OPTIQUE ONDULATOIRE

TRAVAUX DIRIGÉS

TD1 Optique géométrique

Exercice 1: réflexion totale

1. Rappelez les lois de Snell-Descartes pour un angle d'incidence i et deux milieux d'indices optiques n_1 et n_2.

2. Dans le cas où $n_1 > n_2$, quel est l'angle i maximum permettant d'observer un rayon réfracté dans le milieu 2 ?

3. Même question pour $n_1 < n_2$.

4. Proposez un moyen de fabriquer une fibre optique.

Exercice 2: lame à faces parallèles

Soit une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice optique n plongée dans un milieu d'indice n_1. La lame forme l'image A' d'une source ponctuelle A. Dans les conditions de Gauss, montrez que A' est obtenue en translatant A d'une quantité indépendante de la position de A.

Exercice 3: lentilles minces

Sur les annexes 1 et 2, les petits traits verticaux sur l'axe optique sont les foyers (objet et image) des lentilles. Une flèche verticale repère l'objet.

Par constructions graphiques, trouvez l'image de chaque objet. Faites figurer en pointillés les rayons, objets et images virtuels ; et en traits pleins les rayons, objets et images réels. Est-ce que l'image est réelle ou virtuelle ? Inversée ou non ?

Note : un objet est réel quand il se trouve avant la face d'entrée du système optique considéré. L'objet est virtuel quand il est localisé après la face d'entrée du système optique. Un tel objet est en fait une image produite par un autre système optique utilisé en amont.

Exercice 4: prisme et spectroscopie

Soit un prisme de verre d'indice n et d'angle au sommet A (Fig.). Un

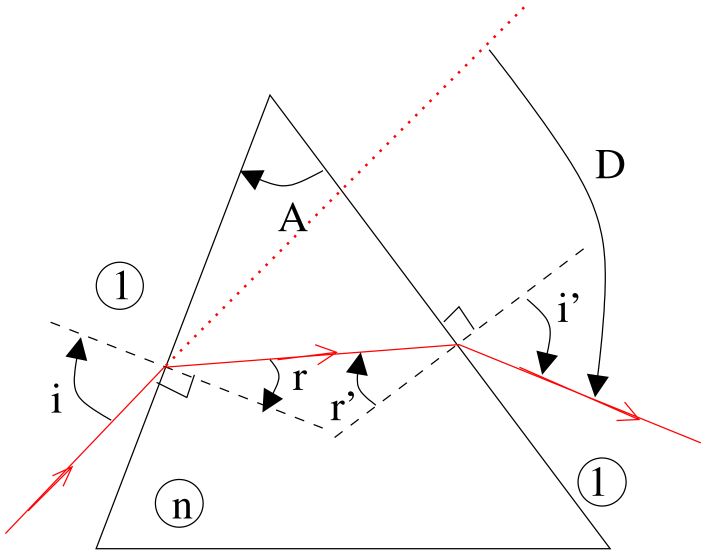

FIGURE 1 – *Prisme d'indice* n *et d'angle au sommet* A*.*

rayon lumineux pénètre dans le prisme avec l'angle d'incidence i. On appelle D la déviation de ce rayon lumineux par le prisme, c'est-à-dire l'angle que fait le rayon émergent avec le rayon incident.

1. Trouvez l'expression de A en fonction de r et r'.

2. Exprimez D en fonction de i, i' et A.

3. Donnez les relations entre i et r, puis entre i' et r'.

4. Pour quel angle i, la déviation D est minimale ?

5. Reliez n et A à la déviation minimale D_m ?

L'indice du verre varie avec la longueur d'onde λ de la lumière incidente et suit la loi $n(\lambda) = a + b/\lambda^2$ avec a et b deux constantes positives.

6. Exprimez D_m en fonction de A, a, b et λ.

7. Décrivez qualitativement ce qu'on observe à la sortie du prisme si le faisceau incident est fin et constitué de lumière blanche ($0,4\mu$m à $0,8\mu$m).

Exercice 5: lentille et surfaces équiphases

On considère une lentille plan-convexe éclairée par un faisceau monochromatique parallèle son axe optique. Représentez les surfaces équiphases avant, dans et après la lentille.

Exercice 6: loi de réfraction de Snell-Descartes

Sur un dioptre plan séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2, un faisceau collimaté arrive du milieu 1 avec un angle d'incidence i.

1. Représentez les surfaces équiphases de part et d'autre du dioptre.

2. Pour deux rayons différents, calculez le chemin optique entre deux plans de phase appartenant l'un au milieu 1 et l'autre au milieu 2. Déduisez-en la loi de réfraction de Snell-Descartes.

Exercice 7: onde plane

Considérons le champ électrique

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E_0}\, f(\vec{r}.\vec{s} - ct) \tag{1}$$

où $\vec{E_0}$ est un vecteur constant, f est une fonction arbitraire, $\vec{s}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{E_0}$

$$\vec{E_0}.\vec{s} = 0 \tag{2}$$

et c est la vitesse de la lumière dans le vide

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\, \mu_0}} \tag{3}$$

1. Pourquoi appelle-t-on *onde plane* le champ représenté par l'Eq. 1 ?

2. Déterminez le vecteur vitesse de phase $\vec{v}$ de l'onde.

3. À partir des équations de Maxwell dans le vide, établissez l'équation d'onde que doit satisfaire le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$.

4. Vérifiez que le champ représenté par l'Eq. 1 est bien solution de l'équation d'onde obtenue à la question précédente.

5. D'où vient la condition de transversalité (Eq. 2) ?

Dans le cas d'une onde plane, on peut démontrer (le faire à vos heures perdues !) que le champ magnétique associé au champ électrique est

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\,\vec{s} \wedge \vec{E} \tag{4}$$

6. Déterminez le vecteur de Poynting $\vec{S}(\vec{r}, t)$ et l'intensité $I(\vec{r}, t)$ de l'onde.

On peut également démontrer qu'une onde plane monochromatique qui se propage dans un milieu transparent d'indice optique n peut s'écrire

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_1\, exp\left(\mathrm{i}\, \left(\vec{k}.\vec{r} - \omega\, t\right)\right)\right] \tag{5}$$

avec $\vec{E}_1$ un vecteur constant complexe.

7. Que représentent ω et $\vec{k}$?

8. En appelant k la norme de $\vec{k}$, donnez la relation de dispersion $k = k(\omega)$.

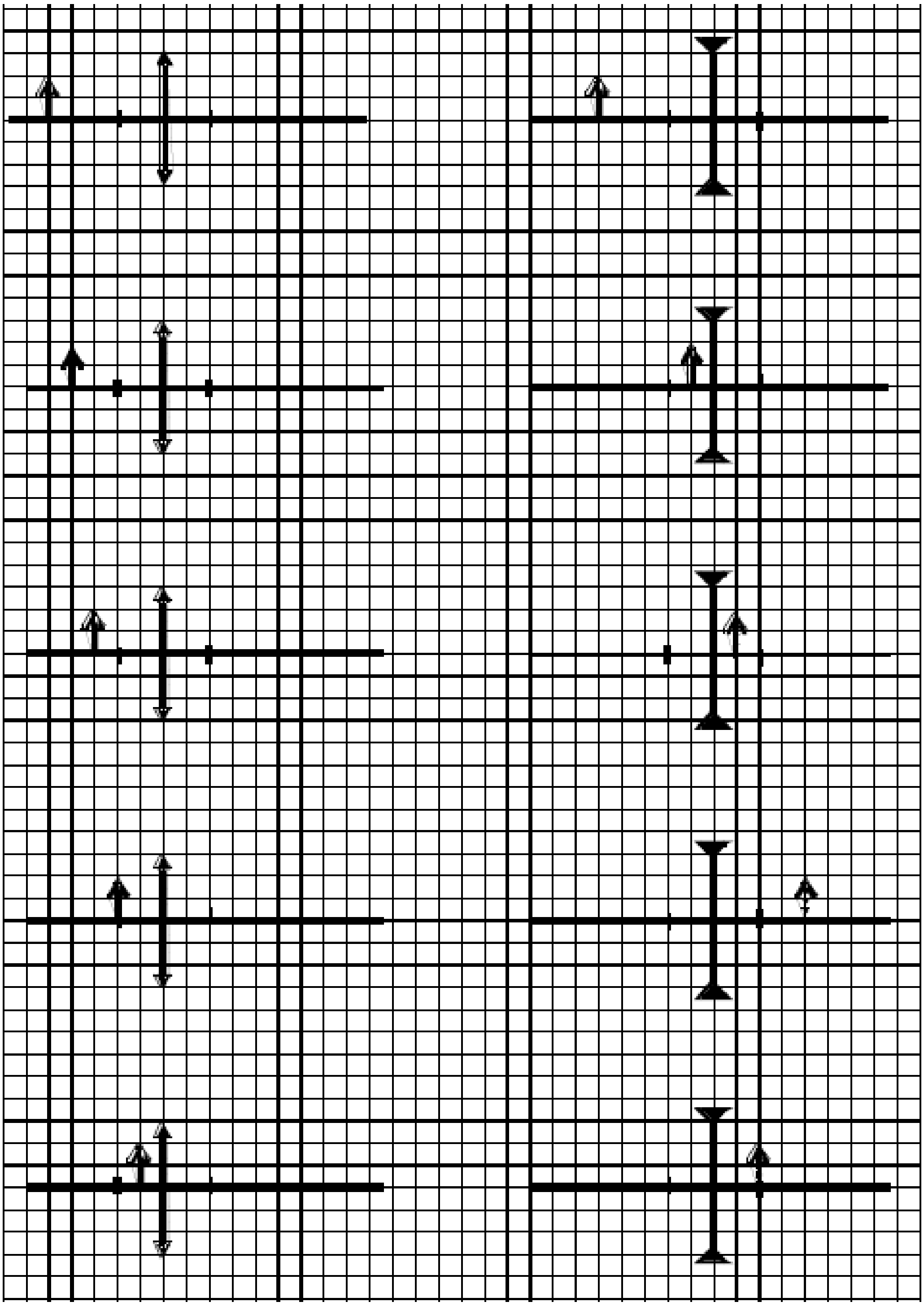

FIGURE 2 – *Annexe 1.*

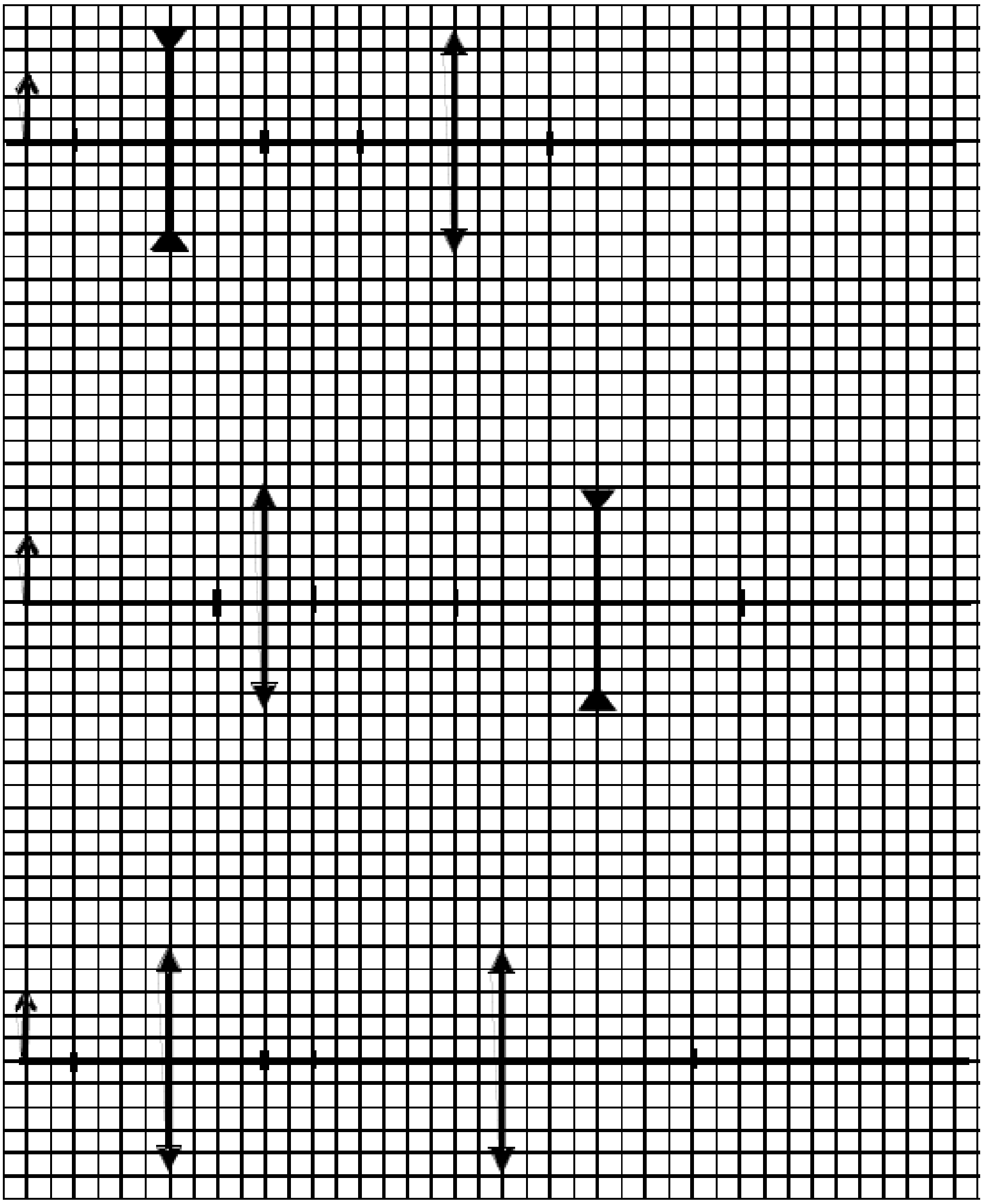

FIGURE 3 – *Annexe 2.*

Université Paris Diderot-Paris, EIDD — Année 2017–18

OPTIQUE ONDULATOIRE

TRAVAUX DIRIGÉS

TD2 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est un outil mathématique très utilisé en physique et spécialement en optique ondulatoire. Par définition, la transformée de Fourier d'une fonction f est [1]

$$\mathcal{F}[f](s) = \int_{\infty}^{\infty} \exp(-\mathrm{i}\, 2\,\pi\, s\, v)\, f(v)\, \mathrm{d}v \tag{1}$$

et le spectre de f est $|\mathcal{F}[f]|$.

Exercice 1: propriétés

Dans tout cet exercice, f et g sont des fonctions à une seule variable.

1. Fonction de Dirac. Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $\delta(x - x_0)$ avec x_0 une constante ?

2. Linéarité. Soient deux constantes réelles α et β. Calculez la transformée de Fourier de $\alpha\, f + \beta\, g$ en fonction de $\mathcal{F}[f]$ et $\mathcal{F}[g]$.

3. Changement d'échelle. En prenant $\eta > 0$, que vaut la transformée de Fourier de $f(\eta\, x)$ en fonction de $\mathcal{F}[f]$?

4. Image d'une translatée. Calculez la transformée de Fourier de $g(t - t_0)$ (c'est-à-dire la translatée de la fonction g) en fonction de $\mathcal{F}[g]$.

5. Translation d'une image. Exprimez la transformée de Fourier de $f(x)\, \exp(\mathrm{i}\, \alpha\, x)$ en fonction de $\mathcal{F}[f]$.

6. Produit de convolution. Le produit de convolution de f et g s'écrit

$$f \star g\,(t) = \int_{\infty}^{\infty} f(u)\, g(t-u)\, \mathrm{d}u \tag{2}$$

Exprimez la transformée de Fourier de $f \star g$ en fonction de $\mathcal{F}[f]$ et $\mathcal{F}[g]$.

1. la fonction doit être continue par morceaux et sa norme 1 doit être finie.

7. Transformée de Fourier inverse. Que vaut la transformée de Fourier de la transformée de Fourier de la fonction f ? Déduisez-en l'expression de la transformée de Fourier inverse.

8. Produit. Quelle est la transformée de Fourier de fg ?

Exercice 2: signal porte

À 1 dimension

1. Soit Π_a la fonction à une variable qui est nulle partout sauf entre $-a/2$ et $a/2$ où elle vaut 1. Calculez sa transformée de Fourier $\mathcal{F}[f]$.

2. Comment évolue $\mathcal{F}[f]$ quand la largeur a diminue ?

3. Même question pour $a \to \infty$

4. Sans calcul, donnez la transformée de Fourier de la fonction h qui est nulle partout sauf sur le segment $[b_0 - a/2, b_0 + a/2]$ où elle vaut 1.

À 2 dimensions

5. Soit $\Pi_{a,b}$ la fonction à deux variables qui est nulle partout sauf dans la zone $[-a/2, a/2] \times [-b/2, b/2]$ où elle vaut 1. Calculez la transformée de Fourier $\mathcal{F}[g]$ de g en appelant u et v les coordonnées dans le plan de Fourier.

6. Comment évolue cette transformée de Fourier quand les largeurs a et b augmentent ou diminuent ?

7. Sans calcul, donnez la transformée de Fourier de la fonction h qui est nulle partout sauf pour $(x, y) \in [c_0 - a/2, c_0 + a/2] \times [d_0 - b/2, d_0 + b/2]$.

Exercice 3: fréquences spatiales et temporelles

Soit une fonction f des variables d'espace x et de temps t.

1. Quelle est l'expression mathématique du spectre de f en fréquences temporelles ? De quelles variables dépend cette fonction ? Interprétez.

2. Mêmes questions mais pour le spectre de f en fréquences spatiales.

Exercice 4: des calculs prémonitoires...

1. À partir des résultats obtenus dans les exercices précédents, donnez l'expression de la transformée de Fourier des fonctions suivantes où x_0 et y_0 sont des constantes réelles et $\star$ est le produit de convolution.

— $\Pi_{(a,b)} \star \delta(x - x_0/2, y - y_0/2)$

— $\Pi_{(a,b)} \star \delta(x + x_0/2, y + y_0/2)$

— $\Pi_{(a,b)} \star \delta(x - x_0/2, y - y_0/2) + \Pi_{(a,b)} \star \delta(x + x_0/2, y + y_0/2)$

2. Calculez le module au carré de chacune des transformées de Fourier (appelé le spectre en fréquences spatiales). Commentez.

OPTIQUE ONDULATOIRE

TRAVAUX DIRIGÉS

TD3 Diffraction et interférences à deux ondes

Exercice 1: diffraction à distance finie, approximation de Fresnel

On éclaire sous incidence normale un trou circulaire de rayon a et de centre $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ par une onde plane électromagnétique se propageant dans la direction $z > 0$. La longueur d'onde est notée λ et l'amplitude de l'onde dans le plan du masque est A. On note $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

1. Écrivez l'expression :
— de l'amplitude complexe $V(\vec{r})$ du champ incident ($z \leq 0$).
— de l'amplitude complexe $V_0(\vec{\rho})$ du champ juste après le trou ($z = 0^+$), où $\vec{\rho} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ est le vecteur position sur l'écran diffractant.
— du champ diffracté $V_D(\vec{R})$ dans le plan $z = D$ en fonction du champ $V_0(\vec{\rho})$ dans l'approximation de Fresnel (champ proche) avec $\vec{R} = X\vec{e}_x + Y\vec{e}_y$ le vecteur position dans le plan $z = D$. Ne calculez pas l'intégrale !

2. Calculez l'amplitude complexe diffractée en tout point de l'axe optique, donc en tous poins $(X, Y, z) = (0, 0, D)$ avec $D > 0$.

3. Pour quelle valeurs de D l'intensité diffractée sur l'axe optique est nulle ? Calculez ces valeurs pour $\lambda = 0.5\,\mu$m et $a = 1\,$mm.

En 1819, l'Académie des sciences de Paris s'est penchée sur la question de la diffraction de la lumière. Augustin Fresnel proposa la solution ondulatoire mais la commission était constituée de partisans de la théorie corpusculaire. Lors de l'examen des propositions, Siméon Denis Poisson, mathématicien et membre de la commission, déduisit de la théorie de Fresnel que dans certains cas, le centre de l'ombre créée par un disque opaque devait être aussi brillant que si il n'y avait pas de disque. Cette prédiction était en contradiction avec le sens commun, auquel Poisson se rangeait, qui prévoyait une ombre homogène ou en tout cas sans point lumineux en son centre. Curieux du résultat, François Arago fit l'expérience et découvrit le point lumineux au centre de l'ombre. Prise au dépourvu par cette preuve inattendue, la commission attribua le prix au jeune Fresnel.

4. Expliquez la présence du point lumineux de Poisson-Arago.

Exercice 2: diffraction de Fraunhofer

1. Rappelez la condition sur la longueur d'onde, la taille de l'objet diffractant et la distance d'observation pour que la figure de diffraction puisse être modélisée par le modèle de Fraunhofer.

2. Quel montage optique permet d'étudier la diffraction de Fraunhofer ?

3. En appelant $A(x,y)$ l'amplitude du champ électrique dans le plan de l'objet diffractant, donnez l'amplitude $V(X,Y)$ du champ électrique diffracté dans les conditions de Fraunhofer. Faites apparaître une transformée de Fourier dans cette expression.

4. Un faisceau collimaté éclaire un écran diffractant et on observe la figure de diffraction dans le plan focal d'une lentille convergente de focale f. En utilisant le formalisme des transformées de Fourier et les tables 1 et 2, établissez l'expression de l'amplitude $V(X,Y)$ et de l'intensité $I(X,Y)$ diffractées par chacun des écrans listés ci-dessous. Commentez.

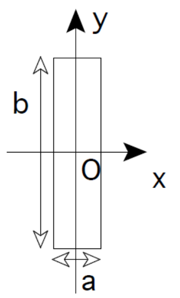

FIGURE 1 – Un trou rectangulaire unique.

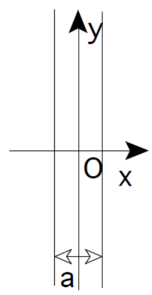

FIGURE 2 – Une fente de hauteur infinie.

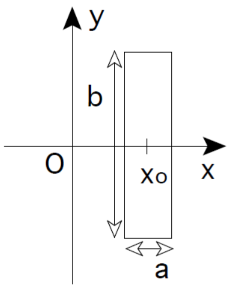

Figure 3 – Un trou rectangulaire translaté.

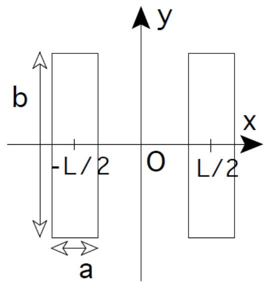

Figure 4 – Deux trous rectangulaires écartés de L.

Exercice 3: trous d'Young, calcul direct

La Fig. 5 présente le schéma optique d'une expérience des trous d'Young. Une source S est au foyer d'une lentille de focale f_0. Le faisceau ainsi collimaté éclaire un écran P percé de deux trous identiques suffisamment petits pour se comporter comme des trous ponctuels vis à vis de la diffraction. Les deux trous S_1 et S_2 sont écartés de $d/2$ de part et d'autre de l'axe optique dans la direction x. Le faisceau est finalement focalisé par une lentille de focale f sur un écran E dont les coordonnées sont repérées par X et Y. On suppose que les lentilles sont utilisées dans les conditions de Gauss (petits angles).

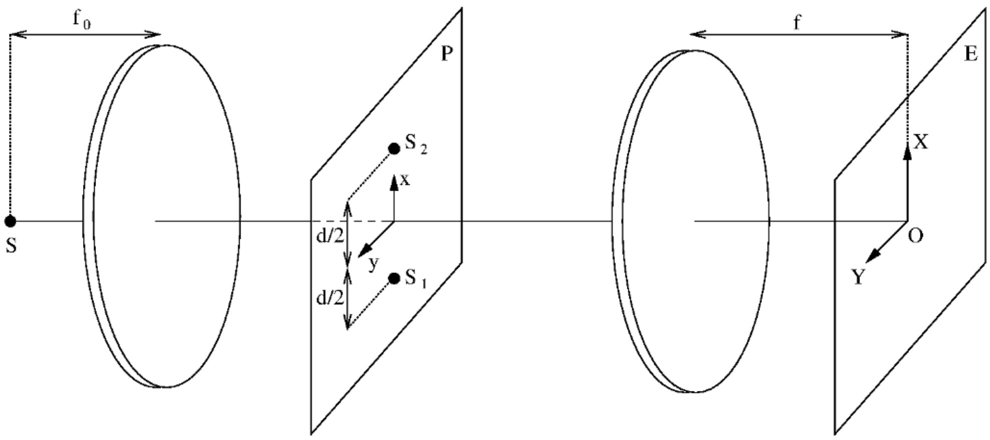

Figure 5 – Expérience des trous d'Young dans les conditions de Fraunhofer.

1. Refaites un schéma en identifiant les rayons lumineux issus de S_1 et S_2 qui interfèrent en un point $M(X, 0)$ de l'écran E.

2. Donnez la formule générale de l'intensité d'un champ d'interférences à deux ondes. Vous appellerez I_0 l'intensité de chaque onde.

3. Quelle est la différence de marche entre les deux chemins optiques, et la différence de phase associée ?

4. Quelle est l'expression de l'intensité lumineuse sur l'écran d'observation de la Fig. 5 ? Comparez aux résultats de l'exercice précédent.

5. Décrivez la figure d'interférences : forme des franges, positions X_m où les interférences sont constructives, interfrange i, contraste C des franges.

Exercice 4: trous d'Young, cohérence spatiale

1. En supposant de nouveau l'expérience décrite par la Fig. 5, déterminez l'intensité $I(X)$, le contraste C et l'intefrange i sur l'écran quand on déplace la source ponctuelle S d'une distance s parallèlement à S_1S_2.

2. L'écran P est maintenant éclairé par deux sources ponctuelles S et S' identiques mais incohérentes entre elles. SS' est parallèle à S_1S_2. Déterminez par un raisonnement qualitatif si les franges d'interférences peuvent se brouiller sur l'écran E. Les franges sont dites brouillées quand leur contaste est nul. Si le brouillage arrive, calculez pour quelle distance $s_0 = SS'$.

3. SS' est maintenant perpendiculaire à S_1S_2. Comment est modifiée la figure d'interférences ? Peut-il y avoir brouillage ?

Les sources ponctuelles S et S' sont remplacées par une source unique rectangulaire de largeur a selon x et de hauteur b selon y. La source est centrée sur la médiatrice de S_1S_2. Cette source étendue peut être considérée comme une juxtaposition de sources ponctuelles incohérentes.

4. Justifiez que pour observer des franges bien contrastées sur l'écran, la hauteur b peut être aussi grande que l'on veut alors que la largeur a ne doit pas être trop grande.

5. Déterminez l'expression de l'intensité du champ d'interférences.

6. Exprimez l'interfrange i et le contraste C des interférences.

7. Par l'étude du contraste, montrez que les franges se brouillent complètement pour certaines valeurs de a.

Fonction	Transformée de Fourier
$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \exp(ikx)\, dk$	$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ikx)\, dx$
$f(x-v)$	$\exp(-ikv)\hat{f}(k)$
$\exp(ik_0x)f(x)$	$\hat{f}(k-k_0)$
$f(x/a)$	$\|a\|\hat{f}(ka)$
$(f * g)(x)$	$\hat{f}(k)\hat{g}(k)$
$f(x)g(x)$	$\frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(k)$
$\hat{f}(x)$	$2\pi f(-k)$
$\delta(x)$	1
1	$2\pi\delta(k)$
$\mathrm{rect}(x)$	$\mathrm{sinc}(k/2)$
$\exp(-x^2/2)$	$\sqrt{2\pi}\exp(-k^2/2)$

TABLE 1 – Propriétés de la transformée de Fourier à une dimension.

Fonction	Transformée de Fourier
$f(\boldsymbol{\rho}) = \dfrac{1}{4\pi^2} \iint \hat{f}(\boldsymbol{k}) \exp\left(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\rho}\right) d\boldsymbol{k}$	$\hat{f}(\boldsymbol{k}) = \iint f(\boldsymbol{\rho}) \exp\left(-i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\rho}\right) d\boldsymbol{\rho}$
$f(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{v})$	$\exp(-i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v})\hat{f}(\boldsymbol{k})$
$\exp(i\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}) f(\boldsymbol{\rho})$	$\hat{f}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0)$
$f(x/a, y/b)$	$\lvert ab\rvert \hat{f}(k_x a, k_y b)$
$(f * g)(\boldsymbol{\rho})$	$\hat{f}(\boldsymbol{k})\hat{g}(\boldsymbol{k})$
$f(\boldsymbol{\rho}) g(\boldsymbol{\rho})$	$\dfrac{1}{4\pi^2}(\hat{f} * \hat{g})(\boldsymbol{k})$
$f(x)g(y)$	$\hat{f}(k_x)\hat{g}(k_y)$
$\hat{f}(\boldsymbol{\rho})$	$(2\pi)^2 f(-\boldsymbol{k})$
$\mathrm{circ}(\lvert\boldsymbol{\rho}\rvert)$	$\dfrac{2\pi}{\lvert\boldsymbol{k}\rvert} J_1(\lvert\boldsymbol{k}\rvert)$

TABLE 2 – Propriétés de la transformée de Fourier à deux dimensions.

OPTIQUE ONDULATOIRE

TRAVAUX DIRIGÉS

TD4 interférences à deux ondes

Exercice 1: Bilentilles de Billet

On forme à l'aide d'une lentille mince convergente L, de distance focale $f = 50$cm, de rayon $R = 2$cm, l'image S' d'un point lumineux S_0 situé à $z_0 = 75$cm en avant de L.

1. Calculez la position z' de l'image S'.

On coupe L suivant un plan passant par son axe optique en deux parties égales que l'on écarte d'une distance $\epsilon = 1$mm (Fig. 1). L'image S' se dédouble alors en S_1 et S_2.

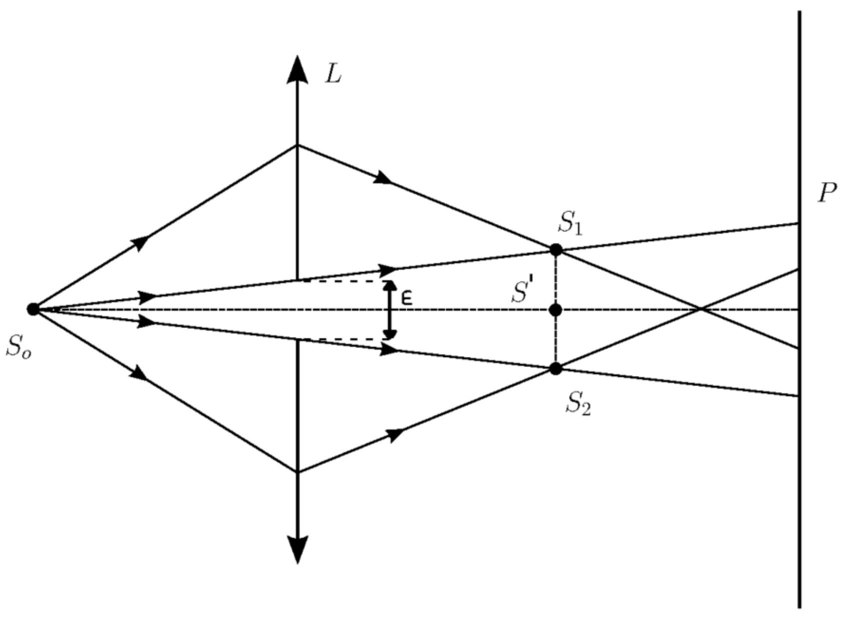

Figure 1 – Bilentille de Billet.

2. Calculez la distance a entre les deux images S_1 et S_2 données par chaque demi-lentille.

3. S_1 et S_2 jouent le rôle de sources secondaires. Où se trouvent le champ d'interférences ?

4. Cas monochromatique : la source S_0 est monochromatique. Donnez l'expression de l'intensité lumineuse I observée sur un écran orthogonal à l'axe optique à la distance $D \gg f$ de la bilentille. Tracez I.

5. Doublet de raies : la source S_0 émet deux radiations de même intensité I_0 et de longueurs d'onde voisines $\lambda_0 - \Delta\lambda/2 = 589,0$nm et $\lambda_0 + \Delta\lambda/2 = 589,6$nm. En faisant apparaître la longueur $\Lambda = \lambda_0^2/\Delta\lambda$ et la longueur d'onde moyenne λ_0, donnez la nouvelle expression de l'intensité I sous la forme $I = 2I_0[1 + C\cos(\dots)]$ avec C le contraste des franges. Est-ce que ce contraste est uniforme (indépendant de la position sur l'écran) ? Tracez I. Où se trouvent les coïncidences ? Et les anticoïncidences ?

Exercice 2: Couche antireflet

Pour limiter les pertes par réflexion dans les instruments d'optiques, on recouvre les lentilles d'une couche mince d'indice de réfraction n' et d'épaisseur e convenablement choisis.

1. Quelles conditions doivent satisfaire le module et la phase des deux premières ondes réfléchies pour minimiser les pertes par réflexion ?

2. La lentille a un indice de réfraction n et est éclairée en incidence normale. On suppose que les coefficients de transmission en amplitude entre l'air et la couche mince sont proches de 1. Montrez que la condition sur le module implique que $n' = \sqrt{n}$. Quel doit être l'indice de réfraction de la lentille si la couche mince est réalisée par dépôt de fluorine d'indice $n' = 1,35$?

3. Calculez l'épaisseur minimale e de la couche de fluorine nécessaire pour supprimer complètement la réflexion à la longueur d'onde $\lambda = 560\,\text{nm}$.

Exercice 3: Anneaux de Newton

Une lentille plan-convexe d'indice n et de rayon de courbure $R = 1$m très grand est en contact par son sommet S avec une lame de verre de grande épaisseur (Fig. 2).

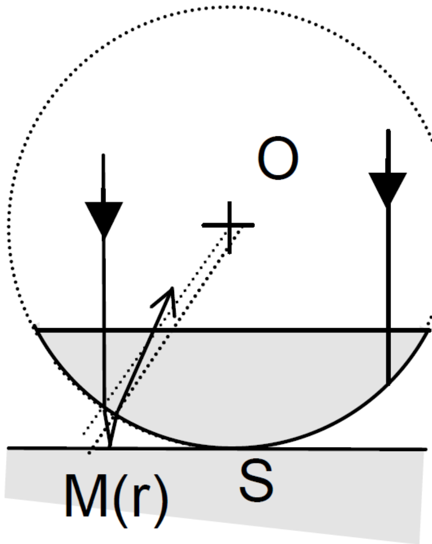

FIGURE 2 – Expérience "Anneaux de Newton".

Une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0.6\,\mu$m éclaire sous incidence normale la lentille. On ne s'intéresse qu'aux réflexions de cette onde incidente sur la face courbe de la lentille et sur la surface supérieure de la lame de verre. On appelle r la distance des points M de la surface de la lame de verre au sommet S de la sphère. On rappelle les coefficients de réflexion et de transmission (coefficients de Fresnel) d'une onde plane sous incidence normale qui passe d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice n_2 :

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tag{1}$$

$$t_{12} = \frac{2\,n_1}{n_1 + n_2} \tag{2}$$

1. Calculez l'amplitude des trois premiers rayons réfléchis et déduisez-en qu'en pratique seuls les deux premiers rayons participeront à la figure d'interférences.

2. Exprimez la différence de marche δ entre le rayon réfléchi par la face convexe de la lentille et le rayon réfléchi par la lame de verre. Négligez la réfraction des rayons.

3. Quelle est la figure d'interférence observée ? Quelle est l'intensité au centre de la figure d'interférence ?

4. Exprimez le rayon des anneaux sombres, ainsi que celui des anneaux brillants en supposant que $R \gg r$. Montrez que deux anneaux successifs (sombres ou brillants) aux ordres m et $m+1$ sont tels que

$$r_{m+1}^2 - r_m^2 = \lambda R. \tag{3}$$

Déduisez-en la formule suivante

$$R = \frac{2\, r_m^2 \Delta r}{\lambda} \tag{4}$$

avec $\Delta r = r_{m+1} - r_m$.

5. Calculez la position des quatre premiers anneaux sombres.

6. À quelles conditions peut-on observer des anneaux en lumière blanche ?

7. La lentille est écartée d'une distance e_0 de la lame de verre. Quelle est la nouvelle différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent ? Quelle est désormais l'intensité au centre de la figure d'interférence en lumière monochromatique ?

OPTIQUE ONDULATOIRE

TRAVAUX DIRIGÉS

TD5 Réseaux et interféromètre de Frabry-Pérot

Exercice 1: Réseau

On considère un ensemble de N fentes S_i étroites, longues, parallèles, équidistantes avec un pas noté h, et perpendiculaires à (Oz) (Figure 1).

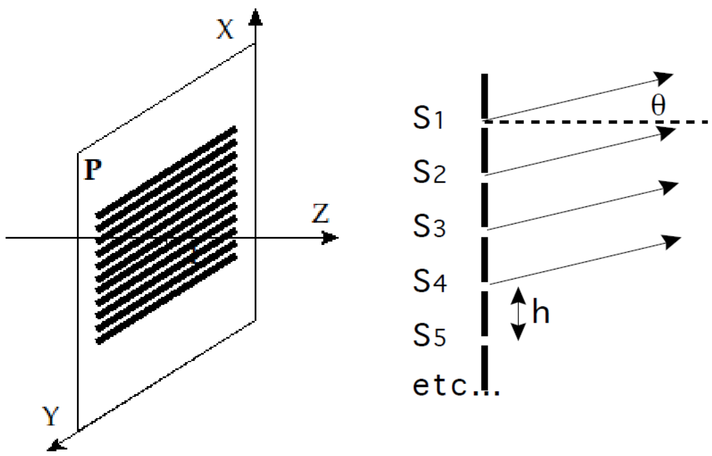

FIGURE 1 – Schémas du réseau en 3D (gauche) et de profil (droite).

Montages optiques

1. Proposez un montage optique permettant :
+ d'éclairer ce réseau par une onde plane monochromatique se propageant selon (Oz).
+ d'étudier l'intensité I de la figure d'interférences dans une direction du plan (xz) repérée par l'angle θ par rapport à l'axe z.

Calcul de la figure d'interférences

2. Déterminez l'expression de l'intensité $I(\theta)$. Retrouvez le résultat des fentes d'Young en imposant $N = 2$.

3. Dans la suite on considère N quelconque. Trouvez les directions θ dans lesquelles l'intensité I est maximale (maxima principaux), ainsi que la largeur angulaire de ces pics principaux.

4. Donnez le nombre, la position et la largeur des maxima secondaires.

5. Quel est le rapport entre l'intensité d'un maximum principal et celle du premier maximum secondaire ? Commentez.

6. Représentez l'intensité I en fonction de θ.

Spectrométrie

7. Le réseau est éclairé par deux ondes de longueurs d'onde λ_1 et $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta\lambda$. Représentez la figure d'interférences. Donnez la plus petite séparation $\delta\lambda = \delta\lambda_{\mathrm{min}}$ mesurable avec un réseau de N fentes si on observe la figure d'interférences dans l'ordre p. La résolution spectrale d'un spectromètre est définie par $\lambda/\delta\lambda_{\mathrm{min}}$. Exprimez-la en fonction de N et p.

8. Avec un réseau de 300 traits/mm éclairé sur 2 cm, peut-on séparer le doublet du sodium $\lambda_1 = 589{,}0\,\mathrm{nm}$ et $\lambda_1 = 589{,}6\,\mathrm{nm}$ dans l'ordre 2 ? Que vaut la résolution spectrale ?

Exercice 2: Interféromètre de Fabry-Pérot

Un interféromètre de Fabry-Pérot est constitué de deux lames de verre de très bonne qualité : les surfaces sont très planes, les faces internes (qui délimitent une lame d'air d'épaisseur d) sont parallèles à un haut degré de précision et leurs surfaces sont traitées pour que le coefficient de réflexion R en intensité soit aussi voisin de 1 que possible (Figure 2). Le système est éclairé par une onde plane se propageant normalement aux lames.

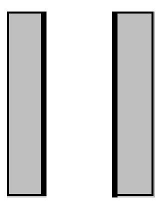

FIGURE 2 – Interféromètre de Fabry-Pérot.

L'intensité I_T de l'onde transmise par l'interféromètre est donnée par

$$I_T = \frac{I_0}{1 + m \sin^2(\phi/2)} \tag{1}$$

où, en l'absence d'absorption,

$$m = \frac{4\,R}{(1-R)^2} \tag{2}$$

et ϕ est le déphasage que subit l'onde qui fait un aller-retour à l'intérieur de la cavité du Fabry-Pérot.

Étude générale $I(\phi)$

1. Pour quelles valeurs de ϕ l'intensité transmise I_T est-elle maximale ? Pourquoi parle-t-on de résonance quand $I_T = I_0$? Quelle est l'expression du rapport $I_{\max}/I_{\min}$ en fonction de m, et donc de R. Calculez ce rapport pour $R = 0{,}04$ (verre non traité) ; $R = 0{,}25$; $R = 0{,}9$; $R = 0{,}99$.

2. La finesse F est le rapport entre la séparation entre deux pics successifs et la largeur à mi-hauteur d'un pic. Déterminez F et exprimez-la en fonction de m. Que vaut F pour $R = 0{,}9$ et $R = 0{,}99$?

3. Construisez le graphe $I_T(\phi)$.

Intervalle spectral libre $I(\nu)$

4. Combien de temps met la lumière pour faire un aller-retour dans la cavité de longueur d_0 ? L'inverse de cette durée est appelée l'intervalle spectral libre et est notée $\Delta\nu_L$. Exprimez I_T en fonction de ν et $\Delta\nu_L$. Quelle est la fréquence ν_p de l'onde sur laquelle la cavité est accordée à l'ordre p (la cavité est accordée quand l'intensité transmise est maximale). Donnez l'écart en fréquence entre deux pics principaux consécutifs et la largeur à mi-hauteur $\delta\nu_{1/2}$ d'un pic en fonction de la finesse F et $\Delta\nu_L$. Tracez $I(\nu)$.

Spectrométrie $I(d)$

5. Donnez l'expression de ϕ en fonction de d pour une fréquence fixée ν_0. Déduisez-en les largeurs d_p qui maximisent l'intensité I_T et l'écart Δd dont il faut déplacer un des miroirs pour passer d'une résonance à la suivante. Quelles est la largeur à mi-hauteur d'un pic principal ? Tracez $I_T(d)$.

6. Soit une cavité de $d = 7{,}5\,\text{cm}$ éclairée par une onde de longueur d'onde $\lambda = 633\,\text{nm}$. Calculez l'ordre d'interférence p et Δd. Commentez.

7. Soit une cavité dont la largeur varie entre $d_p = p\,\lambda_0/2$ et d_{p+1} et éclairée par deux ondes de longueurs d'onde λ_0 et $\lambda' = \lambda_0 + \delta\lambda$. Représentez l'intensité transmise par l'interféromètre en fonction de d.

8. La résolution spectrale d'un spectromètre est définie par $\lambda/\delta\lambda_{\min}$ avec $\delta\lambda_{\min}$ le plus petit écart en longueur d'onde mesurable. Quelle est la résolution de l'interféromètre de Fabry-Pérot travaillant dans l'ordre p ? Comparez-la à la résolution du réseau de fentes d'Young étudié dans l'exercice précédent.

9. Déterminez la plus grande et la plus petite différences de longueurs d'onde mesurables par l'interféromètre en fonction de λ_0, p et F. Que valent-elles pour $d_p = 7{,}5\,\mathrm{cm}$ et $R = 0{,}99$ ($\lambda_0 = 589{,}3\,\mathrm{nm}$) ? Peut-on mesurer l'écart $\delta\lambda = 0{,}6\,\mathrm{nm}$ entre les deux raies du doublet du sodium ? Commentez.

Réalisation pratique

10. La plupart des interféromètres courants sont construits avec des lames de verre dont les faces, toujours très bien polies, ne sont pas parallèles mais dièdres (figure 3). Pourquoi selon vous ? On précise que les surfaces qui délimitent la cavité d'air restent parallèles.

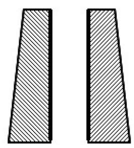

FIGURE 3 – Interféromètre de Fabry-Pérot à lames dièdres.

11. Un certain nombre d'interféromètres modernes de Fabry-Pérot sont construits avec des miroirs sphériques (figure 4) dont les foyers F_1 et F_2 sont confondus. Construisez le trajet d'un rayon lumineux parallèle à l'axe optique mais légèrement décalé latéralement. Déduisez-en la distance parcourue par ce rayon avant qu'il interfère avec un rayon semblable. Quel est l'intérêt d'un tel dispositif ?

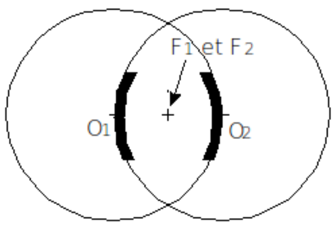

FIGURE 4 – Interféromètre de Fabry-Pérot à miroirs concaves.

OPTIQUE ONDULATOIRE

TRAVAUX DIRIGÉS

TD6 Filtrage optique et objet de phase

On constitue le montage optique suivant (Fig. 1) : un objet de centre O, placé dans le plan objet sur le schéma, est éclairé sous incidence normale par un faisceau parallèle monochromatique de longueur d'onde λ. La lentille convergente en forme une image sur le plan image (**qui n'est pas le plan focal de la lentille !**).

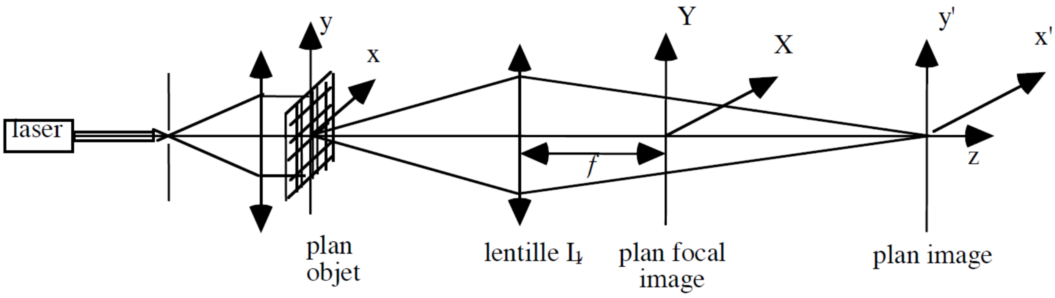

FIGURE 1 – Montage optique.

1. Soit z_O la distance entre l'objet et la lentille de focale f. Quelle est l'expression de la distance z_i entre la lentille et l'écran d'observation où se forme l'image de l'objet ?

Ouverture rectangulaire

Dans un premier temps, l'objet est une ouverture rectangulaire de grande hauteur $2b$ et de faible largeur $2a$ ($a \ll b$), et centrée sur O.

2. Décrivez l'image observée sur l'écran d'observation.

3. Que vaut la transmittance $A_0(x, y)$ de cette ouverture rectangulaire ? Déduisez-en l'amplitude diffractée $V_0(X, Y)$ dans le plan focal de la lentille. Montrez qu'on peut en pratique se restreindre à l'étude de $V_0(X)$.

Objet de phase

On ajoute à l'ouverture rectangulaire un objet transparent, étroit (largeur $2\epsilon \ll 2a$) et haut (Fig. 2). Son indice $n > 1$ fait que l'onde s'y propage moins vite, ce qui cause un petit retard de phase ϕ_0 par rapport au reste de l'ouverture. On note $\exp(i\phi_0)$ ($\phi_0 \ll 1$) sa transmittance.

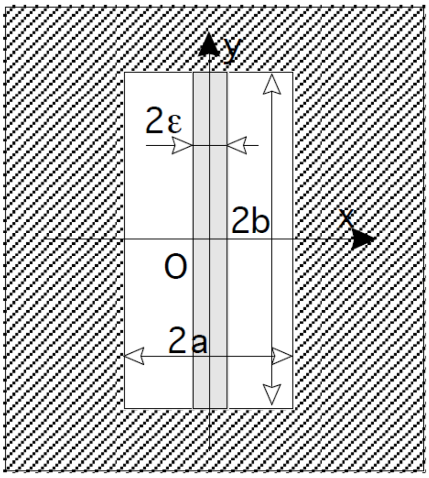

FIGURE 2 – Objet de phase.

4. Expliquez pourquoi l'image sur l'écran d'observation est inchangée.

5. Écrivez la transmittance $A(x)$ de la nouvelle ouverture et déduisez-en l'amplitude diffractée $V(X)$ dans le plan focal de la lentille. Mettez $V(X)$ sous la forme $V(X) = V'(X) + iV''(X)$.

6. Montrez que l'intensité $I(X)$ dans le plan focal de la lentille s'écrit

$$I(X) = I_0 \left[\mathrm{sinc}^2 \left(\frac{2\pi a X}{\lambda f} \right) + \left(\frac{\phi_0 \epsilon}{a} \right)^2 \mathrm{sinc}^2 \left(\frac{2\pi \epsilon X}{\lambda f} \right) \right] \tag{1}$$

7. Précisez l'origine de chacun des termes. Construisez le graphe de chaque terme et expliquez comment on peut éliminer presque complètement la contribution de l'ouverture rectangulaire pour ne conserver que celle de l'objet de phase. Décrivez alors l'image observée sur l'écran d'observation.