au même titre que G . Ceci a conduit Albert Einstein à reformuler les changements de repères galiléens dans le cadre de la relativité restreinte. En 1915, il a abouti à une théorie qui inclut la gravité, à savoir la relativité générale.

L'apport fondamental de cette théorie est de montrer que nous vivons en fait dans un espace de dimension quatre (trois dimensions d'espace et une de temps) qui est courbé par la matière *via* la gravitation universelle. Son postulat de base est que la vitesse de la lumière dans le vide ne dépend *pas* de la vitesse de l'observateur, ce qui est évidemment contraire à notre intuition.

Cette théorie explique bien sûr le mouvement des planètes autour du Soleil, mais également la propagation de la lumière près d'un trou noir, le décalage vers le rouge des spectres d'une naine blanche, ou le désaccord entre des horloges qui se déplacent à des vitesses différentes. Les "effets relativistes" n'apparaissent cependant que pour des vitesses proches de c , ce qui fait que l'on peut aller acheter son pain sans connaître la relativité.

Une autre contribution fondamentale de la relativité est l'équivalence masse-énergie,

$$E = mc^2.$$

On s'était aperçu auparavant de la profonde unité de la notion d'énergie, qu'elle soit thermique, électrique, chimique, mécanique, lumineuse, etc... On peut ainsi transformer de la chaleur en lumière, de la lumière en courant électrique, du courant électrique en mouvement, et ainsi de suite. Cependant, il existait une autre loi de conservation, celle de la masse. Cette notion a disparu avec la relativité puisque masse et énergie peuvent se transformer l'un dans l'autre *via* la célèbre formule ci-dessus. En fait la masse *est* une forme d'énergie et l'énergie *a* une masse.

Les atomes. Dès le 19^{ème} siècle, on a soupçonné la nature atomique de la matière. La chimie ne peut se comprendre de manière cohérente que si des "grains" élémentaires, ou atomes, se combinent entre eux pour former les différentes substances chimiques.

Joseph John Thomson et Robert Millikan mettent pour la première fois en évidence au tournant du siècle une particule élémentaire: l'électron. Ils mesurent également sa charge (négative): $e = -1.6 \times 10^{-19}$ Coulomb. La structure des atomes est quant à elle révélée par Ernest Rutherford et Frederick Soddy qui ont montré en 1911 que les atomes sont en fait composés d'un noyau minuscule (10^{-15} m), chargé positivement, autour duquel gravitent les électrons. La taille des atomes est de l'ordre de 10^{-10} m.

Le noyau met donc en évidence une nouvelle particule élémentaire chargée positivement: le proton. Il est beaucoup plus massif que l'électron (d'un facteur 2000 environ), ce qui fait que l'essentiel de la masse de l'atome réside dans le noyau. L'essentiel? Pas tout à fait, car en 1932 une nouvelle particule élémentaire est découverte par James Chadwick: le neutron. Il a à peu près la même masse que le proton, mais il ne possède pas de charge électrique, comme son nom l'indique. Les neutrons se trouvent également dans les noyaux atomiques, et on a pu montrer que protons et neutrons sont approximativement en nombres égaux dans les noyaux.

La mécanique quantique. Cette vision de l'atome est rapidement entrée en conflit avec l'électromagnétisme. En effet, un électron qui tourne à grande vitesse autour d'un noyau devrait rayonner, d'après les équations de Maxwell, une telle puissance qu'il devrait s'effondrer sur le noyau en une fraction infime de seconde: les atomes ne sont pas stables dans le monde de Maxwell!

Un autre conflit de même type était apparu quelques années auparavant au sujet du rayonnement de la matière en équilibre thermodynamique (dit "rayonnement du corps noir"). D'après les équations de Maxwell, le spectre d'un corps noir devrait diverger dans le bleu, et le four du boulanger du coin devrait exploser en feu d'artifice!

Max Planck avait résolu le problème de manière *ad hoc* en 1900 en supposant que la lumière, jusqu'alors considérée comme ondulatoire, avait *aussi* un comportement corpusculaire. Il baptise "quantas" les paquets d'énergie élémentaires que transporte la lumière et établit une autre célèbre formule,

$$E = h\nu,$$

où E est l'énergie transportée par un quanta de fréquence ν . La constante de proportionnalité est maintenant appelée constante de Planck, et vaut 6.63×10^{-34} kg m² sec⁻¹, ou J sec. De nouveau, cette formule est loin d'être intuitive. En effet, une onde comme celle qui se propage sur une corde vibrante peut avoir *n'importe quelle* énergie de manière continue: il n'y a aucun besoin de la quantifier!

L'existence des quantas de lumière est confirmée en 1905 par Einstein, qui explique grâce à cette nouvelle notion l'effet photoélectrique. On appellera plus tard ces quantas des "photons".

Niels Bohr va poursuivre cette œuvre de quantification en supposant en 1913 (toujours de manière *ad hoc*) que les niveaux d'énergie des électrons autour du noyau atomique sont aussi quantifiés: tant qu'ils se trouvent sur un de ces niveaux, ils ne rayonnent pas, et s'ils décident de passer à un autre niveau, ils émettent ou absorbent un photon de fréquence $\nu = \Delta E/h$.

La mécanique quantique était née, mais demandait une formalisation mathématique

plus poussée. Physiquement, cette nouvelle mécanique est basée sur le fait que toute onde possède un caractère corpusculaire, et que toute particule possède un caractère ondulatoire. C'est Louis de Broglie qui établit en 1924 cette dualité onde-corpuscule, et ce sont entre autres Max Born, Werner Heisenberg, Wolfgang Pauli et Erwin Schrödinger qui établissent entre 1925 et 1930 les bases mathématiques de ce formalisme.

Une caractéristique fondamentale de la mécanique quantique, et qui nous permettra de comprendre de très nombreux phénomènes en (astro)physique est le *principe d'incertitude*. Nous reviendrons souvent sur cette notion, mais il suffit de dire pour l'instant que l'on ne peut pas à la fois, et avec une précision arbitraire, connaître la position x et la quantité de mouvement $p = mv$. Les précisions obtenues sur chacune des quantités doit vérifier la relation d'incertitude d'Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar,$$

où $\hbar = h/2\pi$ est la constante de Planck réduite.

On se saurait trop insister sur l'importance de cette relation dans notre compréhension de l'étoffe de la matière. *Aucune* particule ou onde ne semble échapper à cette règle. Comme \hbar est une quantité minuscule, il nous est difficile d'apprécier cette inégalité dans la vie courante. Mais elle devient un outil nécessaire dès que rentre dans le monde des particules.

Cette inégalité peut se comprendre en reprenant la dualité onde-corpuscule. Si une particule est bien délimitée sous forme de paquet d'onde, alors sa longueur d'onde (et donc sa quantité de mouvement p) est mal définie car la particule contient peu de longueurs d'onde complètes. Si au contraire on augmente le train d'onde, la longueur d'onde (et p) devient bien définie, mais sa position est complètement "floue".

Particules et antiparticules. Sur ces entrefaits, Paul Dirac écrit en 1929 l'équation qui porte son nom et qui décrit le mouvement d'un électron autour du noyau. Comme la vitesse orbitale de l'électron n'est pas négligeable par rapport à celle de la lumière, les effets relativistes doivent être pris en compte. Deux notions fondamentales pour la suite sont déduites de cette équation: d'une part une particule "miroir" de l'électron apparaît: elle a une énergie au repos négative, elle est chargée positivement, d'où son nom, le *positron*. C'est la première *antiparticule* que l'on va prédire puis observer.

A toute particule correspond une antiparticule¹; une particule et une antiparticule qui se rencontrent s'annihilent en rayons γ , c'est-à-dire en photons.

Spin. Une deuxième notion fondamentale est le *spin* qui caractérise toute particule. Le spin s est une sorte de moment cinétique dû à la rotation de la particule sur elle-même, mais il n'a pas d'équivalent classique dans notre monde macroscopique. Comme toute quantité microscopique, s est quantifié, et ne peut prendre que des valeurs discrètes qui sont des multiples ou demi-multiples de \hbar : $s = 0, \hbar/2, \hbar, 3\hbar/2, 2\hbar, \text{etc...}$ qu'on note $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$ en omettant le \hbar .

Fermions et bosons. Après la découverte du spin des particules est apparue une no-

¹Certaines particules sont leur propre antiparticule, comme le photon.

tion qui explique une grande partie des propriétés de la matière: le *principe d'exclusion*. D'abord énoncé par Wolfgang Pauli, ce principe énonce que les électrons ne peuvent pas conjuguer leurs efforts pour former une onde cohérente. Plus précisément leurs nombres quantiques ne peuvent pas être tous égaux. Par exemple, deux électrons libres ne peuvent pas être au même endroit avec la même quantité de mouvement.

Enrico Fermi montrera à la fin des années 1930 que les particules de spin demi-entier obéissent au principe d'exclusion de Pauli, et suivent ce que l'on appelle actuellement la statistique de Fermi. Les particules correspondantes s'appellent les *fermions*. On peut donner comme exemple les protons, neutrons et électrons.

Satyendranârh Bose avait quant à lui développé en 1924 la statistique dite maintenant de "Bose", et qui concerne les particules de spin entier. Ces dernières n'obéissent *pas* au principe de Pauli, et on peut les accumuler sans limites au même endroit et avec la même quantité de mouvement. Parmi les membres du club bosons, on peut compter les photons ou les pions π .

Nous verrons l'importance capitale de cette dichotomie bosons-fermions dans de nombreuses applications astrophysiques.

L'interaction nucléaire forte. Avec seulement la gravité et l'électromagnétisme comme ingrédients, il est apparu très vite que l'on ne pouvait pas expliquer la stabilité du noyau atomique: il devrait voler en éclat à cause de la répulsion électrostatique des protons!

Une "colle" puissante devait tenir les nucléons, d'autant plus puissante que le noyau est minuscule par rapport à l'atome. Dès 1935, Hideki Yukawa propose un modèle dans lequel les nucléons échangent de nouvelles particules, les mésons. Ces mésons ne seront observées qu'en 1950 par Cecil Powell. En fait, nous verrons que les interactions nucléaires se font plus généralement *via* des gluons et des quarks. On appelle cette nouvelle force l'interaction forte, ou nucléaire.

Hadrons et leptons. Il apparut vite que les particules étaient divisées en deux camps: celles qui sont sensibles à l'interaction nucléaire forte (les *hadrons*), et celles qui ne le sont pas (les *leptons*). Nous reviendrons plus en détail la-dessus, mais notons tout de suite que cela posait immédiatement un problème car certains processus de désintégration nucléaire font intervenir des leptons, et ne peuvent donc être expliqués par l'interaction forte.

L'interaction faible. Enrico Fermi développa dès 1934 une théorie visant à expliquer la désintégration du neutron (un hadron) en un proton (un autre hadron), plus un électron (un lepton). Cette théorie aboutit à une quatrième force, l'interaction faible. Elle se transmet par de nouvelles particules, dites "bosons intermédiaires", et qui peuvent être chargée électriquement ou être neutres. C'est en janvier 1983 que Carlo Rubbia et ses collègues mettent en évidence ces bosons intermédiaires.

Les quarks. Alors que l'on a découvert au cours de ce siècle que trois couples de leptons, les hadrons se sont multipliés et on peut en recenser des centaines aujourd'hui. Cela fait un peu désordre dans le domaine des particules dites "élémentaires". A la fin des années 1960, Murray Gell-Mann et Yuval Ne'eman mettent sur pied un nouvelle théorie dans laquelle tous les hadrons sont composés de particules plus élémentaires, les *quarks* (au

nombre de six), qui interagissent entre eux grâce à des *gluons*. Ce nouveau formalisme a en fait englobé l'ancienne théorie développée par Yukawa.

Nous allons maintenant examiner quelques aspects plus spécifiques de la physique des particules, et parler brièvement des récents développements dans ce domaine. Nous aurons de nombreuses occasions, aussi bien en physique stellaire qu'en cosmologie, de voir l'importance capitale que revêt la physique des particules en astrophysique.

1.2 Particules et médiateurs

La matière (ou de manière équivalente, l'énergie) se présente sous la forme d'un petit nombre de “briques”, que les physiciens pensent aujourd'hui indivisibles, c'est-à-dire sans structure interne. On donne à ces briques le nom de particules élémentaires. On peut donner comme exemple de telles particules les électrons ou les neutrinos. En revanche, nous verrons que les protons ou les neutrons sont formés de particules plus fondamentales appelées quarks.

Ces particules élémentaires communiquent entre elles *via* d'autres particules appelées médiateurs (ou particules messagères, ou vecteurs des interactions). Il s'agit en quelques sorte du “ciment” qui relie les briques entre elles. Les physiciens parlent alors d'interactions entre les particules. On peut donner comme exemple de médiateurs les photons ou les gluons.

1.3 Les interactions fondamentales

Les interactions fondamentales connues actuellement sont au nombre de quatre. Le tableau ci-dessous donne leur nom, leur intensité relative, la distance sur laquelle elles agissent, les médiateurs qui les transportent et les particules sur lesquelles elles agissent.

Nous voyons donc dans ce tableau qu'il y a quatre type de médiateurs, à savoir les gluons, les photons, les bosons intermédiaires et les gravitons.

LES QUATRE FORCES FONDAMENTALES

Nom	Intensité	Portée	Médiateurs (spin ^a)	Particules sensibles
Forte ou nucléaire	$\gg 1$	10^{-15} m	gluons (8 au total avec 3 couleurs) (spin 1)	quarks
Electromagnétique	1/137	infinie	photons (spin 1)	toute particule chargée
Faible	10^{-5}	10^{-18} m	W^+ , W^- , Z^0 (bosons intermédiaires) (spin 1 ???)	quarks et leptons
Gravitation	10^{-40}	infinie	gravitons (spin 2)	toute particule

1.4 Leptons contre hadrons

Toutes les particules élémentaires sont sensibles à la gravitation et à l'interaction faible. De plus, toutes les particules chargées sont sensibles aux interactions électromagnétiques. Cependant toutes les particules ne sont *pas* sensibles à l'interaction forte. On distingue donc deux classes de particules:

- Les hadrons (du grec $\alpha\delta\rho\zeta$, fort), sensibles à l'interaction forte.
- Les leptons (du grec $\lambda\epsilon\pi\tau\omicron\zeta$, faible), insensibles à l'interaction forte.

Les leptons (dont le plus connu est l'électron) semblent être des particules élémentaires. En revanche, les hadrons (dont les plus connus sont le proton et le neutron) ont vu leur nombre augmenter de façon spectaculaire lors d'observations dans les accélérateurs au cours des années 1960. On en connaît en effet plusieurs centaines aujourd'hui. Ceci suggère une structure sous-jacente, et l'existence de particules plus fondamentales.

C'est dans les années 1970 qu'on a développé un formalisme (appelé chromodynamique quantique) qui explique l'existence des hadrons, qui seraient alors formés d'un petit nombre de quarks.

Ainsi, les *quarks*, les *leptons* et les *médiateurs* permettent d'expliquer l'ensemble des particules connues, et des interactions entre elles.

1.4.1 Leptons.

Les leptons sont au nombre de six, groupés en trois couples (ou “générations”), à savoir les électrons (e^-), les muons (μ^-) et les tauons (τ^-) avec leur neutrinos respectifs (ν_e , ν_μ , ν_τ), voir la table ci-dessous. Il semble que ce soit des particules élémentaires.

LES SIX LEPTONS (TROIS GÉNÉRATIONS)

Nom (symbole)	Masse ^a	Charge ^b	spin
Electron (e^-)	1	-1	1/2
Neutrino électronique (ν_e)	0 ?	0	1/2
Muon (μ^-)	1206.7	-1	1/2
Neutrino muonique (ν_μ)	0 ?	0	1/2
Tauon (τ^-)	3536	-1	1/2
Neutrino tau (ν_τ)	0 ?	0	1/2

^a en unité de masse électronique

^b en unité de charge électronique ici et dans la suite

Comme à chaque lepton correspond un anti-lepton, on a donc douze leptons différents. Parmi les trois leptons e^- , μ^- et τ^- , seul le moins massif, l'électron, est stable. Notons également que l'on ne sait pas encore si les neutrinos ont une masse ou non.

1.4.2 Quarks

Les quarks connus aujourd'hui sont au nombre de six, et semblent être des particules élémentaires au même titre que les six leptons. A partir de ces six quarks, on peut former tous les hadrons répertoriés.

On dit alors que les quarks se présentent sous forme de six “saveurs”, à savoir “en-haut” (up: u), “en-bas” (down: d), “charmé” (charmed, c), “étrange” (strange: s), “sommets” (top: t) et “fond” (bottom: b). De même que les leptons, les quarks se groupent en trois générations:

LES SIX QUARKS (TROIS GÉNÉRATIONS)

Nom (symbole)	Charge	spin
up (u)	+2/3	1/2
down (d)	-1/3	1/2
charmed (c)	+2/3	1/2
strange (s)	-1/3	1/2
top (t)	+2/3	1/2
bottom (b)	-1/3	1/2

Comme à chaque quark est associé un anti-quark, il y a donc douze quarks actuellement connus. Notons que les quarks ont des charges électriques fractionnaires.

Les quarks se collent entre eux *via* l’interaction forte. L’équivalent des charges électriques pour l’interaction forte est la *couleur*². Cependant, et contrairement aux charges électriques qui ne peuvent être que de deux types (positive ou négative), les couleurs sont au nombre de trois (rouge, vert et bleu). On peut alors montrer que les quarks ne peuvent se grouper que par *deux ou par trois*, de manière que la somme de leur couleur soit nulle, *i.e.* qu’ils soient “incolores”.

1.4.3 Baryons et mésons

Les hadrons peuvent donc se diviser en deux grandes classes:

- Les baryons, qui sont formés de trois quarks.

²Qui n’a évidemment rien à voir avec la couleur usuelle de la lumière!

- Les mésons, qui sont formés de deux quarks.

Parmi tous les hadrons possibles, seuls deux baryons sont stables à des échelles macroscopiques, à savoir le *proton* (formé de trois quarks, uud) et le *neutron* (formé des trois quarks udd). On regroupe spécialement le proton et le neutron dans la classe des *nucléons*, pour rappeler qu'ils sont les composants de base des noyaux atomiques.

Le proton isolé a une durée de vie supérieure à 10^{28} années (!). Le neutron isolé a quant à lui une vie moyenne de 15 minutes, après quoi il se désintègre en proton en émettant un électron. Cependant, les neutrons sont stabilisés à l'intérieur des noyaux, et ce grâce à l'interaction forte.

Parmi les mésons, citons les *pions* π , qui peuvent être négatifs, positifs ou neutres (π^- , π^+ , π^0). Par exemple, π^- est composé des deux quarks $d\bar{u}$, où \bar{u} est l'antiquark up. La charge totale du π^- est donc bien -1 . Le pion π^+ est composé des quarks $u\bar{d}$ et est l'antiparticule du π^- . Le π^0 ($u\bar{u}$) est sa propre antiparticule.

1.4.4 Saveur et interaction faible

L'interaction faible permet de changer la saveur d'un quark. Ainsi, lors de la désintégration du neutron dont nous parlions à l'instant, *i.e.*:

$$n \longrightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e,$$

c'est en fait un quark d (saveur "down") qui se transforme en quark u (saveur "up") à l'intérieur du neutrons, émettant un électron et un antineutrino *via* l'interaction faible:

$$d \longrightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Une fois l'électron créé, il n'est *plus* sensible à l'interaction forte à l'intérieur du proton. Comme la réaction ci-dessus libère une grande quantité d'énergie (souvenons-nous que le neutron est plus massif que le proton), et que la force attractive électromagnétique est peu intense, l'électron est éjecté à grande vitesse. L'observateur extérieur voit donc apparemment un neutron se transformer en proton.

Quant à l'interaction forte, on en sait peu de choses (à part que son intensité est... très grande). Il semble que contrairement aux autres interactions, elle *augmente* avec la distance. En revanche à faible distance (une fraction de Fermi), elle devient nulle. Ainsi, on peut imaginer la force entre quarks comme celle d'un élastique, lâche et flexible à faible distance, et tendu à plus grande distance.

Ceci explique pourquoi les quarks ne peuvent être observés isolément: à mesure que l'on éloigne deux (ou trois) quarks qui s'attirent, on produit un travail (et donc une énergie) de plus en plus grande. On peut alors créer à partir de cette énergie une nouvelle paire quark-antiquark dont les éléments se regroupent pour former des nouveaux couples ou trios de quarks!

La “couleur” totale du baryon ou d’un méson est d’autre part toujours *nulle*³. Ainsi, deux protons ou neutrons sont “neutres” du point de vue de l’interaction forte, et ne s’attirent donc plus *via* cette force. Ceci explique pourquoi on peut éloigner deux nucléons à l’infini, de même que l’on peut éloigner sans problème deux atomes neutres puisqu’ils ont très peu d’attraction électrostatique entre eux.

En fait, ce n’est que lorsque deux nucléons sont proches l’un de l’autre que les trois quarks à l’intérieur du premier nucléon commencent à “sentir” les quarks de l’autre nucléon et *vice-versa*. L’un des quarks de l’un des nucléons vient alors se “coller” à l’un des quarks de l’autre nucléon. Ceci rappelle la formation des molécules en chimie, où les interactions qui relient les atomes (forces de van der Waals) ne sont qu’un pâle reflet des forces d’attraction électromagnétiques internes, beaucoup plus intenses (il est en effet plus facile de casser une molécule que de casser un atome).

Ainsi, même si les énergies mises en jeu lors de la fusion de nucléons nous paraissent colossales, elles n’ont aucune commune mesure avec les énergies qui lient les quarks entre eux.

1.5 Fermions et bosons

La distinction hadrons-leptons concerne la sensibilité (ou la non-sensibilité) à l’interaction forte. Il y a une autre distinction fondamentale que l’on peut faire entre les particules, indépendamment du fait qu’elles soient des leptons, des quarks ou des médiateurs. Cette distinction est liée au *spin* de la particule, et plus précisément, au fait qu’elle obéit ou non au principe d’exclusion de Pauli.

Tout d’abord, nous rappellerons que la mécanique quantique oblige *toute* particule à respecter le *principe d’incertitude d’Heisenberg*. Plus précisément, pour une particule donnée, on ne peut pas déterminer avec une précision arbitraire des quantités conjuguées comme la position et la quantité de mouvement, ou le temps et l’énergie à cet instant, etc.... Quantitativement, ces relations s’écrivent :

$$\begin{aligned}\Delta x \Delta p_x &\geq \hbar \\ \Delta t \Delta E &\geq \hbar \\ &\dots\end{aligned}$$

Ce principe est l’un des plus fondamentaux de la physique. C’est lui qui établit la limite entre la physique macroscopique (classique) et la physique microscopique (quantique). Bien que microscopique, il a des conséquences macroscopiques bien observables, comme la diffraction dans les télescopes ou la possibilité des réactions nucléaires dans les étoiles.

Ce principe stipule en fait qu’une particule ne peut pas se trouver dans une case arbitrairement petite de *l’espace des phases* position-vitesse (ou temps-énergie, etc...). Cette case doit avoir un volume minimum de \hbar . Ceci étant, les particules peuvent avoir des

³Notre monde est gris, le monde sub-nucléaire est coloré!

comportements collectifs très différents vis-à-vis de ce principe d'incertitude. On distingue ainsi deux types de particules:

- Les **fermions**, qui obéissent au principe d'exclusion de Pauli. Ce principe d'exclusion exige que l'on ne peut pas trouver plus d'un fermion par case quantique⁴.
- Les **bosons**, qui ne sont pas soumis à ce principe d'exclusion, et peuvent donc s'accumuler arbitrairement dans la même case quantique.

La mécanique quantique nous enseigne que cette distinction est basée sur le *spin* de la particule. Ce spin est quantifié, et ne peut prendre pour valeurs que des multiples entiers ou demi-entiers de la constante de Planck réduite ($\hbar = h/2\pi$). On peut alors montrer que les particules de spin *entier* (0, 1 et 2) sont des bosons, alors que les particules de spin *demi-entier* (1/2, 3/2) sont des fermions. Il semble qu'il ne puisse pas y avoir de particule élémentaire de spin supérieur à 2.

Parmi les fermions, on peut noter tous les leptons et tous les baryons. Ainsi les protons, neutrons, électrons et neutrinos ont tous un spin de 1/2. Il existe un type de baryons (omega, Ω^+ et Ω^-) qui ont des spins de 3/2.

Tous les médiateurs sont des bosons. Par exemple, les photons, les bosons intermédiaires W^+ , W^- et W^0 et les gluons ont un spin de 1. Le graviton, s'il existe, a un spin de deux⁵.

Inversement, tous les bosons ne sont *pas* des médiateurs. Par exemple les pions ont un spin de 0.

1.6 Effets macroscopiques

De manière familière, on peut dire que les fermions sont "individualistes" et répugnent à se retrouver au même endroit au même moment, alors que les bosons sont "grégaire", et n'hésitent pas agir collectivement de la même manière.

Ces propriétés microscopiques de spin ont des effets macroscopiques bien réels. Ainsi, le rayon laser (ou maser dans un contexte plus astrophysique) est un bon exemple de comportement grégaire des photons, qui unissent leur efforts pour produire un rayonnement lumineux macroscopique cohérent: tous les photons passent au même endroit avec le même état quantique.

De même, le principe d'exclusion concernant les fermions explique pourquoi la matière ne peut pas être comprimée arbitrairement. Ceci explique entre autres la stabilité du globe terrestre comprimé sous l'effet de son poids, sans compter la difficulté bien connue de passer

⁴Plus précisément, on ne peut pas y trouver plus d'un fermion avec tous les nombres quantiques identiques, i.e. position, vitesse, spin, moment cinétique, etc...

⁵On peut montrer que les médiateurs de spin 1 conduisent à une *répulsion* des charges identiques, alors qu'un spin 2 induit une *attraction* entre deux charges identiques. Ceci explique pourquoi la matière attire toujours la matière gravitationnellement.

à travers les murs... Nous verrons que les naines blanches ou les étoiles à neutrons sont en fin de compte stabilisées par ce principe d'exclusion, *via* la pression dite de dégénérescence (ou de Fermi).

1.7 Les limites de la connaissance

1.7.1 Des problèmes ouverts

Il serait imprudent de reprendre la formule de de Broglie citée en début de ce chapitre, et de dire que la matière ne se compose “probablement” que de six leptons, six quarks et des quatre types de médiateurs des interactions fondamentales.

Ces composants élémentaires expliquent pour l'instant l'impressionnant bestiaire du monde des particules et de leurs interactions⁶. Une meilleure connaissance du monde sub-nucléaire exige des énergies de plus en plus grandes. Des limites d'argent, d'énergie et de temps arrêteront sans doute un jour les chercheurs dans leur quête des composants ultimes de la matière.

Mais quelques indices nous font d'ores et déjà soupçonner qu'une structure sous-jacente existe au-delà des particules élémentaires citées plus haut.

Par exemple, il est curieux de constater que les quarks ont des charges électrique fractionnaires $+2/3$, $-1/3$, etc..., alors que l'électron, considéré comme particule élémentaire, a exactement une charge de -1 . On aimerait que l'électron soit lui-même composé de particules ayant des charges de $-1/3$ ou ses multiples pour donner une charge totale de -1 .

Un autre mystère est la conservation du nombre baryonique. Lors de réactions, l'expérience montre le nombre de baryons reste conservé, alors que deux baryons par exemple pourraient *a priori* se transformer en trois mésons.

Plus fondamentalement, on ne sait pas pourquoi les protons, les neutrons, les électrons, etc... ont la masse que l'on observe. Ces nombres sont pour nous des données expérimentales qui ne viennent pas d'une théorie.

1.7.2 L'unification des forces

Une tentative de mieux comprendre la structure ultime de la matière est d'unifier les quatre interactions en une seule.

James Maxwell avait unifié les interactions électriques et magnétiques au 19^{ème} siècle. Dans les années 1950, Richard Feynman, Tomonaga Shin-Itiro et Julian Schwinger ont établi les bases de l'électrodynamique quantique (QED). Cette théorie place de manière

⁶Même si on voit de temps en temps une annonce sensationnaliste sur l'existence d'une “cinquième force”.

cohérente les interactions électromagnétiques dans le cadre de la mécanique quantique.

Dans les années 1960, Murray Gell-Mann et Yuval Ne'eman ont mis sur pied la théorie des quarks et des interactions fortes *via* les trois “couleurs”. Ceci a conduit à la chromodynamique quantique (ou QCD), qui a pour but de décrire la structure interne des noyaux et le confinement des quarks par paires ou triplets.

Il faut attendre le début des années 1970 pour que des chercheurs comme Abdus Salam, Steven Weinberg et Sheldon Glashow puissent unifier les interactions électromagnétiques et les interactions faibles dans le cadre de la théorie dite “électrofaible”. En fait, à très haute énergie ($\gtrsim 100$ GeV), les interactions électromagnétiques et faibles fusionnent. En-dessous de cette énergie, il y a une “brisure de symétrie” qui nous les fait apparaître comme différentes.

Le pas suivant serait de pouvoir unifier les interactions électrofaibles et fortes et la gravitation. On ne dispose actuellement ni des données expérimentales, ni même les concepts théoriques pour pouvoir décrire cette “grande unification” (ou GUT en anglais). Cette grande unification se produirait vers 10^{15} GeV, soit treize ordres de grandeur au-dessus de l'unification électrofaible!

Dans ce cadre, le proton pourrait être instable et se désintégrer en:

$$p^+ \longrightarrow e^+ + \pi^0.$$

(Notons que cette réaction viole la loi de conservation du nombre baryonique). Dans le cadre des GUT, on estime que la durée de vie du proton est supérieure à 10^{28} ans, mais on ne peut guère faire que des conjectures pour l'instant quant à la durée de vie effective des protons. Des expériences sont actuellement réalisées pour détecter de telles désintégrations. Notons par exemple qu'une durée de vie de 10^{32} ans fournirait un événement tous les ans dans 100 tonnes de matière ($\sim 10^{32}$ protons).

Il faudrait encore à ce stade pouvoir unifier la dernière force en jeu, à savoir la gravitation, pour accéder au Graal de la “superunification”. En combinant les constantes fondamentales G , h et c , on peut montrer que cette super-unification se produirait à une énergie de $\sqrt{hc^5/G} \sim 10^{19}$ GeV, soit quatre ordres de grandeur au-dessus de la GUT, tout un programme...

Chapitre 2

Les étoiles: la genèse

“Ces traînées de soleils tombant vers un centre commun nous donnent le témoignage de la plus immense période de durée que le ciel ait jamais révélée à l’intelligence humaine. Déjà, en voyant des étoiles toutes formées, on conçoit, devant le calme des régions célestes, quel nombre formidable de siècles ont dû s’entasser pour arriver à condenser, à individualiser en soleils distincts la matière cosmique primitive.”

Flammarion, “Les étoiles et les curiosités du ciel”.

2.1 Les nuages interstellaires

Nous allons voir dans ce chapitre comment des astres nouveaux peuvent naître à partir d’immenses nuages de gaz qui s’étendent entre les étoiles dans les galaxies. Ce *milieu interstellaire* est une source potentielle d’étoiles nouvelles, qui une fois leur vie terminée (sous forme de géante rouge ou de supernova), peuvent ré-injecter une partie de leur matériau dans l’espace intersidéral. Dans ce vaste cycle, les galaxies ont pu ainsi voir apparaître et disparaître depuis leur formation, plusieurs générations d’étoiles qui enrichissent petit à petit le milieu interstellaire en “métaux”, c’est-à-dire en éléments plus lourds que l’hydrogène et l’hélium primordiaux (voir la nucléosynthèse stellaire dans le chapitre 4).

La partie visible d’une galaxie spirale est essentiellement composée d’étoiles, mais elle possède toutefois une proportion non négligeable de gaz et de poussières. Par exemple, notre Galaxie contient une masse d’environ $10^{11}M_{\odot}$ sous forme d’étoiles, et d’environ 10^9M_{\odot} (soit 1%) sous forme de gaz et de poussières.

Le tableau ci-dessous indique des ordres de grandeur de densité et de température de nuages interstellaires observés dans la Galaxie.

PROPRIÉTÉS TYPIQUES DE NUAGES INTERSTELLAIRES

Type	Densité (atomes m ⁻³)	Température (K)
Nuages HI	10 ⁶	100
Nuages moléculaires	10 ¹⁰	20
Enveloppes supernovae, géantes rouges	10 ⁵	10 ⁵

Comment aboutit-on à une étoile à partir d'un nuage interstellaire? En fait, personne ne le sait... Il s'agit d'un problème fort difficile, essentiellement à cause de l'apparition de toute une hiérarchie de structures, sous-structures, etc... dans le nuage à mesure qu'il s'effondre sur lui-même. Des mouvements turbulents apparaissent, qui ne peuvent être décrits de manière simple par les équations hydrodynamiques. D'autres complications apparaissent lorsqu'on veut tenir compte de l'effet du champ magnétique sur le gaz en contraction, ou d'explosions de supernovae dans le nuage.

Au moins peut-on donner les *conditions nécessaires* pour qu'une étoile puisse se former au sein d'un nuage interstellaire. Plusieurs barrières doivent en fait être franchies. Une première barrière est *thermique*: le nuage doit avoir une masse suffisante pour surmonter sa pression interne. Une deuxième barrière est *rotationnelle*: une proto-étoile qui se contracte tourne de plus en plus vite, et peut littéralement exploser si sa vitesse de rotation devient trop importante. Examinons ces deux effets.

2.2 Effondrement d'un nuage interstellaire

Deux forces opposées sont présentes dans un nuage de masse M et de rayon R : une force d'auto-gravitation, qui tend à contracter le nuage, et une force de pression thermique, qui tend à le faire exploser.

On peut quantifier ces deux tendances opposées en terme d'énergie: le nuage possède une énergie potentielle de gravitation (négative) et une énergie cinétique (positive) due à l'agitation thermique de ses molécules.

L'énergie potentielle de gravitation de deux particules de masses m et m' séparées de r s'écrit $-Gmm'/r$. Donc l'énergie potentielle d'un nuage de masse M et de rayon R est de l'ordre de:

$$E_{\text{gr}} \sim -\frac{GM^2}{R}.$$

Dans un gaz en équilibre thermodynamique, une particule a une énergie $kT/2$ par degré de liberté (translation, rotation, etc...). Donc, si μ est la masse moyenne d'une molécule

du nuage, l'énergie cinétique totale de ce dernier aura pour expression:

$$E_{\text{th}} \sim kT \cdot \frac{M}{\mu}.$$

Le nuage s'effondre si son énergie mécanique totale $E = E_{\text{gr}} + E_{\text{th}}$ est négative, soit: [[eq-effon]]

$$kT \frac{M}{\mu} \leq \frac{GM^2}{R}. \quad (2.1)$$

2.2.1 Masse de Jeans

L'équation ci-dessus permet de définir la *masse de Jeans*. C'est la masse *minimum*, à une température T et une masse volumique ρ données, pour que le nuage commence son effondrement. En éliminant le rayon par $M = 4\pi\rho R^3/3$ dans l'équation ci-dessus, on obtient la condition d'effondrement suivante: [[eq-MJeans]]

$$M \geq M_{\text{Jeans}} \sim C \left(\frac{kT}{G\mu} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}}, \quad (2.2)$$

où C est une constante numérique sans dimension de l'ordre de l'unité. Des calculs plus précis montrent que $C \sim 3.7$.

En prenant un nuage composé d'hydrogène uniquement, on aura $\mu = m_p$ et $\rho = nm_p$, où m_p est la masse du proton. On peut alors exprimer la masse de Jeans en masses solaires de la manière suivante:

$$M_{\text{Jeans}} \sim 6 \times 10^4 \frac{T^{3/2}}{n^{1/2}} M_{\odot}.$$

Nous voyons que la masse de Jeans varie comme $n^{-1/2}$. Ceci a une conséquence importante: à mesure que le nuage se contracte, n augmente, et donc M_{Jeans} *diminue*. Autrement dit, le nuage va se fragmenter en sous-nuages une fois la masse de Jeans pour ces sous-nuages atteinte. Ces derniers vont à leur tour se scinder en sous-sous-nuages, etc... Nous avons donc toute une hiérarchie d'effondrements, depuis les grandes masses vers les petites masses.

Comme nous le soulignons plus haut, il s'agit là d'un problème très difficile à résoudre car il fait intervenir des processus turbulents dans le gaz en contraction, avec des couplages complexes avec le champ magnétique, la viscosité, etc... Le but de ces calculs est de retrouver la distribution initiale de masses dans un région de formation d'étoiles (ou IMF, Initial Mass Function en anglais).

La chose importante à noter pour nous est que la masse de Jeans d'un nuage est toujours grande par rapport aux masses stellaires individuelles (voir Fig. 2.1). En fait, les étoiles naissent en général par ensemble de *plusieurs centaines ou milliers d'étoiles*: on ne peut pas former en principe un Soleil isolé dans la galaxie, à partir d'un tout petit nuage. Une fois formées, les étoiles se diluent dans la galaxie par les effets de rotation et de marée galactiques. Ainsi, le Soleil a perdu de vue ses sœurs depuis plusieurs milliards d'années...

2.2.2 Rayon de Jeans

On peut également exprimer la condition d'effondrement en terme de *rayon de Jeans*, toujours pour une température T et une masse volumique ρ données. Il suffit en fait d'éliminer M dans (2.1), via $M = 4\pi\rho R^3/3$. Ainsi, un nuage peut s'effondrer si sa taille est *inférieure* à: [[eq-RJeans]]

$$R \leq R_{\text{Jeans}} \sim C' \left(\frac{kT}{G\mu} \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}}, \quad (2.3)$$

où la constante sans dimension C' vaut ~ 1 .

Dans l'application numérique, on peut exprimer R_{Jeans} en parsecs:

$$R_{\text{Jeans}} \sim 8 \times 10^3 \frac{T^{1/2}}{n^{1/2}} \text{ pc.}$$

Des valeurs du rayon de Jeans sont indiquées dans la figure (2.1).

Nous voyons alors que les nuages de formation stellaire sont en fait immenses, i.e. ont des tailles de *dizaines* ou centaines de parsecs. Ces véritables pépinières sont ensuite dispersées dans la galaxie par effet de marée galactique, comme nous le soulignons plus haut. On peut montrer que les effets de marée dus à un corps central de masse M_c (ici le bulbe galactique) peuvent séparer deux étoiles de masse M_* orbitant à la distance r l'une de l'autre si:

$$r \geq r_{\text{mar}} \sim a \left(\frac{M_*}{3M_c} \right)^{1/3},$$

où a est la distance des deux étoiles au centre galactique. Au niveau du Soleil, $a \sim 8500$ pc. De plus, la masse du bulbe est de l'ordre de $10^{10} M_\odot$. En prenant $M_* \sim M_\odot$, on obtient $r_{\text{mar}} \sim 1$ pc. Par exemple, les Pléiades sont un amas d'étoiles jeunes qui se sont formées ensemble et qui sont en train de se séparer. Le Soleil lui a perdu depuis longtemps ses sœurs dans la Galaxie... De plus, ce calcul explique pourquoi on n'observe pas d'étoiles doubles séparées de beaucoup plus qu'un parsec.

2.3 Temps de chute libre

Nous avons vu pour l'instant que la masse d'un nuage doit être grande par rapport à celle du Soleil pour que l'effondrement se produise. Nous allons maintenant estimer le *temps* que va prendre le nuage pour s'effondrer sur lui-même.

Au début de l'effondrement, rien n'arrête la chute du nuage: la pression interne est encore très faible, et l'énergie lumineuse provenant de l'échauffement progressif du nuage (lié à la contraction de ce dernier) est immédiatement évacuée car le nuage est encore transparent.

Une parcelle de nuage à la périphérie, i.e. à la distance R du centre du nuage, subit une accélération $\gamma \sim GM/R^2$ de la part de ce dernier. Elle commence donc à tomber vers le

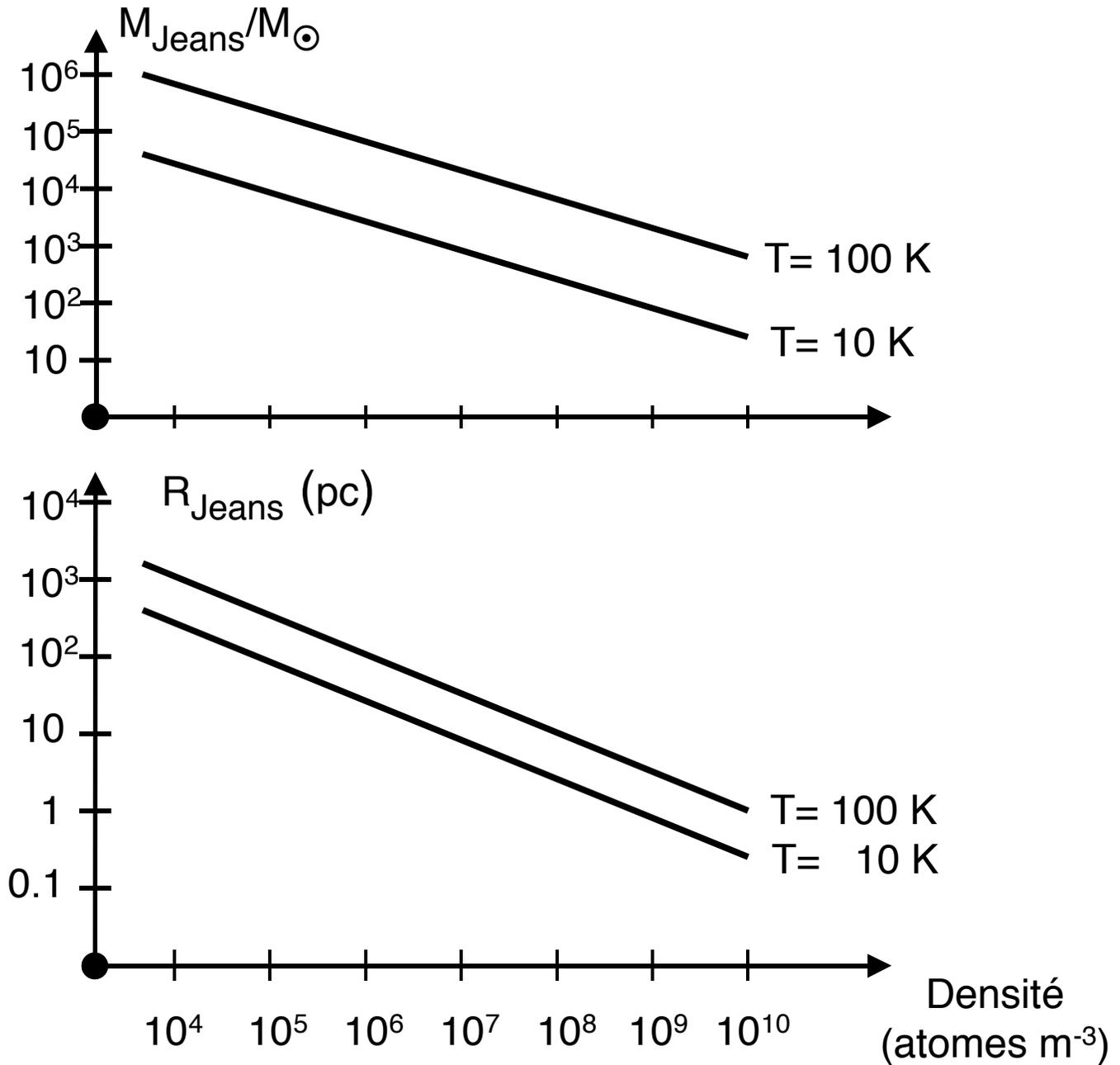


Figure 2.1: [[fig-Jeans]] En haut: masse de Jeans (en masse solaire) en fonction de la densité n (atomes m^{-3}), en échelle log-log, voir Eq. (2.2). En bas: rayon de Jeans (en parsecs) en fonction de la densité n en échelle log-log, voir Eq. (2.3).

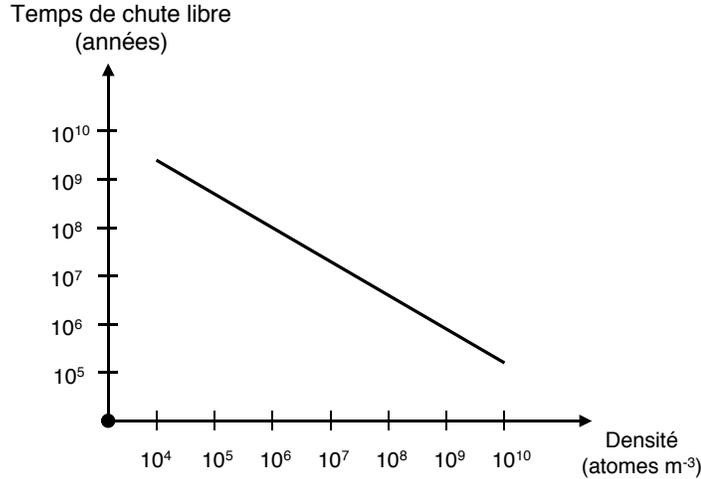


Figure 2.2: Le temps de chute libre d'un nuage (en années) en fonction de sa densité (en atomes m⁻³), voir l'équation (2.4) et la discussion dans le texte.

centre avec la loi $x = \gamma t^2/2$. La parcelle aura atteint le centre quand $x \sim R$. On obtient donc $t_{\text{chute}} \sim \sqrt{2R/\gamma} = \sqrt{2R^3/GM}$. On peut exprimer ce temps *uniquement* en terme de masse volumique, puisque $M \propto \rho R^3$:

$$t_{\text{chute}} \sim \frac{0.3}{\sqrt{G\rho}}, \quad (2.4)$$

où le facteur 0.3 tient compte du fait que la chute devient de plus en plus rapide à mesure que le corps se contracte. Noter que le temps de chute ne dépend *pas* de la taille de l'objet ni de sa masse, mais uniquement de sa masse volumique.

L'application numérique pour un nuage d'hydrogène $\rho = nm_p$ donne alors:

$$t_{\text{chute}} \sim \frac{3 \times 10^{10}}{\sqrt{n}} \text{ années.}$$

La figure (2.2) montre des valeurs typiques de t_{chute} pour des valeurs variées de n . Nous remarquons que ces temps restent petits par rapport à l'âge de la Galaxie (12-13 milliards d'années). Ainsi, la genèse stellaire est un phénomène relativement rapide: plusieurs générations d'étoiles ont pu voir le jour depuis la formation des galaxies.

2.4 La barrière rotationnelle

Nous avons signalé plus haut qu'une proto-étoile en contraction va augmenter sa vitesse angulaire de rotation, Ω . En effet, cette contraction se fait essentiellement à moment

cinétique H constant:

$$H = I\Omega \sim \text{cste},$$

où $I \sim MR^2$ est le moment d'inertie de la proto-étoile. Une diminution de R induit donc une augmentation de Ω , d'après l'équation ci-dessus.

Dans le même temps, l'énergie cinétique de rotation varie comme:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\Omega^2 \sim \frac{H^2}{2M} \cdot \frac{1}{R^2},$$

alors que l'énergie gravitationnelle varie comme:

$$E_{\text{gr}} \sim -\frac{GM^2}{R}.$$

Comme $E_{\text{rot}} \propto 1/R^2$ et $E_{\text{gr}} \propto -1/R$, il arrive un moment où l'énergie mécanique totale du système devient positive, et la proto-étoile doit véritablement "exploser" à cause de sa rotation trop rapide.

Exercice. Montrer que cette condition exprime en fait l'idée que la force centrifuge à l'équateur de la proto-étoile devient alors supérieure à l'accélération de la pesanteur.

On montrera facilement que $E_{\text{rot}} + E_{\text{gr}} \geq 0$ pour:

$$R \leq R_{\text{rot}} \sim \frac{H^2}{GM^3}.$$

Prenons pour valeur typique du rayon initial du nuage proto-stellaire en contraction, $R_0 \sim 3 \times 10^{-2}$ pc (~ 6000 UA), une période de rotation $\sim 3 \times 10^7$ années et une masse de $M \sim 1M_{\odot}$. Ceci permet de calculer le moment cinétique de la proto-étoile, et donc d'obtenir R_{rot} égal à quelques unités astronomiques.

Ce chiffre est intéressant, car il correspond justement à la taille des distances planétaires autour du Soleil. Ceci nous indique que les planètes ont pu apparaître à partir du disque de gaz et de poussières "laissé en arrière" par la proto-étoile lorsque le gaz devient instable rotationnellement (hypothèse de la nébuleuse proto-planétaire de Kant-Laplace).

De fait, le Soleil a abandonné l'essentiel de son moment cinétique aux planètes¹. On peut montrer que ces dernières (et surtout Jupiter) possèdent $\sim 98\%$ du *moment cinétique* du système solaire, alors que le Soleil en possède plus de 99.9% de la *masse*.

La manière dont ce transfert a eu lieu n'est pas élucidée pour l'instant. Parmi les hypothèses invoquées, on peut citer le couplage proto-étoile/disque, via le champ magnétique et des courants de Foucault qui freineraient le Soleil, de la même manière que les freins ABS des camions. Une autre hypothèse fait intervenir un freinage de l'étoile via des vents stellaires violents (phase dite "T-Tauri"). Enfin, certains chercheurs invoquent la présence de bras spiraux dans le disque (instabilités gravitationnelles), qui pourraient se coupler gravitationnellement avec l'étoile centrale et la ralentir.

¹Montrer que si le Soleil avait gardé pour lui tout seul ce moment cinétique, il tournerait sur lui-même en 10 mn!

Chapitre 3

Etoiles: la naissance

3.1 Etoiles, naines brunes et planètes

Une fois la phase d'effondrement proto-stellaire terminée, un astre va suivre une "carrière" qui dépend essentiellement de sa masse.

Si cette dernière est plus grande qu'environ $0.08 M_{\odot}$, alors la température centrale atteint la valeur critique qui permet à la réaction nucléaire de fusion $4H \rightarrow He$ de s'allumer: on obtient à ce moment-là une *étoile*. En-dessous de cette masse critique, et plus précisément entre environ 0.08 et $0.014 M_{\odot}$, on obtient ce que l'on appelle une *naine brune*, dans laquelle de brèves et faibles réactions nucléaires faisant intervenir le lithium et le deutérium peuvent quand même se produire. En-dessous de $0.014 M_{\odot}$, plus aucune réaction nucléaire n'est possible, et on obtient une *planète*, comme Jupiter ou même la Terre.

A l'autre extrémité, si la masse de l'astre est trop grande (de l'ordre de $100 M_{\odot}$), il devient trop chaud et se trouve littéralement "soufflé" par ses propres photons. Ainsi, nous voyons qu'une étoile ne peut pas être trop légère ni trop lourde...

Avant d'aborder plus en détails les thèmes de la naissance et de la vie d'une étoile, examinons brièvement les deux problèmes de base que doit résoudre un astre, qu'il soit stellaire ou non. Un premier problème immédiat est d'équilibrer la pression qu'exerce en son centre le poids de l'astre. Autrement dit, il faut éviter l'effondrement pur et simple. Un deuxième problème, qui se pose à plus long terme, est de produire l'énergie nécessaire à maintenir une pression qui contre-balance celle du poids.

3.2 Un problème de poids

Les Gaulois avaient peur que le ciel ne leur tombe sur la tête. En fait, ils auraient dû également avoir peur que le sol ne s'effondre sous leurs pieds...

Un astre en général, et une étoile en particulier, a en permanence un problème de poids: il faut en effet créer au centre une pression qui soit capable d'équilibrer la pression exercée par la gravitation. On peut estimer la pression centrale due au poids de la manière suivante. Si on coupe une étoile de masse M et de rayon R en deux par le milieu¹, chaque moitié va exercer sur l'autre une force gravitationnelle de l'ordre de GM^2/R^2 . Cette force s'exerce sur une surface typique de R^2 , soit une pression de l'ordre de:

$$P_{\text{gr}} \sim \frac{GM^2}{R^4}.$$

L'astre aura atteint l'équilibre hydrostatique lorsque la pression créée au centre atteint la valeur ci-dessus. Il est important de noter que cette pression d'équilibre n'est pas toujours d'origine thermique, mais peut également avoir une origine quantique (pression de dégénérescence, ou de Fermi). De plus, cette pression n'est pas nécessairement exercée par des particules comme des protons, électrons ou neutrons, mais peut provenir du rayonnement (photons).

Exercice. Montrer que dans le cas d'une sphère *homogène*, la pression due à la gravité vaut en fait: [[eq-pressiong]]

$$P_{\text{gr}} = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{GM^2}{R^4}. \quad (3.1)$$

Le facteur $3/8\pi$ n'est pas à prendre au pied de la lettre, puisque les étoiles ne sont *pas* homogènes.

3.3 Le problème de l'énergie

Un autre problème pour les étoiles est de trouver une source d'énergie qui puisse expliquer une puissance rayonnée stable (mesurée par la luminosité L) sur des temps grands.

Par exemple, dans le cas du Soleil, nous savons que sa luminosité n'a guère varié sur plusieurs milliards d'années. En effet, les terrains les plus vieux sur Terre ont environ 3.8 milliards d'années, et des formes de vie aquatiques (algues bleues) à cette époque indiquent un climat peu différent de celui d'aujourd'hui, et donc une luminosité à peu près constante du Soleil. De plus, la datation radioactive des météorites primitives donne un temps de formation du système solaire, et donc du Soleil, de 4.55 milliards d'années.

3.3.1 Energie chimique

Une des premières hypothèses avancée pour expliquer la source d'énergie du Soleil a été l'existence de réactions chimiques, par exemple du type $2H + O \longrightarrow H_2O$ ou $C + O_2 \longrightarrow CO_2$, ou avec tous autres éléments chimiques susceptibles d'entrer en réaction².

¹Ce qui n'est pas à conseiller, voir la "La leçon de guitare sommaire" de Bobby Lapointe.

²Rappelons-nous que ce n'est que dans les années 1930 que l'on a su que le Soleil était essentiellement composé d'hydrogène et d'hélium, et qu'il est donc inerte chimiquement!

Une réaction chimique va dégager une énergie typique de l'ordre de $e_{\text{ch}} \sim 1 \text{ eV}$ ($\sim 10^{-19} \text{ J}$) par molécule formée. Une étoile de masse M , composée de particules de masse μ a donc une réserve d'énergie chimique de $E_{\text{ch}} \sim e_{\text{ch}}(M/\mu)$. Comme elle rayonne une puissance de L , elle peut brûler son combustible pendant un temps de l'ordre de:

$$t_{\text{ch}} \sim \frac{e_{\text{ch}}M}{L\mu}.$$

Le Soleil a une masse $M_{\odot} \sim 2 \times 10^{30} \text{ kg}$, et on a au minimum $\mu = m_p$ (masse du proton). Enfin, $L_{\odot} \sim 4 \times 10^{26} \text{ W}$, et donc:

$$t_{\text{ch}} \sim 10^4 \text{ ans},$$

au maximum, un temps minuscule par rapport à l'âge du Soleil. Le même problème se poserait d'ailleurs avec les autres étoiles.

3.3.2 Énergie gravitationnelle: le temps de Kelvin-Helmholtz

Une autre hypothèse invoquée par la suite pour expliquer le rayonnement solaire sur une grande période a été la contraction gravitationnelle d'une masse M de rayon R . En fait, le théorème du viriel [voir ci-dessous et l'annexe (B)] relie l'énergie potentielle (gravitationnelle) de l'étoile à son énergie cinétique (thermique) par $E_{\text{gr}} + 2E_{\text{th}} \sim 0$. Comme $E_{\text{gr}} \sim -GM^2/R$, on voit que l'énergie mécanique totale de l'astre est:

$$E_{\text{mec}} = E_{\text{gr}} + E_{\text{th}} \sim E_{\text{gr}}/2 \sim -GM^2/2R.$$

. Ainsi, lorsque le Soleil se contracte, il doit *perdre* de l'énergie mécanique et la seule manière dont il peut le faire à ce stade est par rayonnement. Par conséquent, $L = -\dot{E}_{\text{meca}}$, et on obtient donc:

$$\dot{R} \sim -\frac{2LR^2}{GM^2}.$$

En faisant l'application numérique pour le Soleil, on trouve $\dot{R} \sim -50 \text{ m année}^{-1}$. Une telle contraction pourrait passer inaperçue d'une année sur l'autre³. Cependant, une telle vitesse de contraction serait visible sur des temps géologiquement courts. Plus précisément, le Soleil peut briller au taux actuel par contraction gravitationnelle sur une échelle de temps (appelée *temps de Kelvin-Helmholtz*) de l'ordre de:

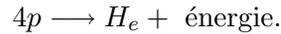
$$t_{\text{K-H}} \sim \frac{R}{\dot{R}} \sim \frac{GM^2}{2LR} \sim 10^7 \text{ ans}.$$

Ce temps, bien que plusieurs ordres de grandeur plus grand que le temps "chimique" t_{ch} estimé ci-dessus, reste cependant petit par rapport aux échelles géologiques. En particulier, on a su dès le 19^{ème} siècle que la Terre avait un âge supérieur à 10 millions d'années. La source d'énergie du Soleil restait donc un mystère.

³On peut mesurer le rayon solaire avec une précision de l'ordre de 100 kilomètres au mieux.

3.3.3 Energie nucléaire

La résolution de ce problème a été apporté par la relativité, et en particulier par l'équivalence masse-énergie $E = mc^2$. Même si la description détaillée des réactions nucléaires au cœur du Soleil n'a été faite qu'au milieu des années 1930 par Hans Bethe (voir le chapitre 4), on a soupçonné peu après les travaux d'Einstein que cette équivalence pouvait expliquer l'éclat du Soleil sur des milliards d'années, par exemple via la fusion de l'hydrogène (proton, p) en hélium (deux protons, deux neutrons):



En effet, la mesure de la masse du proton donne $m_p = 1.00797$ u.m.a. (unité de masse atomique), alors que l'hélium a une masse de $m_{He} = 4.0026$ u.m.a., soit une perte de masse de $4m_p - m_{He} = 0.02928$ u.m.a., i.e. une perte de $\sim 0.007m_p$ par proton fusionné. Ceci représente une énergie libérée de

$$e_{\text{nuc}} \sim 0.007m_p c^2$$

par proton fusionné, soit une énergie totale disponible dans le Soleil de

$$E_{\text{nuc}} \sim 0.007M_{\odot}c^2.$$

En pratique, on peut montrer que seul le centre du Soleil est assez chaud pour maintenir les réactions de fusion, ce qui fait que seulement $\sim 10\%$ de la masse du Soleil peut fusionner en hélium, soit $E_{\text{nuc}} \sim 7 \times 10^{-4}M_{\odot}c^2$. Le temps de vie "nucléaire" du Soleil est donc de:

$$t_{\text{nuc}} = \frac{E_{\text{nuc}}}{L} \sim 7 \times 10^{-4} \cdot \frac{M_{\odot}c^2}{L} \sim 10^{10} \text{ ans.}$$

Ainsi, le Soleil, qui a actuellement environ 5 milliards d'années, se trouve au milieu de sa vie: la nature de la source d'énergie est trouvée, même si les mécanismes de fusion sont complexes dans le détail, comme nous le verrons plus tard.

3.4 Température interne d'une proto-étoile

Nous allons considérer ici le modèle le plus simple possible d'étoile: il s'agit d'une sphère homogène de gaz chaud de température T , de masse M et de rayon R , composée uniquement d'hydrogène, i.e. d'un mélange ionisé (plasma) de protons de masse m_p et d'électrons de masse $m_e \ll m_p$. En réalité, la sphère n'est pas homogène, elle est plus dense et plus chaude au centre, et le gaz contient de l'hélium, ainsi que des éléments lourds ou "métaux" (C, N, O , etc...), en plus de l'hydrogène. Cependant, les calculs dimensionnels que nous allons faire restent physiquement valides, et les ordres de grandeur des applications numériques seront corrects.

Fondamentalement, une proto-étoile arrive à chauffer son intérieur grâce à son énergie potentielle de gravitation E_{gr} . Le travail du poids se transforme alors en énergie cinétique des particules, et donc finalement en énergie thermique d'agitation, E_{th} . Comme la contraction d'une proto-étoile est lente, on peut appliquer le théorème du viriel et écrire (voir l'annexe B: [[eq-eviriel]])

$$E_{\text{gr}} + 2E_{\text{th}} \sim 0. \quad (3.2)$$

Remarquons que le facteur 2 qui intervient ici n'est pas fondamental pour notre analyse. L'équation ci-dessus indique simplement qu'une partie substantielle de l'énergie potentielle de l'astre (la moitié) va être transformée en énergie thermique.

L'énergie potentielle de gravitation d'une sphère homogène est de:

$$E_{\text{gr}} \sim -\frac{3GM^2}{5R}.$$

L'énergie cinétique moyenne d'une particule est de $3kT/2$, et il y a $N_p = N_e = M/m_p$ protons et électrons dans l'étoile⁴ Ainsi:

$$E_{\text{th}} \sim \frac{3}{2} \cdot (N_e + N_p)kT.$$

Soit, d'après (3.2): [[eq-Tmoy]]

$$T \sim \frac{GMm_p}{10kR}. \quad (3.3)$$

Cette température doit s'entendre comme une sorte de moyenne à l'intérieur du Soleil. En fait, il existe un gradient de température entre l'extérieur (plus froid) et le centre (plus chaud) de l'étoile. Des calculs plus précis montrent que la température *centrale* T_c de l'étoile est environ 4-5 fois plus élevée que ne l'indique l'équation ci-dessus. Nous prendrons donc: [[eq-Tc]]

$$T_{\text{cen}} \sim \frac{GMm_p}{2kR}. \quad (3.4)$$

Nota: il ne faut pas confondre cette température avec la température *photosphérique* de l'étoile, qui est beaucoup plus petite. Par exemple, la température centrale du Soleil est de l'ordre de 10^7 K d'après l'équation ci-dessus, alors que sa température photosphérique est de l'ordre de 6000 K seulement.

La température centrale crée une pression thermique de:

$$P_{\text{th}} \sim (n_p + n_e)kT,$$

où n_p et n_e sont les densités des protons et des électrons, respectivement. Ainsi: [[eq-Pth]]

$$P_{\text{th}} \sim \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{GM^2}{R^4}. \quad (3.5)$$

Autrement dit, l'échauffement de l'étoile dû à sa contraction crée une pression thermique comparable à la pression exercée par le poids [Eq. (3.1)]. Ceci est normal, car l'énergie potentielle de gravitation et l'énergie thermique sont du même ordre de grandeur, en valeur absolue, via le théorème du viriel (Eq. 3.2).

Ainsi, la proto-étoile atteint un quasi-équilibre, mais cette tentative est vouée à l'échec à terme, comme nous l'avons vu dans la section (3.3.2): l'énergie que rayonne l'astre par contraction gravitationnelle ne lui sert "que" pendant un temps de Kelvin-Helmholtz, soit

⁴Remarquer qu'il y a autant de protons que d'électrons, et que ces derniers ont une masse négligeable par rapport à celle des protons.

une dizaine de millions d'années dans le cas du Soleil, alors qu'il faut en fait expliquer une durée de vie de plusieurs milliards d'années.

Cette crise énergétique ne sera résolue que lorsque les réactions nucléaires s'allument. Nous verrons qu'elles nécessitent une température de l'ordre de

$$T_{\text{nuc}} \sim 15 \times 10^6 \text{ K.}$$

En principe tout astre, quelle que soit sa masse, devrait donc pouvoir atteindre cette température, d'après l'équation (3.4). C'est sans compter la pression de dégénérescence, qui va en fait fixer la masse de la plus petite étoile...

3.5 La masse stellaire minimale

A mesure que l'astre se contracte, les fermions qui composent l'étoile (protons et électrons essentiellement) sont de plus en plus confinés, et un effet quantique se manifeste, à savoir la pression de dégénérescence, ou de Fermi [voir l'annexe (A)]. Cette pression provient du fait que les fermions ne peuvent pas être arbitrairement confinés en espace et en quantité de mouvement, comme toute particule, mais surtout qu'ils ne peuvent pas se trouver dans la *même* case quantique (principe d'exclusion): moins l'espace est disponible, plus leur quantité de mouvement doit augmenter, d'où l'apparition de cette pression. Dans l'annexe (A), nous montrons que c'est surtout les électrons qui contribuent à cette pression, du fait de leur faible masse. La pression de Fermi des électrons a alors pour expression: [[eq-Pdg]]

$$P_{\text{dg}} \sim \frac{2\hbar^2}{m_e} \left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3} \cdot \left(\frac{\rho}{m_p}\right)^{5/3}. \quad (3.6)$$

Pour une étoile composée essentiellement d'hydrogène, on a $Z = A = 1$. De plus, $\rho = 3M/4\pi R^3$, et donc:

$$P_{\text{dg}} = K \frac{M^{5/3}}{R^5},$$

où $K \sim 9.5 \times 10^5$ uSI absorbe les différentes constantes numériques du problème.

Remarquons que $P_{\text{dg}} \propto 1/R^5$, alors que la pression thermique varie comme $P_{\text{th}} \propto 1/R^4$ [Eq. (3.5)]. Donc, la pression de dégénérescence doit l'emporter sur la pression thermique à un certain stade de la contraction. Pour mesurer les importances relatives de P_{dg} et P_{th} , nous définissons: [[eq-alpha]]

$$\alpha \equiv \frac{P_{\text{dg}}}{P_{\text{th}}} \sim \frac{4\pi K}{3G} \cdot \frac{1}{RM^{1/3}}. \quad (3.7)$$

Si $\alpha \leq 1$, alors l'astre est dominé par la pression thermique, et c'est elle qui maintient la pression due au poids au centre de la sphère. Si $\alpha \geq 1$ au contraire, c'est la pression de dégénérescence qui jouera ce rôle.

On peut éliminer le rayon entre les équations 3.4 et 3.7, et obtenir ainsi:

$$T_{\text{cen}} \sim \left(\frac{3G^2 m_p}{8\pi K k}\right) \cdot M^{4/3} \alpha.$$

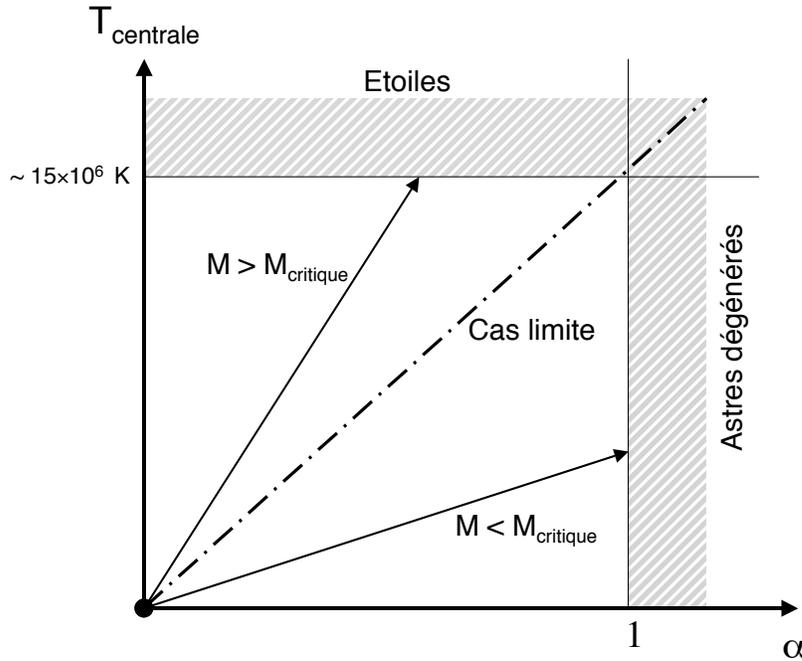


Figure 3.1: Evolution de la température centrale d'une étoile selon sa masse.

C'est cette équation qui va déterminer la masse stellaire minimum, M_{\min} . A mesure que l'astre se contracte, α augmente [Eq. (3.7)], et donc aussi la température, d'après l'équation ci-dessus.

Deux scénarios sont alors possibles, et sont décrits dans la figure (3.1):

- La valeur $\alpha = 1$ est atteinte *avant* que $T = T_{\text{nuc}} \sim 15 \times 10^6$ K. Alors, l'astre se stabilise sur l'effet de la pression de dégénérescence des électrons et ne peut pas démarrer les réactions nucléaires. Nous obtenons un astre dégénéré, et plus précisément, soit une *naine brune*, soit une *planète*. Nous savons de plus que la pression de dégénérescence est *indépendante* de la température. Donc l'astre dégénéré qui se refroidit peu à peu ne voit pas pour autant sa pression de dégénérescence diminuer: il a résolu une fois pour toute son problème de poids...
- La valeur $T = T_{\text{nuc}} \sim 15 \times 10^6$ K est atteinte *avant* que $\alpha = 1$. Alors l'astre démarre ses réactions nucléaires, et se stabilise sous l'effet de la pression thermique créée par ces réactions: une étoile est née....

La limite entre ces deux scénarios correspond à la masse stellaire minimale, M_{\min} . Dans ce cas, la valeur $\alpha = 1$ est juste atteinte pour $T = T_{\text{nuc}}$, soit:

$$M_{\min} \sim \left(\frac{8\pi K}{3G^2} \cdot \frac{kT_{\text{nuc}}}{m_p} \right)^{3/4}. \quad (3.8)$$

L'application numérique (avec $T_{\text{nuc}} \sim 15 \times 10^6$) donne alors $M_{\min} \sim 0.03M_{\odot}$. Des calculs plus rigoureux montrent en fait que cette masse critique est sous-estimée. En effet, nous avons supposé pour simplifier que la masse volumique est constante à l'intérieur de l'astre. En réalité, la masse volumique est plus importante au centre que vers le bord, ce qui augmente la pression de dégénérescence, et donc le facteur K . De plus, nous n'avons pas tenu compte de la présence d'hélium, qui va aussi modifier la valeur de P_{dg} .

Les modèles actuels les plus détaillés donnent en fait:

$$M_{\min} \sim 0.07 - 0.09M_{\odot} \sim 70 - 90M_J,$$

où M_J est la masse de Jupiter. La fourchette indiquée dépend en fait de la "métallicité" de l'étoile, i.e. de l'abondance des éléments plus lourds que H et He . Nous prendrons à partir de maintenant pour valeur nominale de $M_{\min} \sim 0.08M_{\odot} \sim 80M_J$, où M_J est la masse de Jupiter. On obtient alors les paramètres suivants pour "l'étoile minimale":

PARAMÈTRES DE L'ÉTOILE MINIMALE

Masse	$\sim 0.08M_{\odot} \sim 80M_J$
Température photosphérique effective	$T_{\text{eff}} \sim 2000 \text{ K}$
Luminosité	$\sim 10^{-4}L_{\odot}$
Rayon	$\sim 0.1R_{\odot} \sim 1R_J \sim 70000 \text{ km}$

3.6 La masse stellaire maximum

Nous avons vu pour l'instant que la pression gravitationnelle au centre d'un astre est compensée soit par la pression thermique (étoile), soit par la pression de dégénérescence (naine brune, planète). Il y a en fait un troisième type de pression, dite radiative, qui est due au gaz de photons.

De manière générale, un gaz classique ($v \ll c$) exerce une pression thermique $P_{\text{th}} = 2e/3$ sur les parois, où e est la densité d'énergie dans le gaz. Pour un gaz relativiste de photons,

nous avons une pression de nature radiative:

$$P_{\text{rd}} = \frac{e_{\text{rd}}}{3}.$$

De plus, la loi de Stefan volumique donne la densité d'énergie dans un gaz de photons en équilibre thermodynamique, $e_{\text{rd}} = 4\sigma T^4/c$, où σ est la constante de Stefan. En utilisant l'expression de la température obtenue dans l'équation (3.3), nous obtenons:

$$P_{\text{rd}} = \frac{4\sigma}{3c} \left(\frac{Gm_p}{10k} \right)^4 \frac{M^4}{R^4}. \quad (3.9)$$

Nous voyons que cette pression augmente comme M^4 , alors que la pression exercée par le poids vaut $P_{\text{gr}} = 3GM^2/8\pi R^4$, et augmente donc comme M^2 [Eq. (3.1)]. Autrement dit, à mesure que la masse stellaire augmente, P_{rd} augmente plus vite que P_{gr} . A partir d'un certain moment, cette pression est tellement grande qu'elle arrive à souffler l'étoile à cause de la pression des photons!

Ceci se produit pour $P_{\text{rd}} \geq P_{\text{gr}}$, i.e. pour:

$$M \geq M_{\text{max}} \sim \left(\frac{9Gc}{8\pi\sigma} \right)^{1/2} \left(\frac{10k}{Gm_p} \right)^2 \sim 140M_{\odot}. \quad (3.10)$$

Ceci marque la limite stellaire supérieure (ou *limite d'Eddington*). Une étoile trop massive devient trop chaude: la pression des photons la fait exploser, malgré l'effet attractif de la gravitation. De fait, on n'observe pas d'étoiles beaucoup plus massives que $\sim 100M_{\odot}$ dans le diagramme H-R. De telles étoiles ont des vents violents qui arrachent les couches périphériques de l'astre et mettent à nu le cœur où se produisent les réactions nucléaires.

Nous noteront pour terminer que l'intervalle de masse dans lequel on peut trouver une étoile ($\sim 0.1 - 100M_{\odot}$) est relativement limité, par rapport par exemple à l'intervalle de luminosité, qui s'étend lui de $\sim 10^{-4}$ à $\sim 10^4 L_{\odot}$. De même, nous allons voir que les temps de vie stellaires présentent une large fourchette, de quelques millions d'années à plusieurs dizaines de milliards d'années.

Chapitre 4

Etoiles: l'âge adulte

“La vie est trop compliquée pour être étudiée par un astronome. Une étoile est plus simple qu'un insecte.”

Martin Rees.

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment une étoile suffisamment massive ($\gtrsim 0.1M_{\odot}$), mais pas trop ($\lesssim 100M_{\odot}$) arrive à se stabiliser sur la Séquence Principale: la pression thermique générée par les réactions nucléaires maintient le poids de l'étoile, et la pression de radiation reste suffisamment petite pour ne pas “souffler” les couches stellaires vers l'extérieur.

Nous allons maintenant décrire les deux processus fondamentaux qui permettent de déduire les paramètres physiques d'une étoile, à savoir sa *luminosité* L , sa *température effective* T_{eff} et son *rayon* R . Le premier de ces processus est la diffusion des photons du centre vers la surface de l'étoile. Cette diffusion décrit comment l'étoile *évacue* l'énergie produite au centre, et va par conséquent fixer la luminosité de l'étoile. Le deuxième processus est la fusion thermonucléaire, qui décrit comment l'étoile *produit* de l'énergie et arrive ainsi à équilibrer son poids grâce à la chaleur dégagée par cette fusion.

Nous allons voir que tous les paramètres physiques d'une étoile de la séquence principale sont en fin de compte fixés une fois que la masse de l'étoile est précisée (pour une composition chimique donnée). En ce sens les étoiles de la séquence principale forment une famille à un seul paramètre. Il est remarquable de constater que malgré la complexité des phénomènes microscopiques et macroscopiques qui interviennent dans une étoile, un seul paramètre (la masse) suffit à décrire la vie et la mort d'un corps stellaire!

4.1 Relation masse-luminosité

4.1.1 Diffusion des photons dans une étoile

La luminosité L est le taux avec lequel l'étoile est capable d'évacuer l'énergie dans l'espace. Pour une étoile "normale", la seule manière d'évacuer cette énergie est le rayonnement, *i.e.* les photons¹. La luminosité dépend donc de • la densité de photons à l'intérieur de l'astre et de • la vitesse de diffusion de ces photons du centre, où ils sont produits, vers la surface, où ils sont émis.

Soit e_{rad} la densité d'énergie sous forme de photons dans l'étoile, cela représente une énergie radiative totale de $E_{\text{rad}} = e_{\text{rad}}V$, où V est le volume de l'étoile. Si t_{diff} est le temps de diffusion des photons du centre vers la surface, c'est-à-dire le temps que met l'énergie pour être évacuée, alors la luminosité sera donnée par: [[eq-L]]

$$L = \frac{E_{\text{rad}}}{t_{\text{diff}}} = \frac{e_{\text{rad}}V}{t_{\text{diff}}}. \quad (4.1)$$

Or une étoile est un corps virialisé dont la température centrale varie comme $T \propto M/R$ [Eq. 3.3]. De plus, les photons subissent de nombreuses collisions avec la matière, ce qui assure l'équilibre thermodynamique. Par conséquent l'intérieur de l'étoile est un corps noir, et la loi de Stefan volumique nous fournit $e_{\text{rad}} \propto T^4 \propto M^4/R^4$.

Un photon à l'intérieur d'une étoile subit donc une "marche au hasard" qui le fait diffuser peu à peu vers l'extérieur. Si N est le nombre de collisions qu'il a subies et si λ est le libre parcours moyen du photon, alors on peut montrer que la distance typique de diffusion est $\sim \sqrt{N} \cdot \lambda$. Ainsi, pour aller du centre à la surface, un photon va-t-il subir $N = R^2/\lambda^2$ collisions, ce qui lui prend un temps:

$$t_{\text{diff}} = N\lambda/c = R^2/\lambda c.$$

On estime pour le Soleil que λ est de l'ordre du millimètre (c'est un milieu très opaque!), ce qui donne un temps de diffusion de l'ordre de 50000 ans... Ainsi, si les réaction nucléaires s'éteignaient tout d'un coup au centre du Soleil, il nous faudrait attendre plusieurs dizaines de milliers d'années avant de nous en apercevoir². Remarquons que si le Soleil était transparent, les photons mettraient à peine plus de deux secondes pour être évacués, ce qui serait fatal pour le Soleil,... et pour nous.

De manière générale, le libre parcours moyen varie lui-même comme l'inverse de la densité n des particules diffusantes (électrons essentiellement): $\lambda = 1/\sigma_T n$, où σ_T est la section efficace de collision du photon avec les électrons, ou section efficace de Thompson. Ainsi, $\lambda \propto V/M$ et finalement:

$$t_{\text{diff}} \propto \frac{MR^2}{V} \propto \frac{M}{R}.$$

¹Nous verrons que les supernovae évacuent l'essentiel de leur énergie sous forme de neutrinos.

²En toute rigueur, les astronomes qui observent les neutrinos solaires le sauraient au bout d'une dizaine de minutes...

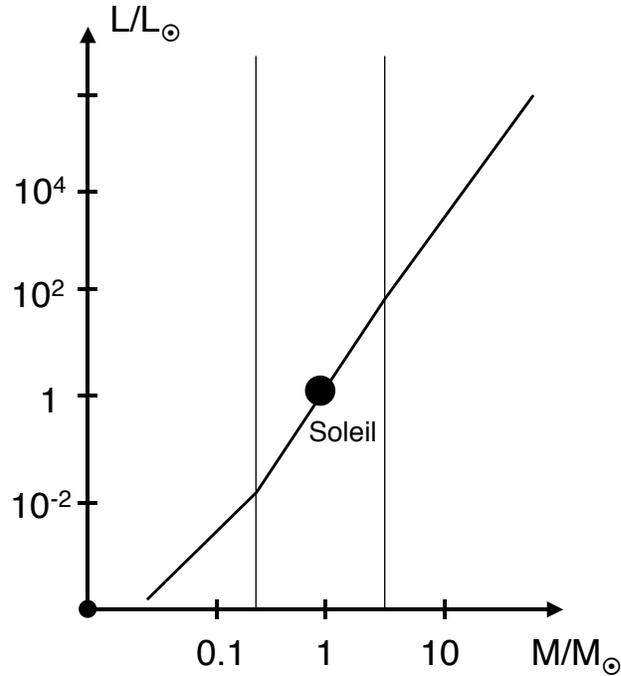


Figure 4.1: [[fig-masselum]] Relation masse-luminosité pour les étoiles de la séquence principale. Dans ce diagramme log-log, on note bien la pente proche de 3 sur une large gamme de masses.

En combinant les relations précédentes, on obtient: [[eq-masselum]]

$$L \propto \frac{M^4}{R^4} \cdot R^3 \cdot \frac{R}{M} \propto M^3. \quad (4.2)$$

Cette relation est bien vérifiée sur la séquence principale, comme le montre la figure (4.1).

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, on arrive au résultat a priori surprenant que la luminosité d'une étoile ne dépend, dans une large mesure, *que* de sa masse (et de constantes physiques fondamentales, bien sûr). En particulier, cette luminosité ne dépend pas de la source d'énergie au cœur de l'astre. Elle ne dépend pas non plus du rayon R de l'étoile. En fait, le rayon et la température effective doivent *s'ajuster* de manière à respecter la loi de Stefan, $L = 4\pi R^2 T_{\text{eff}}^4$.

Exercice: d'après vous, pourquoi les étoiles qui ne sont pas dans la séquence principale ne suivent-elles pas cette relation?

4.1.2 Durée de vie d'une étoile

Cette relation a une implication importante sur la durée de vie de l'étoile: la réserve de carburant nucléaire est en effet proportionnelle à la quantité d'hydrogène disponible, *i.e.* à la masse de l'étoile. Sa durée de vie est donc:

$$t_{\text{vie}} \propto \frac{M}{L} \propto \frac{1}{M^2}.$$

Autrement dit, plus une étoile est massive, moins elle vit longtemps. Par exemple, une étoile de 40 masses solaires vivra $\sim 10^{10}/40^2 \sim$ six millions d'années. Ceci explique pourquoi l'on observe de moins en moins d'étoiles massives à mesure que l'on remonte la Séquence Principale. Au contraire, "l'étoile minimale" que nous avons décrite dans le chapitre précédent ($\sim 0.1M_{\odot}$) peut vivre 10^{13} ans, soit largement plus que l'âge de l'Univers. Ainsi, certaines étoiles de faible masse sont-elles primordiales: elles sont de première génération, nées lors de la formation même des galaxies.

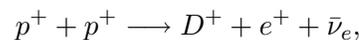
4.2 Fusion de l'hydrogène

La fusion de l'hydrogène revient à transformer quatre protons en un noyau d'hélium. Cependant, la probabilité de trouver quatre protons au même endroit et au même moment est beaucoup trop faible pour que la fusion se produise directement. Plusieurs chemins sont possibles pour cette fusion, nous allons les évoquer rapidement ici, et en donner une description plus complète dans le prochain chapitre.

4.2.1 Le cycle p-p

Dans une étoile de masse modeste ($\lesssim 1.1M_{\odot}$), c'est le cycle "p-p" (proton-proton) qui contribue à l'essentiel de la production d'énergie. Nous verrons que dans des étoiles plus massives, c'est le cycle "CNO" qui est dominant. Il existe en fait trois versions du cycle p-p, dont nous allons décrire la version la plus courante ("p-p I").

- La première étape du cycle p-p pas consiste en la fusion de deux protons:



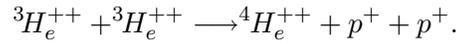
où D^+ est le noyau de deutéron (un proton + un neutron), e^+ est un positron (l'antiparticule de l'électron), et $\bar{\nu}_e$ est l'anti-neutrino électronique. Cette réaction est en fait plus complexe qu'elle n'y paraît puisqu'elle fait intervenir *deux* interactions fondamentales: l'interaction forte, qui "colle" les deux protons l'un à l'autre, et l'interaction faible qui transforme un proton en neutron et provoque ainsi l'éjection d'un positron et d'un neutrino.

- Le deuxième pas consiste en la capture d'un proton par le deutéron, qui ne fait intervenir que l'interaction forte:

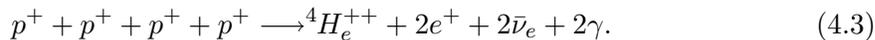


et forme ainsi un isotope de l'hélium, plus un photon gamma.

- Le troisième pas fait intervenir la fusion des deux noyaux d'hélium 3:



Le bilan de ces trois réactions est donc, après addition membre à membre: [[eq-pppp]]



Chacune des réactions libère de l'énergie. De plus, les deux positrons s'annihilent rapidement avec des électrons environnants et libèrent eux-mêmes des photons gamma. L'énergie ainsi émise sert à chauffer le cœur de l'étoile, et à maintenir la pression thermique. L'énergie diffuse alors lentement sous forme radiative (*i.e.* sous forme de photons) vers la surface de l'étoile, en se dégradant sans cesse en énergie. Ainsi, les photons qui émergent ont des longueurs d'onde dans le domaine visible, alors qu'ils ont été émis sous forme de rayons gamma initialement³.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la réaction (4.3) se faisait avec une perte de masse de $\sim 0.028m_p$, ce qui correspondait à une libération d'énergie de:

$$e_{\text{nuc}} \sim 0.007m_p c^2 \sim 10^{-12} \text{ J} \sim 6.5 \text{ Mev}$$

par proton fusionné.

L'essentiel de cette énergie se retrouve dans les photons gamma produits au cours de la réaction. Une petite partie de l'énergie est libérée sous forme de neutrinos $\bar{\nu}_e$. Ces derniers n'ayant pas de charge, et interagissant avec la matière uniquement via l'interaction faible, leur section efficace de collision est extrêmement faible: il peuvent en fait s'échapper du centre du Soleil en quelques secondes, et atteindre la Terre en une dizaine de minutes⁴.

Nous citerons pour mémoire deux autres types de cycles p-p, moins importants, qui font intervenir au cours de la fusion des éléments plus lourds que H et H_e . Ainsi le cycle "p-p II" synthétise temporairement le béryllium ${}^7\text{B}_e$ et le lithium ${}^7\text{L}_i$ et le cycle "p-p III" produit les isotopes ${}^7\text{B}_e$ et ${}^8\text{B}_e$. Ces éléments sont détruits à mesure qu'ils se forment, ce qui fait que le bilan est toujours donné par l'équation (4.3).

4.2.2 Le cycle CNO

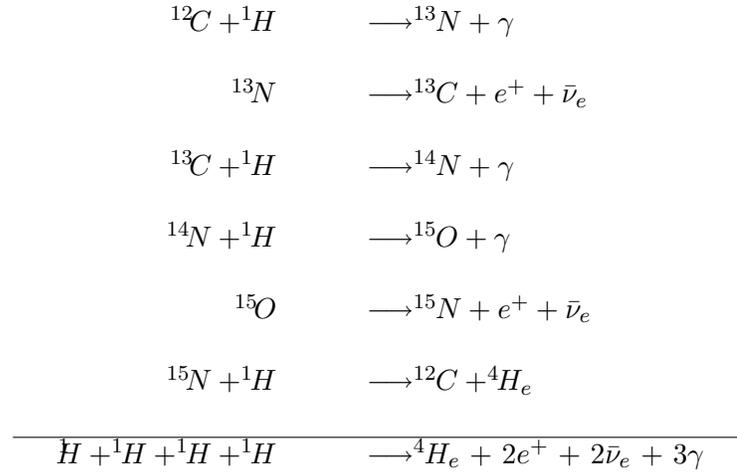
Nous verrons dans le prochain chapitre que les températures nécessaires au cycle p-p sont de l'ordre de 10-15 millions de degrés K. Ce sont les températures les plus basses pour lesquelles des réactions thermonucléaires de fusion peuvent se produire dans des étoiles. Cependant, plus une étoile est massive, plus son intérieur est chaud. Pour des températures supérieures à 15 millions de degrés K (*i.e.* des étoiles de masse supérieure à $\sim 1.1M_\odot$),

³C'est cette dégradation qui nous permet de vivre sur la Terre...

⁴On ne sait pas encore si les neutrinos ont une masse faible, mais finie. Si c'est le cas, leur vitesse est proche, mais non égale, à celle de la lumière.

un autre cycle, dit “CNO”, va devenir dominant. Il tire son nom du fait qu’il utilise le carbone comme catalyseur⁵, et produit temporairement de l’azote et de l’oxygène. Ceci dit, le bilan reste toujours le même, à savoir la réaction décrite dans (4.3).

Les différentes étapes du cycle CNO sont les suivantes:



Ce n’est qu’une fois que l’hydrogène est épuisé au centre de l’étoile que d’autres réactions peuvent avoir lieu, et que la synthèse d’éléments plus lourds peut commencer (voir chapitre 6).

⁵On appelle parfois cette réaction “cycle du carbone”.

Chapitre 5

La fournaise stellaire

Nous allons décrire maintenant dans quelles conditions une étoile peut démarrer et maintenir des réactions nucléaires en son centre. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, la fusion de l'hydrogène permet de synthétiser de l'hélium. Ceci dit, nous n'avons pas encore décrit *comment* cette fusion va se faire, et en particulier, dans quelles conditions de température.

Une telle fusion est paradoxale puisque les protons devraient se repousser violemment à cause de leur charge positive. Autrement dit, il faut que les protons puissent vaincre la *barrière coulombienne* avant de pouvoir fusionner. Pour cela, il faut qu'ils aient une énergie cinétique suffisante, autrement dit, que la température soit assez grande¹.

La fusion $4H \rightarrow He$ est en fait possible grâce à l'existence d'une *interaction forte* (parfois appelée force nucléaire) entre les protons et les neutrons, et de manière plus générales, entre les hadrons, i.e. les particules composées de quarks, sensibles à l'interaction forte (voir le chapitre 1). C'est l'énergie de liaison associée à cette force, beaucoup plus grande que la répulsion électromagnétique, qui explique la longévité des étoiles². Cependant, la force nucléaire a un rayon d'action r_n très petit (de l'ordre du Fermi, 10^{-15} m), alors que la répulsion électrostatique, ou coulombienne, entre protons a elle une portée infinie.

L'expérience montre que l'interaction forte (attractive) commence à se faire sentir pour des distances $r \leq r_n \sim 1.4 \times 10^{-15}$ m = 1.4 Fermi. A cette distance, le potentiel coulombien vaut $e^2/4\pi\epsilon_0 r_n \sim 2 \times 10^{-13}$ J. Chaque proton en collision doit donc avoir en principe une énergie cinétique de $E_c \sim 10^{-13}$ J, correspondant à une température de $2E_c/3k \sim 5 \times 10^9$ K. Cette température est beaucoup trop élevée, et des réactions nucléaires ne pourraient pas avoir lieu dans le Soleil, puisque sa température centrale actuelle est de l'ordre de 10^7 K d'après le théorème du viriel, voir l'Eq. (3.4).

En fait, deux effets vont se combiner pour rendre les réactions nucléaires possibles à "seulement" 10^7 K. D'une part *l'effet tunnel*, de nature quantique, va permettre aux

¹D'où le terme de réactions *thermonucléaires*

²Et qui explique de manière générale que l'énergie libérée par particule lors de réactions nucléaires est des millions de fois plus grande que l'énergie libérée lors de réactions chimiques.

Le proton a alors besoin d'un supplément d'énergie $\Delta E = E_n - E$ pour pouvoir franchir la barrière coulombienne. Nous allons voir que E_n est sensiblement plus grand que E , ce qui fait que:

$$\Delta E \sim E_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}.$$

Cette énergie peut être "prêtée", grâce au principe d'incertitude, pendant un temps Δt tel que:

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar.$$

Grâce à cette énergie supplémentaire (et inespérée dans les années 1930...), le proton acquiert une vitesse de $v \sim \sqrt{2\Delta E/m_p}$ en direction de l'autre proton. Il parcourt ainsi une distance de:

$$\Delta r = v \cdot \Delta t \sim \hbar \sqrt{\frac{2}{m_p \Delta E}} = \hbar \sqrt{\frac{8\pi\epsilon_0}{m_p e^2}} \cdot r_n$$

Pour que la fusion ait lieu, il faut que la nouvelle distance d'approche soit inférieure à r_n , i.e. que $\Delta r \sim r - r_n \sim r$, car nous allons voir que r est sensiblement plus grand que r_n . L'effet tunnel devient donc sensible pour:

$$r \sim \hbar \sqrt{\frac{8\pi\epsilon_0}{m_p e^2}} \cdot r_n \sim 10 \text{ Fermi},$$

en prenant $r_n \sim 1.4$ Fermi. Ce calcul sous-estime en fait un peu l'effet tunnel, et on peut montrer que les protons peuvent déjà franchir la barrière de potentiel pour des distances de:

$$r \sim 50 \text{ Fermi},$$

ce qui correspond à une énergie de répulsion coulombienne de 4×10^{-15} J, soit une énergie cinétique minimale par proton de: [[eq-E0]]

$$E_0 \sim 2 \times 10^{-15} \text{ J}. \quad (5.1)$$

Comme nous l'avons dit plus haut, ceci correspond en principe à une température de 10^8 K, encore trop haute pour expliquer la fusion à l'intérieur du Soleil.

Notons que l'effet tunnel n'est *pas* en contradiction avec la loi de conservation de l'énergie. En effet, le proton à qui on a "prêté" l'énergie ΔE traverse la barrière de potentiel, et se retrouve à un niveau d'énergie identique à son niveau de départ (Fig. 5.1). Il va alors tomber dans le puits de potentiel de l'interaction forte, et libérer ainsi de l'énergie.

5.2 Distribution maxwellienne des vitesses

Dans un gaz en équilibre thermodynamique, les particules n'ont *pas* toutes la même vitesse, donnée par la vitesse quadratique moyenne $v^2 = 3kT/m$. Les vitesses suivent en fait une loi de distribution, appelée distribution maxwellienne. Plus précisément, la probabilité $P(v)dv$ qu'un proton ait une vitesse comprise (en module) entre v et $v + dv$ est donnée par:

$$P(v) = 4\pi \left(\frac{m_p}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot v^2 \exp \left(-\frac{m_p v^2}{2kT} \right).$$

(Le facteur 4π sert à normaliser cette probabilité, i.e. à avoir $\int P(v)dv = 1$ pour v variant de 0 à l'infini.) On peut simplifier l'expression ci-dessus en posant $x = \sqrt{m_p v^2 / 2kT} = \sqrt{E/kT}$, où E est l'énergie cinétique de la particule. Alors:

$$P(v)dv = \frac{4}{\pi} x^2 \exp(-x^2) dx.$$

Ainsi, la probabilité pour qu'un proton ait une énergie supérieure à $E_0 \sim 2 \times 10^{-15}$ J, nécessaire à l'effet tunnel, vaut:

$$P(E \geq E_0) = \frac{4}{\pi} \int_{x_0}^{+\infty} x^2 \exp(-x^2) dx,$$

où $x_0 = \sqrt{E_0/kT}$. On peut montrer facilement³ que pour x_0 sensiblement plus grand que l'unité (ce qui sera le cas), on a:

$$\int_{x_0}^{+\infty} x^2 \exp(-x^2) dx \sim \frac{x_0}{2} \exp(-x_0^2),$$

ce qui fait que: [[eq-P(E0)]]

$$P(E \geq E_0) \sim 2 \sqrt{\frac{E_0}{\pi kT}} \exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right). \quad (5.2)$$

Le terme dominant dans l'expression ci-dessus est $\exp(-E_0/kT)$. Tant que $kT \ll E_0$, l'exponentielle est extrêmement petite, et très peu de particules ont l'énergie suffisante pour participer à la fusion. Très peu est d'ailleurs un euphémisme ici. Par exemple, dans des conditions "terrestres" ($T \sim 300$ K), on a $P(E \geq E_0) \sim 10^{-200000}$!!! Avec une telle probabilité, pas un seul proton ne pourrait atteindre l'énergie E_0 dans tout l'univers connu ($\sim 10^{80}$ protons). Ceci explique les difficultés de la fusion froide...

5.3 Taux de production nucléaire

Nous allons maintenant estimer le taux de réactions de fusion que doit atteindre le Soleil afin de maintenir sa luminosité L_\odot . Dans le régime stationnaire actuel, la luminosité que rayonne le Soleil vers l'extérieur doit être égale à la production d'énergie nucléaire par seconde au cœur, soit E_{nuc} :

$$L_\odot = E_{\text{nuc}},$$

avec:

$$E_{\text{nuc}} = N_{\text{nuc}} \times e_{\text{nuc}},$$

où N_{nuc} est le nombre de protons fusionnés par seconde dans le Soleil, et où e_{nuc} est l'énergie libérée par fusion d'un proton. Nous avons vu dans le chapitre 4 que $e_{\text{nuc}} \sim 10^{-12}$ J. Pour estimer N_{nuc} , nous remarquons tout d'abord que le nombre de collisions ΔN_{coll} subies par un proton de vitesse v pendant le temps Δt vaut:

$$\Delta N_{\text{coll}} = \sigma_{pp} v n_p \Delta t,$$

³Comment...?

où σ_{pp} est la section efficace de collision proton-proton, et n_p est la densité de proton. Comme l'essentiel de la masse se trouve dans les protons, $n_p \sim \rho/m_p$. Un proton de vitesse v subit donc $n_{\text{coll}} = \sigma_{pp}v\rho/m_p$ collisions par seconde. Pour pouvoir fusionner, un proton doit avoir une énergie cinétique supérieure à E_0 , i.e. une vitesse supérieure à $v_0 = \sqrt{2E_0/m_p}$. Ainsi, seule une proportion $P(E \geq E_0)$ de protons peut participer aux réactions nucléaires à un moment donné. Comme $P(E \geq E_0)$ vaut essentiellement zéro à basse température, et augmente ensuite très rapidement avec T , on peut écrire le nombre de fusions par seconde que peut subir un proton par seconde comme:

$$n_{\text{nuc}} \sim \sigma_{pp}v_0 \frac{\rho}{m_p} \cdot P(E \geq E_0).$$

Si l'on veut avoir le nombre total N_{nuc} de protons fusionnés par seconde au cœur du Soleil, il faut multiplier n_{nuc} par le nombre de protons susceptibles de participer à la fusion, soit fM_{\odot}/m_p , où f est la fraction du Soleil qui est suffisamment chaude pour atteindre les températures nucléaires. La quantité f est mal connue, et est estimée à ~ 0.1 dans le cas du Soleil. En tout état de cause, nous verrons que nos conclusions dépendront peu de la valeur de f .

Ainsi:

$$N_{\text{nuc}} \sim n_{\text{nuc}} \cdot f \frac{M_{\odot}}{m_p}.$$

En ré-arrangeant les deux dernières équations, et en utilisant l'éq. 5.2, on obtient le taux de production d'énergie dans le Soleil, $E_{\text{nuc}} = N_{\text{nuc}}e_{\text{nuc}}$: [[eq-tauxnuc]]

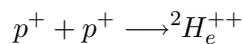
$$E_{\text{nuc}} \sim f \sqrt{\frac{8}{\pi}} e_{\text{nuc}} \sigma_{pp} \frac{\rho M_{\odot}}{m_p^{5/2}} \cdot \frac{E_0}{\sqrt{kT}} \exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right). \quad (5.3)$$

On estime que la masse volumique centrale du Soleil est de l'ordre de $\rho \sim 10^5 \text{ kg m}^{-3}$. Comme on connaît déjà e_{nuc} , f et E_0 , il ne reste plus qu'à estimer σ_{pp} . Un raisonnement naïf consisterait à considérer les protons comme de petites "billes" de rayon $\sim 10^{-15} \text{ m}$, puisque le Fermi est le rayon d'action typique des forces nucléaires.

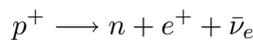
En fait, le premier chaînon du cycle p-p (voir chapitre 4): [[eq-ppD]]



est plus subtil qu'il n'y paraît. Cette réaction fait en effet intervenir *deux* processus complètement différents: d'une part les deux protons doivent d'abord se "coller" l'un à l'autre, via l'interaction forte:



et d'autre part l'un des deux protons doit se transformer en neutron, via l'interaction faible:



(où $\bar{\nu}_e$ est l'anti-neutrino électronique), ce qui transforme le noyau ${}^2H_e^{++}$ en deutéron D^{++} .

Le noyau ${}^2H_e^{++}$ (deux protons collés) est en fait instable. La répulsion électrostatique reste trop forte et le noyau ainsi formé se casse de nouveau en deux protons. De plus, ce

noyau ne peut pas absorber un nouveau proton et continuer ainsi le cycle p-p. En revanche, un proton et un neutron forment un système stable dans la mesure où l’attraction nucléaire est la même que pour ${}^2\text{H}_e^{++}$, mais où la répulsion électrostatique n’existe plus.

Il existe cependant une difficulté dans la transformation du proton en neutron: le premier ayant une masse inférieure au second, la réaction est interdite au repos. Par conséquent, le proton qui va se transformer en neutron doit “emprunter” de l’énergie au proton qui reste dans le noyau ${}^2\text{H}_e^{++}$, via des fluctuations quantiques. La probabilité pour cela arrive est faible. On peut exprimer ceci en disant que la section efficace de collision σ_{pp} des protons pour la réaction 5.4 est petite. Le calcul de cette probabilité donne:

$$\sigma_{pp} \sim 2 \times 10^{-51} \text{ m}^2,$$

soit un “rayon” de l’ordre de $\sqrt{\sigma_{pp}/\pi} \sim 2.5 \times 10^{-26} \text{ m} = 2.5 \times 10^{-11} \text{ Fermi!}$

On obtient donc finalement la valeur numérique de la production d’énergie nucléaire au centre du Soleil, en fonction de la température T : [[eq-tauxnucnum]]

$$E_{\text{nuc}} \sim \frac{3.0 \times 10^{35}}{\sqrt{T}} \exp \left[-\frac{1.45 \times 10^8}{T} \right] \text{ W.} \quad (5.5)$$

Nous avons porté dans la table ci-dessus la valeur de E_{nuc}/L_{\odot} pour différentes valeurs de T . On notera la *brutale* augmentation de ce rapport entre 10^7 et 10^8 K: c’est vers 1.2×10^7 que la production d’énergie nucléaire devient égale à la luminosité du Soleil. En-dessous de cette valeur, E_{nuc}/L_{\odot} est très petit devant l’unité, et juste en-dessus de cette valeur, le rapport devient très grand. Cette brusque augmentation de E_{nuc} avec T est également illustrée dans la Fig. 5.2.

T (K)	E_{nuc}/L_{\odot}
10^6	8.3×10^{-58}
5×10^6	8.8×10^{-8}
10×10^6	0.12
11×10^6	0.44
12×10^6	1.3
50×10^6	6×10^3
100×10^6	1.8×10^4

Ce comportement explique pourquoi le rayon du Soleil est stable et si bien défini. En fait, les réactions nucléaires agissent comme un thermostat. Dès que le Soleil se contracte un peu, sa température centrale augmente (d’après le théorème du viriel), ce qui “emballe” le taux de production nucléaire, et provoque ainsi l’expansion du Soleil par apport d’énergie. Si au contraire le Soleil s’expand un peu, la température centrale chute et le taux de production nucléaire s’effondre, ce qui provoque alors l’effondrement de l’astre sur lui-même. Ainsi, la fusion au cœur du Soleil est bien contrôlée...

Notons que la valeur de 1.2×10^7 K déduite ici dépend des valeurs numériques choisies pour chacune des quantités f , ρ , etc... Selon les modèles plus précis choisis, on obtient des températures centrales variant de $\sim 11 \times 10^6$ K à $\sim 17 \times 10^6$ K. Ceci dit, pour chaque modèle, la sensibilité de E_{nuc} vis-à-vis de T reste très forte, et le mécanisme de thermostat décrit plus haut reste tout à fait valide.

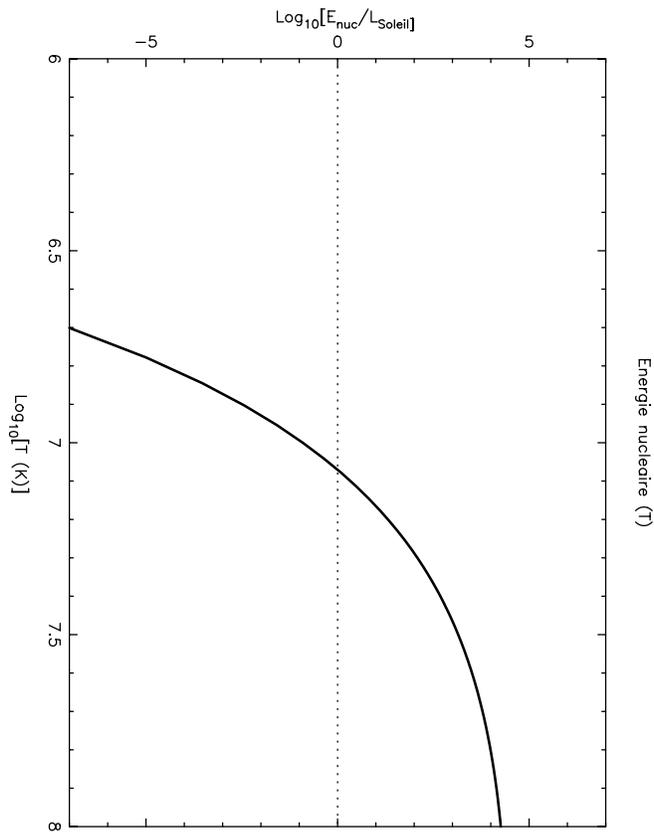


Figure 5.2: Production d'énergie nucléaire au cœur du Soleil (en unité de luminosité solaire) en fonction de la température centrale T .

Remarquons pour terminer que pour $T = 1.2 \times 10^7$, nous avons:

$$P(E \geq E_0) \sim 2 \times 10^{-5}.$$

Autrement dit, quelques millièmes des protons seulement participent à un moment donné à la fusion en hélium dans le cœur du Soleil. C'est grâce à l'énorme énergie libérée par réaction de fusion que ce tout petit nombre suffit à maintenir la production totale d'énergie du Soleil.

Chapitre 6

La mort des étoiles

“L'éternité c'est long, surtout vers la fin...”

Woody Allen

6.1 L'épuisement des réserves nucléaires

Nous avons calculé dans le chapitre précédent l'énergie nucléaire dont dispose une étoile, par rapport à la puissance L qu'elle rayonne dans l'espace. Nous en avons conclu que les étoiles les plus massives de la Séquence Principale ne peuvent durer guère plus que quelques millions d'années, alors que les étoiles de faible masse ont une durée de vie qui dépasse largement l'âge de l'Univers.

Que se passe-t-il lorsque ces réserves viennent à manquer, *i.e.* lorsque l'hydrogène disparaît du cœur de l'étoile? Inexorablement, ce dernier recommence sa contraction, transformant ainsi son énergie gravitationnelle E_{gr} en énergie thermique. Nous avons vu que E_{gr} varie comme $\sim -GM^2/R$, il n'y a donc en principe pas de limite à cette contraction: une étoile dans le besoin peut toujours compter sur la gravitation pour émettre de l'énergie¹.

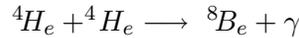
6.2 La structure en couches

Nous avons donc au centre de l'étoile un cœur d'hélium où les réactions nucléaires sont éteintes, une mince couche de transition avec l'enveloppe plus extérieure, où les réactions de fusion peuvent encore se produire, et enfin, l'enveloppe extérieure, qui évacue l'énergie produite.

Comme le cœur se contracte, il s'échauffe. Il arrive un point où la température est suff-

¹Jusqu'au stade de trou noir, du moins, voir plus loin.

isante pour démarrer la fusion de l'hélium en carbone; cette température est supérieure aux 10^7 K nécessaire à la fusion de l'hydrogène, car il faut maintenant vaincre la répulsion électrostatique de noyaux chargés deux fois (*i.e.* vaincre des barrières coulombiennes quatre fois plus fortes). On estime que cette température est de l'ordre de 10^8 K, conduisant ainsi au cycle “triple alpha” (du nom de la particule α , *i.e.* le noyau d'hélium), qui conduit à la synthèse du carbone, via le béryllium:



De nouveau, cette source d'énergie va s'épuiser, et le cœur recommence sa contraction... Ce qui mène, à des températures encore plus élevées, à la fusion du carbone en oxygène:



Viennent ensuite une série de réactions qui synthétisent successivement le néon, magnésium, silicium, soufre, etc... dans des couches successives de plus en plus chaudes à mesure que l'on va vers le centre. C'est ce que l'on appelle la “nucléosynthèse stellaire”, qui fabrique tous les éléments plus lourds que l'hélium (ou “métaux” dans la terminologie de la physique stellaire). Cette nucléosynthèse s'oppose donc à ce que l'on appelle la “nucléosynthèse primordiale”, *i.e.* la période qui s'est étendue entre 1 sec et 3 mn après le Big Bang, et pendant laquelle l'hydrogène et l'hélium ont été synthétisés.

6.3 Géantes rouges

La nucléosynthèse stellaire est fondamentale, pour nous en tous cas, puisque sans elle ne peuvent exister ni planètes de type tellurique, ni a fortiori, la vie. Les éléments lourds fabriqués à l'intérieur de l'étoile doivent cependant être éjectés dans l'espace, afin d'enrichir le milieu interstellaire à partir duquel se formeront des étoiles de seconde, troisième, etc... génération.

Ceci se produit lors de l'inflation de l'enveloppe extérieure de l'étoile. En effet, les réactions nucléaires successives qui s'allument élèvent la température centrale, et brise l'équilibre que l'astre avait atteint sur la Séquence Principale. Les photons dégagés par ces réactions diffusent difficilement vers la surface. Pour s'ajuster à ce nouvel apport d'énergie, l'enveloppe s'enfle pour augmenter sa surface, et donc sa luminosité, via la loi de Stefan. On peut montrer également que cette expansion diminue la température effective de l'astre, qui devient de plus en plus rouge, d'où le terme de “géante rouge”.

Pendant ce temps, le cœur devient de plus en plus compact. Des mouvements de convection entre ce cœur et l'enveloppe transportent les éléments lourds du centre vers la périphérie. Il arrive un moment où l'enveloppe est trop faiblement liée gravitationnellement

au cœur. Elle est alors soufflée dans l'espace, et on ne peut plus à proprement parler d'une étoile, mais plutôt d'une "nébuleuse planétaire" qui se présente comme une bulle de gaz entourant un astre compact.

Durant cette période, on a la chance de pouvoir observer des réactions nucléaires qui ont lieu à la surface du cœur, mis à nu à cause de l'expansion rapide de l'enveloppe. Une partie significative de la masse initiale de l'étoile est alors rendue au milieu interstellaire, enrichie en éléments lourds. Le sort du résidu central dépend alors cruciallement de sa masse.

6.4 Naines blanches

A mesure que le cœur se contracte, la pression de dégénérescence due aux électrons augmente. Nous avons vu qu'elle augmentait comme $1/R^5$, alors que la pression due à la gravitation augmente comme $1/R^4$ (voir les équations 3.1 et 3.6, respectivement). Ainsi, le cœur peut-il atteindre un équilibre lorsque: [[eq-rayon-nb]]

$$\frac{3}{8\pi} \cdot \frac{GM^2}{R^4} = K \frac{M^{5/3}}{R^5}, \quad (6.1)$$

où $K \sim 3 \times 10^5$ uSI car maintenant Z/A vaut 0.5 dans l'équation A.2. Si on exprime la masse en masse solaire, on obtient alors, à partir de l'équation ci-dessus:

$$R \sim 3000 \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^{1/3} \text{ km.}$$

Des calculs plus précis montrent en fait que le coefficient numérique est plus proche de 6000. En tout état de cause, ceci justifie le terme de "naine", car un astre de ce type de une masse solaire a un rayon (~ 6000 km) comparable à celui de la Terre. On les appelle de plus "blanches", car, pour une luminosité donnée, elles sont beaucoup plus chaudes (et donc blanches, d'après la loi de Wien) que les étoiles de la Séquence Principale. Ceci dit ces termes ne sont pas très heureux, car les naines désignent justement les étoiles de classe V, *i.e.* de la Séquence Principale, et les naines blanches n'ont aucune raison d'être blanches, *i.e.* d'avoir une température effective de l'ordre de 6000 K.

La petite taille des naines blanches en font des astres très denses: par exemple une naine blanche d'une masse solaire a une masse volumique de $\rho \sim 2 \times 10^9$ kg m⁻³, soit deux tonnes par centimètre cube! L'équation ci-dessus montre d'autre part que le rayon d'une naine blanche tend à diminuer avec la masse. Autrement dit, la masse volumique va augmenter avec la masse de la naine blanche.

6.5 Supernovae

6.5.1 La masse de Chandrashekhar

L'équation (6.1) ci-dessus indique que *tout* cœur stellaire doit devenir un jour un astre dégénéré... C'est sans compter avec les effets relativistes. Nous avons vu que la contraction

de ce cœur s'accompagne d'un échauffement, et conduit donc à des vitesses de plus en plus grandes pour les électrons².

Dans le cas classique, la vitesse et la quantité de mouvement de l'électron sont liées (e.g. le long de l'axe des x) par l'équation $p_x = m_e v_x$. De plus, le principe d'incertitude nous fournit la relation $p_x \sim \hbar/\Delta x$, où Δx est la distance moyenne entre deux électrons. On peut relier cette distance à la densité des particules, puis à la masse volumique [voir l'annexe (A) pour plus de détails] pour obtenir finalement:

$$v_x \sim \frac{\hbar}{m_e} \left(\frac{Z}{A} \cdot \frac{\rho}{m_p} \right)^{1/3}.$$

Si on prend pour masse volumique celle d'une naine blanche de masse solaire ($\rho \sim 2 \times 10^9$ kg m⁻³), et $Z/A = 0.5$ (on a surtout des éléments lourds) on obtient:

$$v_x \sim 10^8 \text{ msec}^{-1} \sim \frac{c}{3}.$$

On voit donc que les électrons dans une telle naine blanche ont des vitesses encore classiques, mais que l'on est guère éloigné du régime relativiste. Les équations ci-dessus montrent que plus une naine blanche est massive, et donc dense, plus on se rapproche du régime relativiste. Lorsque celui-ci est atteint, la pression de dégénérescence varie comme [annexe (A)]:

$$P_{\text{dg}} = 2c\hbar \left(\frac{Z}{A} \right)^{4/3} \left(\frac{\rho}{m_p} \right)^{4/3} \sim 1.3 \times 10^{10} \rho^{4/3} \sim 1.9 \times 10^9 \frac{M^{4/3}}{R^4} \text{ Pa.}$$

Or, la pression exercée par le poids varie *également* comme $1/R^4$:

$$P_{\text{gr}} \sim \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{GM^2}{R^4}.$$

Contrairement au cas classique, il existe maintenant une masse critique au-delà de laquelle la pression de dégénérescence ne peut plus soutenir l'étoile. Cette masse critique s'appelle la *masse de Chandrasekhar*, et correspond à $P_{\text{gr}} \geq P_{\text{dg}}$. En utilisant les équations ci-dessus, on obtient une valeur de:

$$M_{\text{Ch}} \sim \left(1.9 \times 10^9 \cdot \frac{8\pi}{3G} \right)^{3/2} \sim 1.8M_{\odot}.$$

En fait, cette masse est surestimée ici, et des calculs plus détaillées donnent: [[eq-masse-Chandra]]

$$M_{\text{Ch}} \sim 1.44M_{\odot}. \quad (6.2)$$

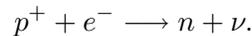
²Les protons et neutrons vont aussi de plus en plus vite, mais leur vitesse reste plus petite que celle des électrons à cause de leur masse plus grande.

6.5.2 L'explosion de la supernova

Une fois que la contraction du cœur stellaire recommence, la température augmente. Des réactions nucléaires synthétisent des éléments chimiques de plus en plus lourds. La chaleur dégagée par ces réactions peuvent pendant une brève période maintenir le cœur contre l'effondrement gravitationnel. Cet effondrement va cependant devenir catastrophique pour trois raisons:

- Il arrive cependant un moment où le fer commence à fusionner en nickel. Cette réaction, et les suivantes, sont *endothermiques* au lieu d'être exothermiques. Ceci est dû au fait que les noyaux au-delà du fer sont de moins en moins lié par l'interaction forte. L'énergie de liaison devient de plus en plus faible (en valeur absolue) par nucléon, et la fusion *absorbe* de l'énergie au lieu d'en produire. Donc, la pression thermique baisse à l'intérieur de l'étoile.

- La réaction de fusion des protons et des électrons devient possible:



Cette réaction est impossible au repos où à basse température car la masse combinée du proton et de l'électron reste inférieure à celle du neutron. Plus précisément, la différence d'énergie entre le neutron et le proton est de $m_n - m_p \sim 1.3 \text{ MeV}$, alors que la masse au repos de l'électron est de $m_e c^2 = 0.5 \text{ MeV}$ environ.

Les électrons relativistes vont avoir une énergie $m_e c^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$, et la barrière d'énergie de 1.3 MeV est franchie par l'électron lorsque $v \gtrsim 0.92c$. Cette fusion est catastrophique pour l'étoile car elle supprime purement et simplement les électrons, et donc la pression de dégénérescence associée!

- Une fois la pression de dégénérescence supprimée, la seule chose qui pourrait maintenir l'étoile serait la chaleur dégagée par la fusion des protons en neutrons. Cependant, l'essentiel de cette énergie est évacuée sous forme de neutrinos, qui ont une surface efficace de collision très petite avec la matière environnante (ils ne sont sensibles qu'à l'interaction faible). Cette énergie quitte donc le centre de l'étoile en une fraction de seconde: l'astre se trouve alors en état de chute libre.

Cette dernière se fait en temps de [voir Eq. (2.4)]:

$$t_{\text{chute}} \sim \frac{0.3}{\sqrt{G\rho}} \lesssim 1 \text{ sec},$$

en prenant une masse volumique typique de l'ordre de $10^{10} \text{ kg m}^{-3}$.

Pendant ce laps de temps très bref, une partie de l'énergie gravitationnelle que perd l'astre sert à synthétiser les espèces chimiques plus lourdes que le fer: nickel, cobalt,..., uranium. Tous ces derniers éléments, présents sur la Terre, proviennent donc d'explosions de supernovae qui ont eu lieu *avant* la formation du Soleil et de son cortège de planètes. Cette "contamination" s'est probablement produite alors que le Soleil était encore dans la nébuleuse proto-stellaire où se sont formées ses consœurs. De par leur masse plus grande, les étoiles qui ont donné lieu à ces supernovae ont vécu peu de temps, et ont ainsi pu

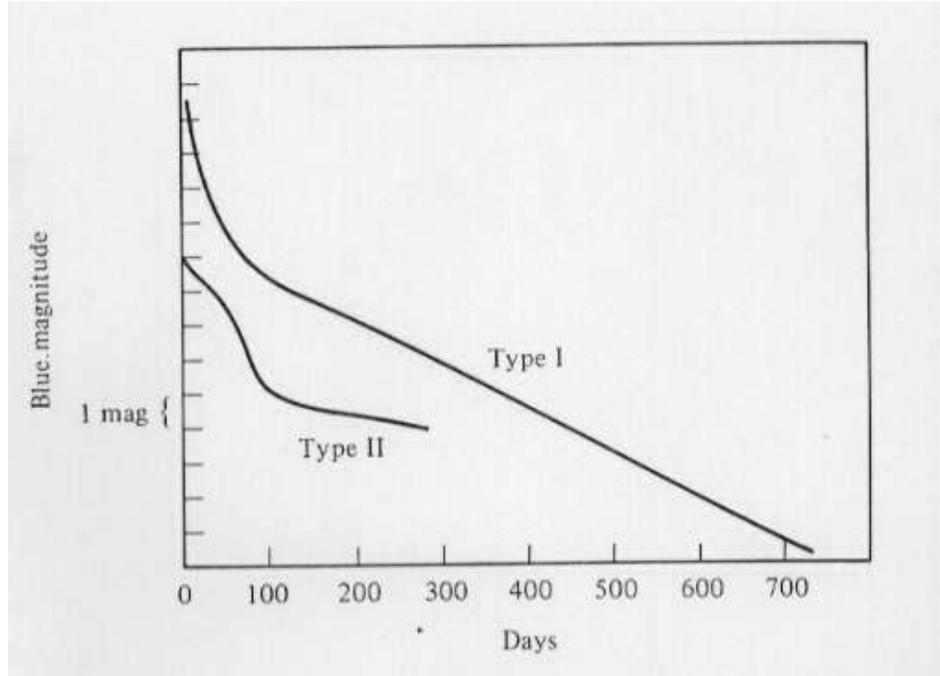


Figure 6.1: [[fig-eclatsn]] Magnitudes typiques des deux types de supernovae au cours du temps.

contaminer le système solaire avant que le nuage proto-stellaire ne se disperse dans la Galaxie.

6.5.3 Luminosité d'une supernova

L'énergie émise par une supernova est essentiellement prise sur la perte de son énergie gravitationnelle lors de l'effondrement de la naine blanche. Comme nous le verrons dans la section suivante, le rayon final de l'étoile à neutrons qui se forme au terme de ce collapse est de l'ordre de $R_f \sim 10$ km, alors que la naine blanche avait un rayon de l'ordre de $R_i \sim 6000$ km. La perte d'énergie gravitationnelle est donc de $-GM^2/R_f + GM^2/R_i \sim -GM^2/R_f \sim 6 \times 10^{44}$ Joules.

On estime qu'environ 99% de cette énergie est évacuée sous forme de neutrinos, 1% sous forme cinétique (rebond de l'enveloppe sur l'étoile à neutrons, voir ci-dessous), et une trace (0.1%) sous forme lumineuse. L'essentiel de la lumière est émise sur une période Δt de l'ordre du mois [Fig. (6.1)], ce qui correspond à une luminosité de:

$$L \sim \frac{10^{-3} \times 6 \times 10^{44}}{\Delta t} \sim 2 \times 10^{40} \quad W \sim 6 \times 10^{11} L_{\odot},$$

soit une luminosité comparable à la Galaxie toute entière!

Un tel éclat est fort utile pour estimer la distance de galaxies lointaines: si on suppose que les supernovae d'un type donné ont toutes une luminosité comparable, leur magnitude

apparente donne une bonne idée de leur distance. De plus, on peut les détecter très loin dans l'Univers grâce à leur éclat.

6.6 Etoile à neutrons

6.6.1 Rayon

Lors de l'effondrement de la naine blanche décrite plus haut, les protons et les électrons peuvent fusionner pour former des neutrons. Ceci supprime la pression de dégénérescence des électrons et explique en partie cet effondrement. Cependant, il arrive un moment où la pression de dégénérescence des *neutrons* dans le cœur parvient à stopper cette chute. En effet, cette pression s'écrit:

$$P_{\text{dg}} = 2 \frac{\hbar^2}{m_n} \left(\frac{Z}{A} \right)^{5/3} \left(\frac{\rho}{m_p} \right)^{5/3} \sim 150 \cdot \frac{M^{5/3}}{R^5} \quad \text{Pa}$$

[voir l'équation (A.2), où l'on a remplacé la masse de l'électron, m_e , par celle du neutron, m_n]. Cette pression équilibre la pression due au poids de l'astre en effondrement lorsque:

$$150 \cdot \frac{M^{5/3}}{R^5} \sim \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{GM^2}{R^4}.$$

L'application numérique donne $R \sim 2(M_\odot/M)^{1/3}$ km. Ce calcul sous-estime en fait le rayon du cœur de neutrons, qui vaut plutôt: [[eq-rneu]]

$$R_{\text{neu}} \sim 15 \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^{1/3} \quad \text{km} \quad (6.3)$$

On obtient alors une étoile à neutrons. Pour la masse minimale de Chandrashekhar ($1.44 M_\odot$), on obtient un rayon de l'ordre de 10 km, soit de la taille d'un petit astéroïde! La masse volumique d'une étoile à neutrons est donc de l'ordre de:

$$\rho \sim 6 \times 10^{17} \quad \text{kg m}^{-3},$$

soit 600 millions de tonnes par centimètre cube!!

La densité neutronique est de l'ordre de $n_n = \rho/m_n \sim 4 \times 10^{44}$ neutrons m^{-3} , ce qui correspond à une distance moyenne neutron-neutron de l'ordre de $n_n^{-1/3} \sim 10^{-15}$ m (1 Fermi). Autrement dit, les neutrons interagissent directement via l'interaction forte: l'étoile à neutrons est en fait essentiellement *un* énorme neutron où circulent des quarks. Il faudrait donc parler d'étoile à quarks plutôt que d'étoile à neutrons.

6.6.2 Pulsar

De par son rayon minuscule (et donc son très petit moment d'inertie), une étoile à neutrons peut tourner à une très grande vitesse. Une étoile à neutrons fraîchement formée peut ainsi tourner sur elle-même en environ une seconde.

Certaines de ces étoiles possèdent un champ magnétique dipolaire très intense, dont l'axe n'est pas nécessairement aligné avec l'axe de rotation. Les électrons qui se trouvent dans l'environnement de l'étoile à neutrons spiralent alors à très grande vitesse (proche de c) le long des lignes de champ magnétique, et émettent un rayonnement dit "synchrotron"³.

Le rayonnement synchrotron est émis dans une cône étroit (une dizaine de degrés d'ouverture) qui balaie l'espace avec la période de rotation de l'astre. Si l'observateur se trouve dans l'ouverture de ce cône, il détectera un bref pulse à chacune des périodes: on parle alors de pulsar.

Un pulsar peut dans certains cas tourner sur lui-même avec une vitesse angulaire de plus en plus grande avec le temps. En effet, l'étoile à neutrons peut "avaler" une étoile compagne qui formait avec l'étoile initiale un système binaire. L'étoile à neutrons récupère ainsi le moment cinétique orbital du compagne, et se met à tourner de plus en plus vite sur elle-même. C'est ainsi que l'on connaît des pulsars dont la période de rotation est de quelques milliseconde seulement. On estime cependant qu'il y a une limite à cette vitesse, et qu'une étoile à neutrons ne peut pas effectuer plus de ~ 2000 tours par seconde: au-delà, l'accélération centrifuge à l'équateur fait littéralement exploser l'étoile à neutrons.

6.7 Trou noir

Une étoile à neutrons est un corps extrêmement compact, aussi la vitesse de libération v_{lib} à sa surface est proche de celle de la lumière. Comme:

$$v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

on a par exemple $v_{\text{lib}} = 2 \times 10^8 \text{ m sec}^{-1}$ à la surface d'une étoile à neutrons de masse $1.44M_{\odot}$ et de rayon 10 km. A mesure que l'on augmente la masse de l'étoile à neutrons, son rayon tend à diminuer, voir l'équation (6.3) qui fournit:

$$v_{\text{lib}} \sim 1.3 \times 10^8 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{2/3}.$$

On a alors $v_{\text{lib}} = c$ pour $M \sim 3M_{\odot}$. Des calculs plus détaillés montrent en fait que l'effondrement de l'étoile à neutrons en trou noir se produit plutôt pour $M \gtrsim 8M_{\odot}$.

³Par opposition au rayonnement "cyclotron", qui se produit lorsque la vitesse reste faible par rapport à celle de la lumière.

Annexe A

La pression de dégénérescence

Nous connaissons déjà la pression thermique, qui provient des collisions de particules (atomes ou photons) sur une paroi. La pression de dégénérescence est d'une nature totalement différente, puisqu'elle a une origine purement quantique.

Dans la nature, les particules peuvent être soit des *fermions*, soit des *bosons*¹. Les fermions sont les particules de spin demi-entier ($n\hbar/2$) et les bosons sont des particules de spin entier ($n\hbar$). On peut montrer en mécanique quantique que les fermions obéissent au *principe d'exclusion* de Pauli, contrairement au bosons. Ainsi, deux fermions ne peuvent pas occuper une *même* case quantique, i.e. ils ne peuvent pas avoir la même position, la même quantité de mouvement, le même spin, etc... Autrement dit, deux fermions ne peuvent avoir les mêmes nombres quantiques.

Parmi les fermions, on compte les électrons, protons, neutrons, etc... et parmi les bosons on trouve les photons, gluons, etc..., et de manière générale, les vecteurs des interactions fondamentales.

Le principe d'exclusion a de profondes conséquences sur la distribution des positions et vitesses d'un gaz de fermions, qui doivent suivre une statistique dite "de Fermi". C'est elle qui donne en particulier la distribution de vitesse maxwellienne dans un gaz parfait en équilibre thermodynamique. En particulier, il existe une limite de densité dans un gaz de fermions, qui ne peuvent être accumulés de manière arbitraire dans un volume donné. C'est cette limite qui va faire apparaître la pression de dégénérescence, par exemple au centre des naines blanches, naines brunes et des planètes.

Les bosons obéissent à la statistique dite "de Bose", et ils peuvent en particulier s'accumuler sans limite en un endroit donné. C'est cette propriété qui permet l'effet laser ou maser par exemple, i.e. un ensemble de photons de même énergie se trouvant au même endroit, autrement dit un rayonnement cohérent. La statistique de Bose explique également la forme du spectre d'un corps noir (fonction de Planck), qui est l'équivalent de la distribution de Maxwell dans un gaz parfait de fermions.

¹Références aux physiciens italien et indien, respectivement, Fermi et Bose.

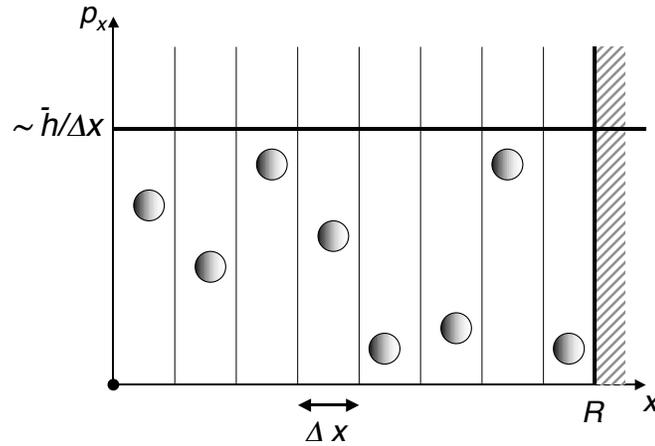


Figure A.1: [[fig-pdg]] Le remplissage des cases quantiques de faible p_x oblige les fermions supplémentaires à se mettre dans des cases où la quantité de mouvement devient de plus en plus grande.

En raccourci, les fermions sont des particules individualistes qui refusent de se trouver au même endroit au même moment, alors que les bosons sont des particules grégaires qui aiment avoir un comportement collectif identique.

A mesure que la densité augmente dans un astre en contraction, les fermions ont un volume disponible $\Delta x \Delta y \Delta z$ de plus en plus petit. Le principe d'exclusion peut alors s'exprimer par la relation d'incertitude d'Heisenberg:

$$\Delta p_x \Delta x \sim \hbar,$$

où p_x est la quantité de mouvement le long de x , avec des expressions identiques le long de y et z . Ainsi les fermions, qui ont un espace de plus en plus réduit en x , vont-ils avoir des excursions de plus en plus grandes en p_x [voir Fig. (A.1)]. Ces excursions vont donner lieu à la pression de dégénérescence:

$$P_{\text{dg}} = n v_x p_x,$$

qui exprime qu'une pression en général est proportionnelle à la densité de particules, n , à la vitesse v_x avec laquelle elles arrivent sur la paroi, et à la quantité de mouvement p_x transportée par chacune des particules.

A.1 Cas classique

Par cas classique, nous entendons que les particules ont une vitesse faible par rapport à celle de la lumière: $v_x \ll c$. Alors $p_x = mv_x$, où m est la masse d'une particule. Alors $P_{\text{dg}} = np_x^2/m$. D'après la relation d'incertitude écrite plus haut, $p_x \sim \hbar/\Delta x$ lorsque $\Delta x \rightarrow 0$. De plus, dans un gaz de densité particulaire n , la distance moyenne entre les particules² est de l'ordre de $\Delta x \sim 1/n^{1/3}$. Ainsi: [[eq-Pn]]

$$P_{\text{dg}} = \frac{\hbar^2}{m} n^{5/3}. \quad (\text{A.1})$$

Les gaz que nous allons considérer sont formés de protons, neutrons et électrons. L'expression ci-dessus montre alors que la pression de dégénérescence des électrons domine celles des protons et neutrons, puisque leur masse m_e est beaucoup plus petite (d'un facteur ~ 1837) que celle des protons et neutrons, m_p et m_n , et que leur densité est égale à celle des protons $n_e = n_p$.

Si les noyaux des atomes présents dans le gaz ont des charges atomiques Z (nombre des protons) et des masses atomiques A (nombre de protons + neutrons), alors la neutralité électrique impose que:

$$n_e = Zn_N,$$

où n_N est la densité des noyaux. De plus, comme l'essentiel de la masse se trouve dans les noyaux, et que les protons et les neutrons ont à peu près la même masse, m_p , la masse volumique est donnée par:

$$\rho \sim An_N m_p.$$

Les deux dernières équations donnent donc $\rho \sim (A/Z)n_e m_p$. On peut alors substituer la valeur de n_e en fonction de ρ dans (A.1) et obtenir la valeur de la pression de dégénérescence. Des calculs plus exacts montreraient en fait que l'expression de P_{dg} dans l'équation (A.1) est sous-estimée d'un facteur 2. Finalement: [[eq-pdgclass]]

$$P_{\text{dg}} = 2 \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{Z}{A} \right)^{5/3} \left(\frac{\rho}{m_p} \right)^{5/3} \quad (\text{A.2})$$

A.2 Cas relativiste

Nous verrons que dans certains contextes, la température est tellement grande que la vitesse des électrons dans le gaz s'approche de celle de la lumière³ On ne peut alors plus écrire $p_x = m_e v_x$, mais simplement $v_x \sim c$. L'expression de la pression de dégénérescence devient alors $P_{\text{dg}} \sim n_e c p_x$. Comme $p_x \sim \hbar/\Delta x$, le même raisonnement que précédemment nous donne (correction faite de nouveau d'un facteur 2): [[eq-pdgrelat]]

²A ne pas confondre avec le libre parcours moyen!

³Remarquons de nouveau que la masse des électrons étant beaucoup plus petite que celle des protons, ce sont eux qui vont en premier lieu avoir des vitesses relativistes, selon le principe d'équipartition de l'énergie.

$$P_{\text{dg}} = 2c\hbar \left(\frac{Z}{A}\right)^{4/3} \left(\frac{\rho}{m_p}\right)^{4/3}. \quad (\text{A.3})$$

La dépendance en ρ est plus faible que dans le cas classique (4/3 au lieu de 5/3). Nous verrons les effets catastrophiques que cela peut avoir à la fin de la vie stellaire (phénomène de supernova).

La pression de dégénérescence est *indépendante* de la température. Ainsi, même si un astre se refroidit (planète, naine blanche, etc...) la pression de dégénérescence ne diminue pas, et peut donc soutenir le poids de l'astre de manière définitive, ce qui n'est pas le cas pour la pression thermique. En effet, cette dernière est amenée à disparaître lorsque la source de chaleur (par exemple les réactions nucléaires) est épuisée.

Les expressions ci-dessus supposent que seuls les électrons participent à la pression de dégénérescence. Cependant, il y a un cas où les électrons disparaissent purement et simplement, à savoir lorsqu'ils fusionnent avec les protons pour former des étoiles à neutrons. Dans ce cas, il faut remplacer m_e par m_n dans l'expression de P_{dg} .

Annexe B

Le théorème du viriel

Le théorème du viriel s'applique de manière très générale aux systèmes auto-gravitants, et à ce titre a de nombreuses applications en astrophysique. On peut penser en particulier à la structure stellaire, mais aussi aux amas de galaxies, ou tout simplement, au problème de deux corps képlérien.

B.1 Démonstration

Ce théorème relie, sous certaines conditions, l'énergie potentielle U et l'énergie cinétique K d'un système de particules $1, 2, \dots, i, \dots$ en interactions gravitationnelles. En fait, ce théorème est plus général, et s'applique à des systèmes de particules dont les interactions sont de la forme:

$$\vec{F}_{ij} = -C \frac{\hat{u}_{ij}}{r_{ij}^n} = -C \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^{n+1}},$$

où \vec{F}_{ij} est la force qu'exerce la particule i sur la particule j , $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ est le vecteur reliant i à j , $\hat{u}_{ij} = \vec{r}_{ij}/r_{ij}$ est le vecteur unitaire reliant i à j , et où C et n sont des constantes. Le cas gravitationnel correspond à $n = 2$ et $C = Gm_i m_j$, où m_i et m_j sont les masses de i et j . Notons qu'à cause du principe d'action et de réaction, $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$.

L'énergie potentielle de la paire i, j est alors de la forme:

$$U_{ij} = \frac{C}{(n-1)r_{ij}^{n-1}}.$$

Par conséquent, l'énergie potentielle totale du système est:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij} = -\frac{1}{2(n-1)} \sum_{i \neq j} \frac{C}{r_{ij}^{n-1}},$$

où le facteur $1/2$ tient compte du fait que l'on considère deux fois la paire i, j dans la sommation.

Afin de montrer le théorème du viriel, nous allons utiliser la quantité:

$$I = \sum_i m_i r_i^2.$$

Cette quantité a les dimensions d'un moment d'inertie¹.

Par dérivation par rapport au temps, on obtient:

$$\dot{I} = \sum_i 2m_i \vec{r}_i \cdot \vec{v}_i$$

et:

$$\ddot{I} = \sum_i 2m_i v_i^2 + \sum_i 2m_i \vec{r}_i \cdot \vec{\gamma}_i,$$

où $\vec{\gamma}_i$ est l'accélération de la particule i . Cette accélération est due aux interactions avec toutes les autres particules, ce qui fait que:

$$\vec{\gamma}_i = \sum_{j \neq i} \frac{\vec{F}_{ji}}{m_i} = \sum_{j \neq i} \frac{C}{m_i} \cdot \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^{n+1}}.$$

En notant que $\sum_i 2m_i v_i^2 = 4K$, l'expression de \ddot{I} devient:

$$\ddot{I} = 4K + 2 \sum_i \sum_{j \neq i} C \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^{n+1}}.$$

Les indices i et j étant muets dans les expressions ci-dessus, on a:

$$\sum_i \sum_{j \neq i} C \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^{n+1}} = \sum_j \sum_{i \neq j} C \frac{\vec{r}_j \cdot \vec{r}_{ji}}{r_{ji}^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} C \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_{ij} + \vec{r}_j \cdot \vec{r}_{ji}}{r_{ij}^{n+1}},$$

car $r_{ij} = r_{ji}$ (en module).

De plus $\vec{r}_i \cdot \vec{r}_{ij} + \vec{r}_j \cdot \vec{r}_{ji} = -r_{ij}^2$, et donc:

$$\ddot{I} = 4K - \sum_{i \neq j} \frac{C}{r_{ij}^{n-1}}.$$

Mais d'après l'expression de U vue plus haut, on a $-\sum_{i \neq j} C/r_{ij}^{n-1} = 2(n-1)U$. Finalement: [[eq-viriel]]

$$(n-1)U + 2K = \frac{\ddot{I}}{2}. \quad (\text{B.1})$$

Le théorème du viriel s'applique lorsque le second membre de l'Eq. (B.1) s'annule. Nous allons de plus considérer maintenant le cas gravitationnel seulement, i.e. $n = 2$. Alors: [[eq-viriel]]

¹Notons toutefois qu'un moment d'inertie est défini par rapport à un *axe*, et non pas par rapport à un point (l'origine) comme ici.

$$\bar{U} + 2\bar{K} = 0, \quad (\text{B.2})$$

où les barres dénotent des moyennes au cours du temps.

Une condition suffisante pour que $\ddot{I} = 0$ est que le système soit en moyenne stationnaire, i.e. ni en expansion ni en contraction. Autrement dit, sa taille typique moyenne R ne change pas au cours du temps.

Un cas trivial est celui d'une masse petite m orbitant autour d'une masse centrale grande M , sur une orbite circulaire de rayon a . Alors $I = ma^2 = \text{cste}$ et $\ddot{I} = 0$. On vérifie bien que l'équation (B.2) est satisfaite en notant que $U = -GMm/a$ et $v = \sqrt{GM/a}$, soit $K = mv^2/2 = -GMm/2a = -U/2$. Même si l'orbite n'est pas circulaire, on aura $\ddot{I} = 0$ *en moyenne*, et donc $\bar{U} + 2\bar{K} = 0$, bien que la relation $U + 2K = 0$ ne soit pas vérifiée *instantanément*.

Un autre cas est celui des amas de galaxies dits "virialisés", i.e. tels que la taille globale typique de l'amas soit constante au cours du temps. La relation (B.2) a alors une importante application: l'estimation de la masse de l'amas, M_A . En effet, des mesures Doppler sur les spectres des galaxies donnent une valeur typique de la dispersion de vitesse, et donc de la vitesse quadratique moyenne dans l'amas, V_q . Alors, $\bar{K} \sim M_A V_q^2/2$. De plus, $U \sim -GM_A^2/R_A$, où R_A est la taille estimée de l'amas. Le viriel donne alors $M_A \sim V_q^2 R_A/G$. Cependant, on n'est pas sûr que les amas de galaxies observés actuellement aient eu le temps de se virialiser depuis la naissance des galaxies, ce qui pourrait remettre en question cette méthode de détermination des masses.

B.2 Validité

Le théorème du viriel n'exige pas que la taille du système soit constante au cours du temps, mais qu'elle varie *lentement*. Par exemple en physique stellaire, nous l'appliquons dans le cas où l'astre de masse M et de rayon R est en contraction lente sur lui-même. Dans ce cas, on peut décrire cette contraction de manière homothétique pour toutes les couches de l'astre, à savoir:

$$r_i(t) = r_i(0) \cdot \left[1 - \left(\frac{t}{\tau} \right) \right],$$

où τ est le temps de contraction. Alors:

$$I(t) = \sum m_i r_i^2(t) = \left[1 - \left(\frac{t}{\tau} \right) \right]^2 \cdot I(0).$$

Soit:

$$\ddot{I} = \frac{2I(0)}{\tau^2}.$$

Or, $I \sim MR^2$, et donc $\ddot{I}/2 \sim MR^2/\tau^2 \sim MV_{\text{contr}}^2$, où V_{contr} est la vitesse de contraction de l'astre. De plus, $K \sim MV_q^2$. L'équation (B.2) s'écrit donc:

$$\bar{U} + MV_q^2 \sim MV_{\text{contr}}^2.$$

Donc, dans le cas où $V_{\text{contr}} \ll V_q$, on peut parfaitement appliquer le théorème du viriel. On peut montrer que cette condition est équivalente à dire que le temps de contraction

est grand par rapport au temps de chute libre de l'astre. Pour le Soleil, le temps de chute libre est de l'ordre de l'heure, alors que le temps de contraction de Kelvin-Helmholtz [voir la section 3.3.2] est de plusieurs dizaines de millions d'années!

Il y a en revanche des cas où on ne peut pas appliquer le théorème du viriel, en particulier si le corps est en chute libre sur lui-même, voir l'effondrement d'un nuage proto-stellaire, ou le phénomène de super-nova.