Parcours planétologie, M2 **Bruno Sicardy**
Université Pierre et Marie Curie

Dynamique des disques

1- *Rotation d'un nuage.* Nous avons vu en cours que la masse de Jeans représente la masse critique à partir de laquelle un nuage peut s'effondrer sous l'effet de son propre poids. Une fois que cet effondrement a commencé, une nouvelle barrière peut cependant freiner l'effondrement: la rotation.

Considérons un nuage proto-solaire typique d'une masse solaire, de rayon 10^{12} km, et qui tourne sur lui-même avec une période de 3×10^7 ans. Si aucune friction ne rentre en jeu, calculer la période de rotation du nuage quand ce dernier aura atteint la taille du Soleil. Comparer avec la période de rotation actuelle du Soleil. Conclusion?

Calculer à quel rayon le nuage devient rotationnellement instable. Montrer que le fait que son énergie cinétique devient supérieure en valeur absolue à son énergie gravitationnelle est équivalent au fait que l'accélération centrifuge à son bord devient supérieure à l'accélération gravitationnelle.

Comparer ce rayon aux distances planétaires typiques.

2- *Temps de chute libre du Soleil.* Si toute forme de pression disparaît brutalement au centre du Soleil, estimer le temps qu'il mettrait pour s'effondrer sur lui-même. Même chose pour une naine blanche de 1.4 masse solaire et de 6000 km de rayon qui s'effondre en supernova.

3- *Disques et dissipation d'énergie.*

a) Montrer que pour un système 3-D donné en rotation, la configuration qui minimise l'énergie à moment cinétique total constant est le disque 2-D.

b) Montrer que pour un profil de densité surfacique donné et un moment cinétique total fixé, le mouvement d'énergie minimale est la rotation solide.

c) On considère deux particules de masses m_1 et m_2 orbitant circulairement autour d'une étoile centrale de masse $M_\star \gg m_1, m_2$. Elles peuvent échanger du moment cinétique entre elles, mais pas de la masse. Quelle est l'état d'énergie minimale de ce système, à moment cinétique total constant?

d) Même question si chaque particule garde son moment cinétique intact, mais peut échanger de la masse avec l'autre, en conservant $m_1 + m_2$.

e) Comment évolue un disque dans lequel l'énergie est dissipée (par exemple par frottements visqueux)?

4- *Aplatissement d'un disque en rotation.* Considérons un disque gazeux entourant le proto-Soleil. Nous nous proposons d'estimer l'épaisseur de ce disque, en équilibre sous l'effet de l'attraction du Soleil, de sa propre rotation et des gradients de pression.

Nous supposons que le disque est de masse négligeable par rapport à celle du Soleil, et que sa température T ne dépend que de x (pas de z).

a) Montrer que le gradient de pression vertical est donné par:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g_z,$$

où P est la pression, ρ la densité et g_z la projection sur z de l'accélération $\vec{g}$ due au Soleil.

b) Montrer que l'on a $g_z \sim -GM_\odot z/r^3$, où r est la distance au Soleil.

c) En utilisant la loi des gaz parfaits, montrer que l'équation ci-dessus se met sous la forme:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\mu G M_\odot}{kTr^3} z,$$

où μ est la masse d'un atome constituant le gaz (ici, essentiellement de l'hydrogène).

d) Rappeler la relation entre la distance r d'un objet (en orbite circulaire autour du Soleil) et sa vitesse angulaire Ω (troisième loi de Képler).

e) Rappeler la relation entre la vitesse quadratique moyenne $\bar{v}_{th}$ d'un atome dans un gaz parfait et la température de ce gaz. Rappeler l'expression de la vitesse du son dans un gaz, et montrer qu'en ordre de grandeur: $\bar{v}_{th} \sim c$.

f) En déduire que la distribution verticale du disque obéit à la loi:

$$\rho(z) \sim \rho(z=0) \exp\left[-\left(\frac{\Omega z}{c}\right)^2\right],$$

et que l'épaisseur typique du disque est: $H \sim c/\Omega$.

Montrer que la rotation a tendance à aplatir le disque, alors que la température a tendance à l'épaissir.