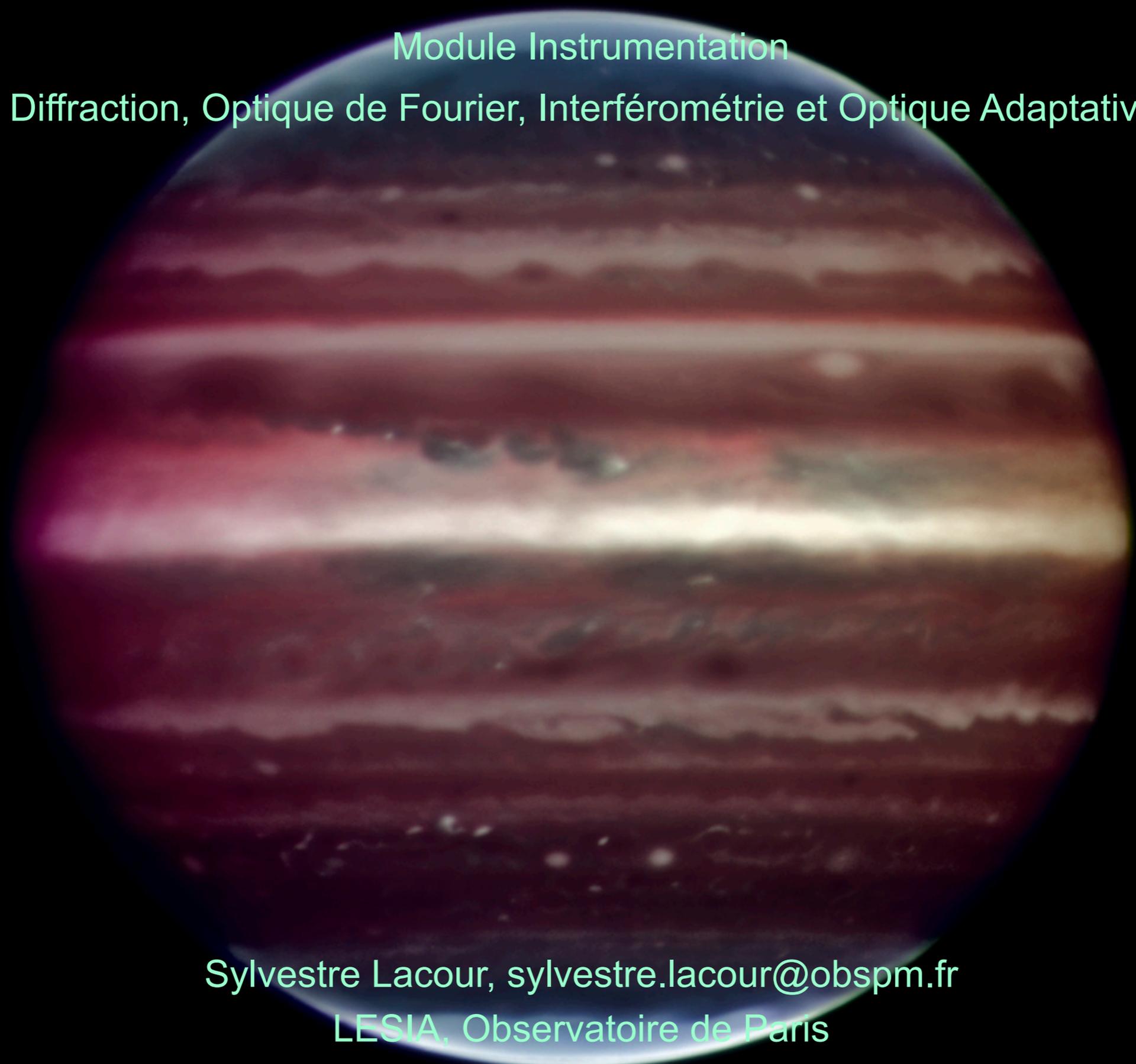




M1 - Observatoire de Paris

Module Instrumentation

Diffraction, Optique de Fourier, Interférométrie et Optique Adaptative



Sylvestre Lacour, sylvestre.lacour@obspm.fr

LESIA, Observatoire de Paris

Transparents

Diffraction. Optique de Fourier (Cours 1):

<http://lesia.obspm.fr/perso/sylvestre-lacour/M1SL-1.pdf>

Atmosphère et optique adaptative(Cours 2):

<http://lesia.obspm.fr/perso/sylvestre-lacour/M1SL-2.pdf>

Cohérence, interférométrie(Cours 3):

<http://lesia.obspm.fr/perso/sylvestre-lacour/M1SL-3.pdf>

Plan du cours

- **2 Février:** Diffraction, pupille rectangulaire, circulaire, résolution, Optique de Fourier
- **9 Février:** Atmosphère, optique adaptative, analyse de front d'onde
- **3 Mars:** Cohérence temporelle et spatiale, interférométrie

Principes fondamentaux

- **Principe de Huygens:**

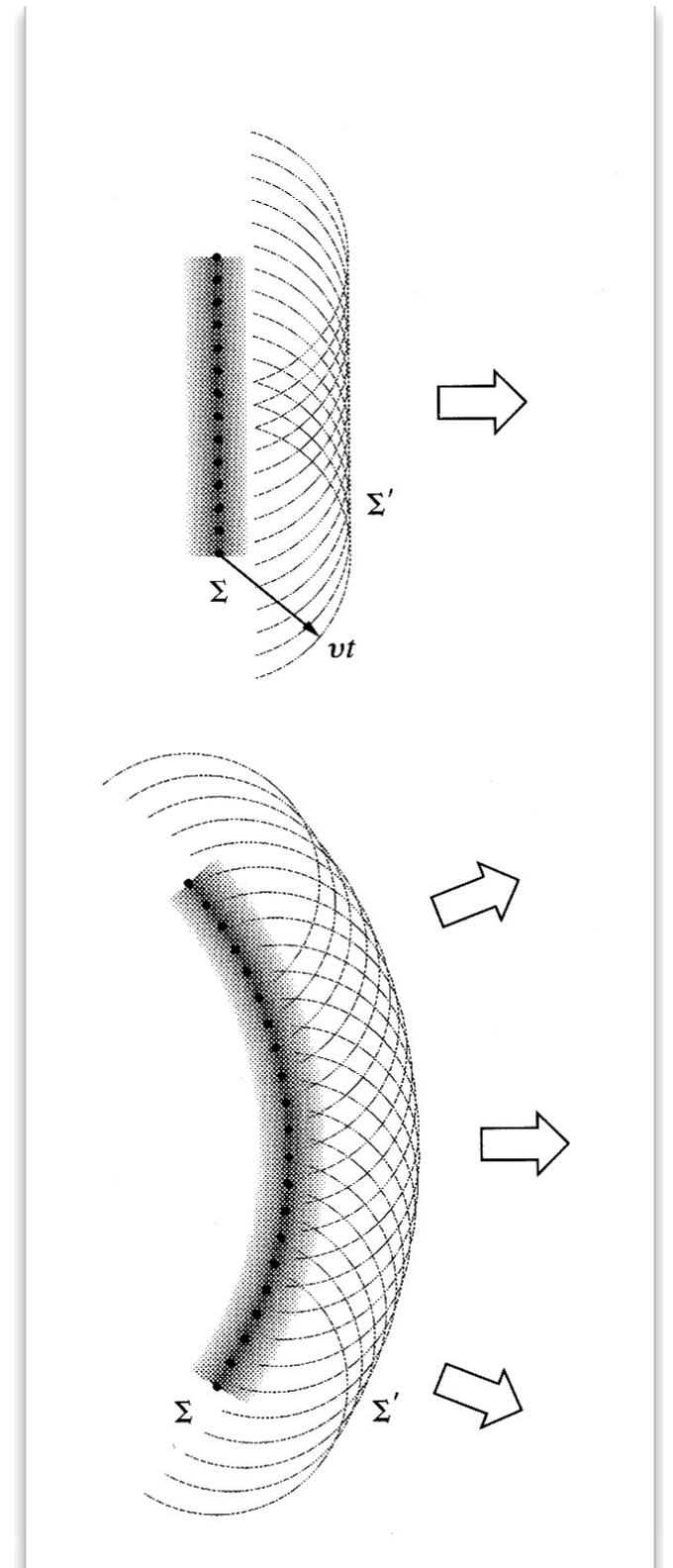
Tout point d'un **front d'onde** à un temps t peut être considéré comme la source d'**ondelettes secondaires sphériques**. L'*enveloppe* de ces ondelettes constitue le front d'onde à un temps ultérieur.

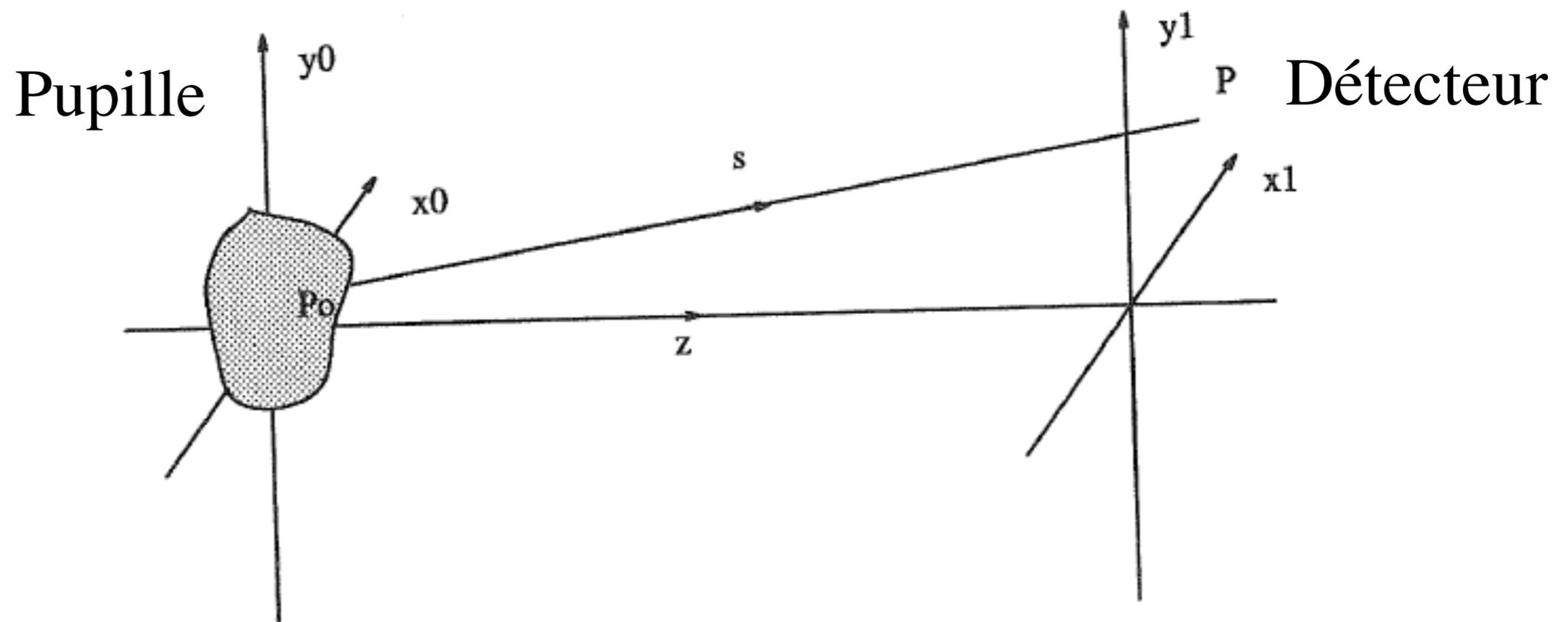
- **Principe de Huygens-Fresnel:**

Tous les éléments de surface d'une **ouverture** (ou d'une **pupille**) peuvent être considérés comme la source d'**ondelettes secondaires sphériques**.

L'amplitude de l'ondelette émise par une source secondaire est proportionnelle à celle de l'onde incidente et à l'aire de l'élément de surface.

Les ondelettes émises par l'ensemble de ces sources secondaires *interfèrent* entre elles pour donner l'*onde diffractée*.





$$U(x_1, y_1) = -\frac{i}{\lambda z} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x_0, y_0) e^{ik\sqrt{z^2+(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}} dx_0 dy_0$$

Hypothèse de Fresnel : z grand devant x_0, y_0, x_1, y_1

$$U(x_1, y_1) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}[x_1^2+y_1^2]} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ U(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z}[x_0^2+y_0^2]} \right\} e^{\frac{-i2\pi}{z\lambda}[x_0x_1+y_0y_1]} dx_0 dy_0$$

Hypothèse de Fraunhofer : z TRES grand devant x_0, y_0

$$U(x_1, y_1) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}[x_1^2+y_1^2]} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x_0, y_0) e^{\frac{-i2\pi}{z\lambda}[x_0x_1+y_0y_1]} dx_0 dy_0$$

Champ diffracté et transformée de Fourier

Le champ diffracté à l'infini s'écrit (diffraction de Fraunhofer):

$$U(x_1, y_1) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}[x_1^2 + y_1^2]} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x_0, y_0) e^{\frac{-i2\pi}{z\lambda}[x_0x_1 + y_0y_1]} dx_0 dy_0$$

Sous une forme proche de la définition de la transformée de Fourier:

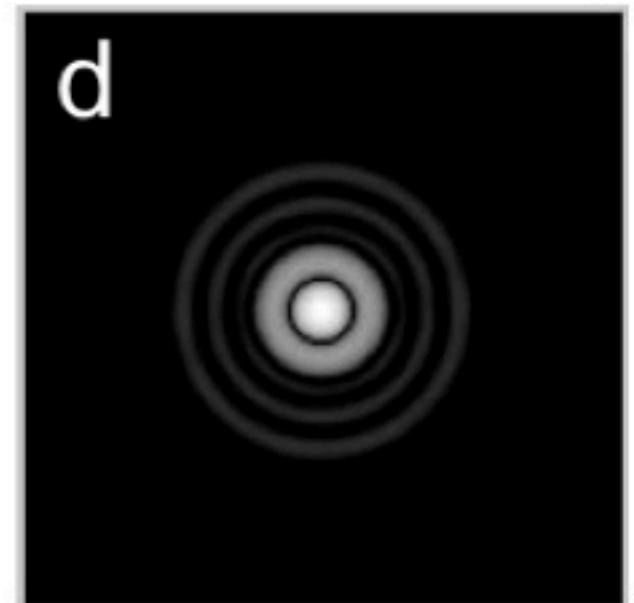
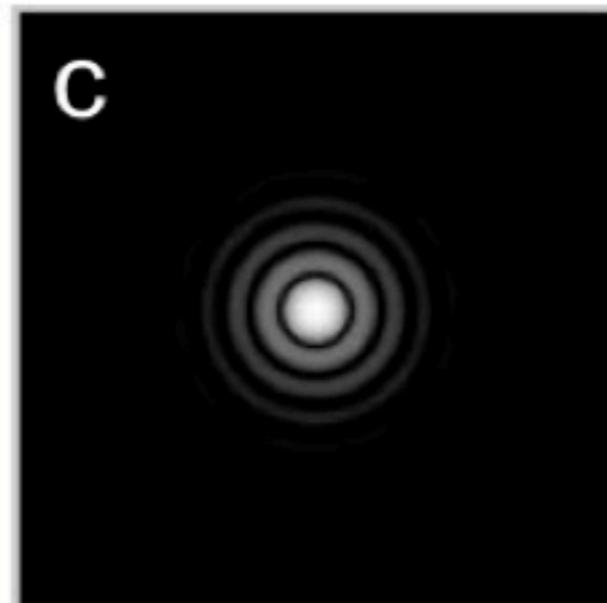
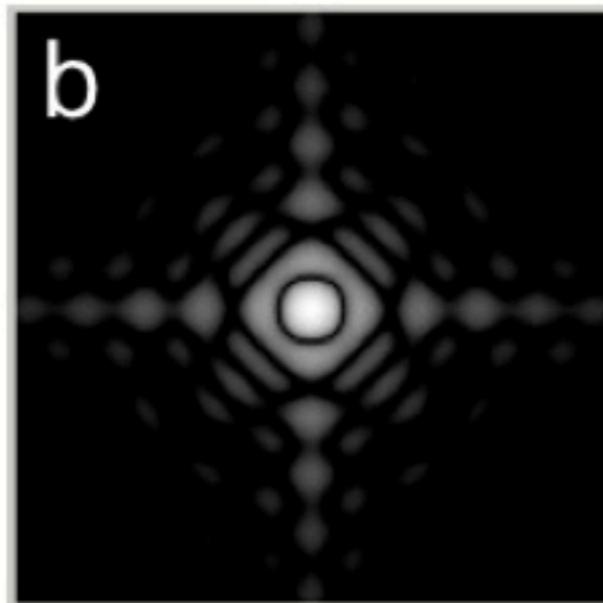
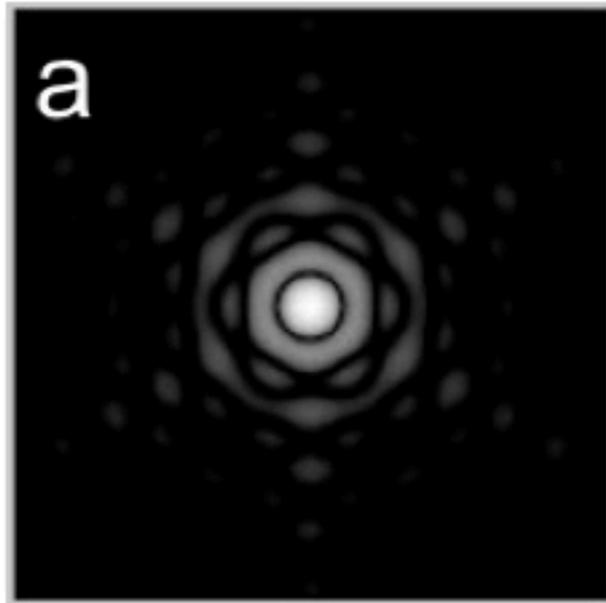
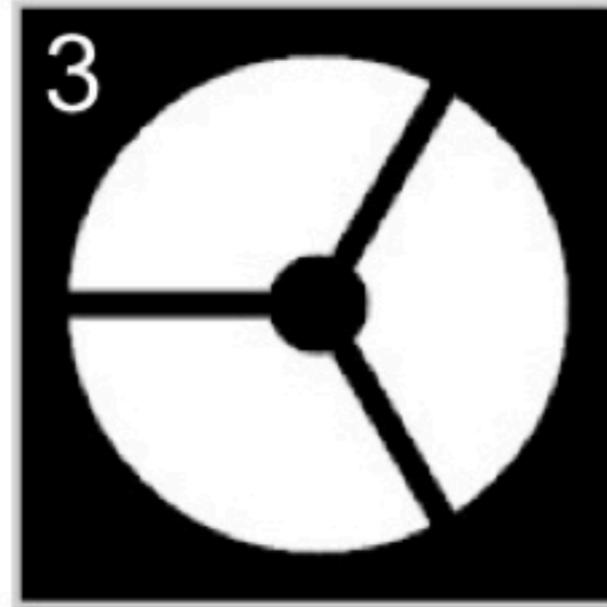
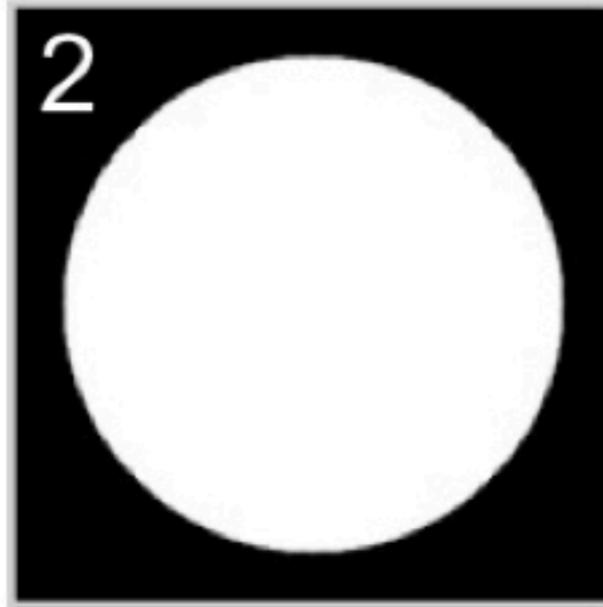
$$\hat{F}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx = \mathcal{F}\{f(x)\}$$

Pour une pupille éclairée par une source à l'infini, l'amplitude du champ diffracté dans une direction est la transformée de Fourier de la fonction pupille. Les variables conjuguées sont 1) la direction angulaire $\alpha=(x_1/z)$ et $\beta=(y_1/z)$ et 2) les coordonnées réduites dans la pupille $u=(x_0/\lambda)$ et $v=(y_0/\lambda)$.

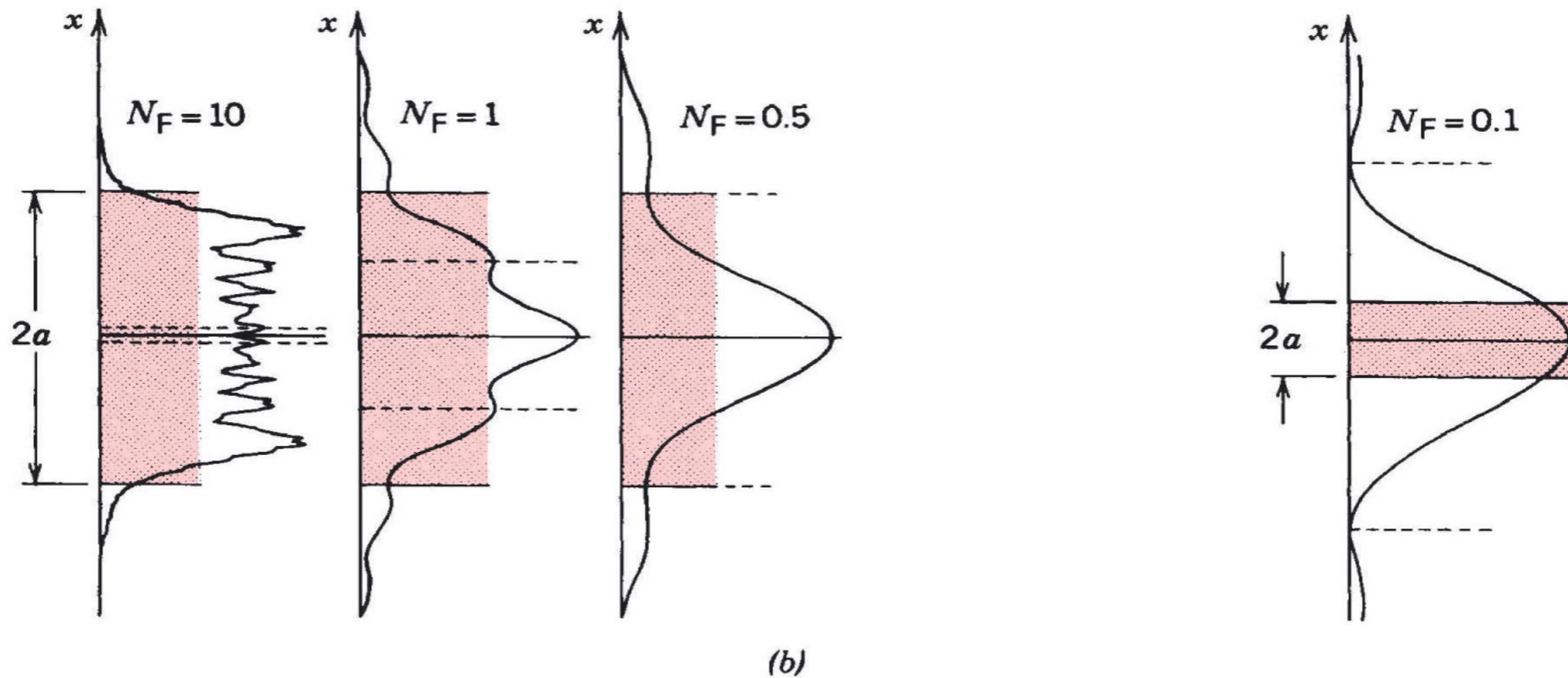
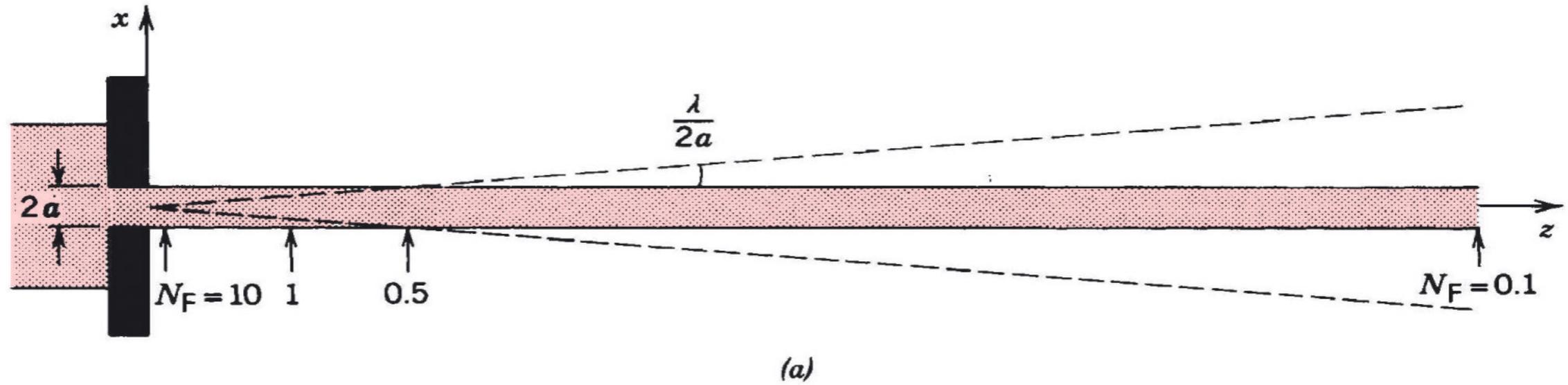
$$I(x, y) = |U(x, y)|^2$$

$I(x, y)$ est la **Fonction d'Étalement de Point** (FEP), ou en anglais **Point Spread Function** (PSF)

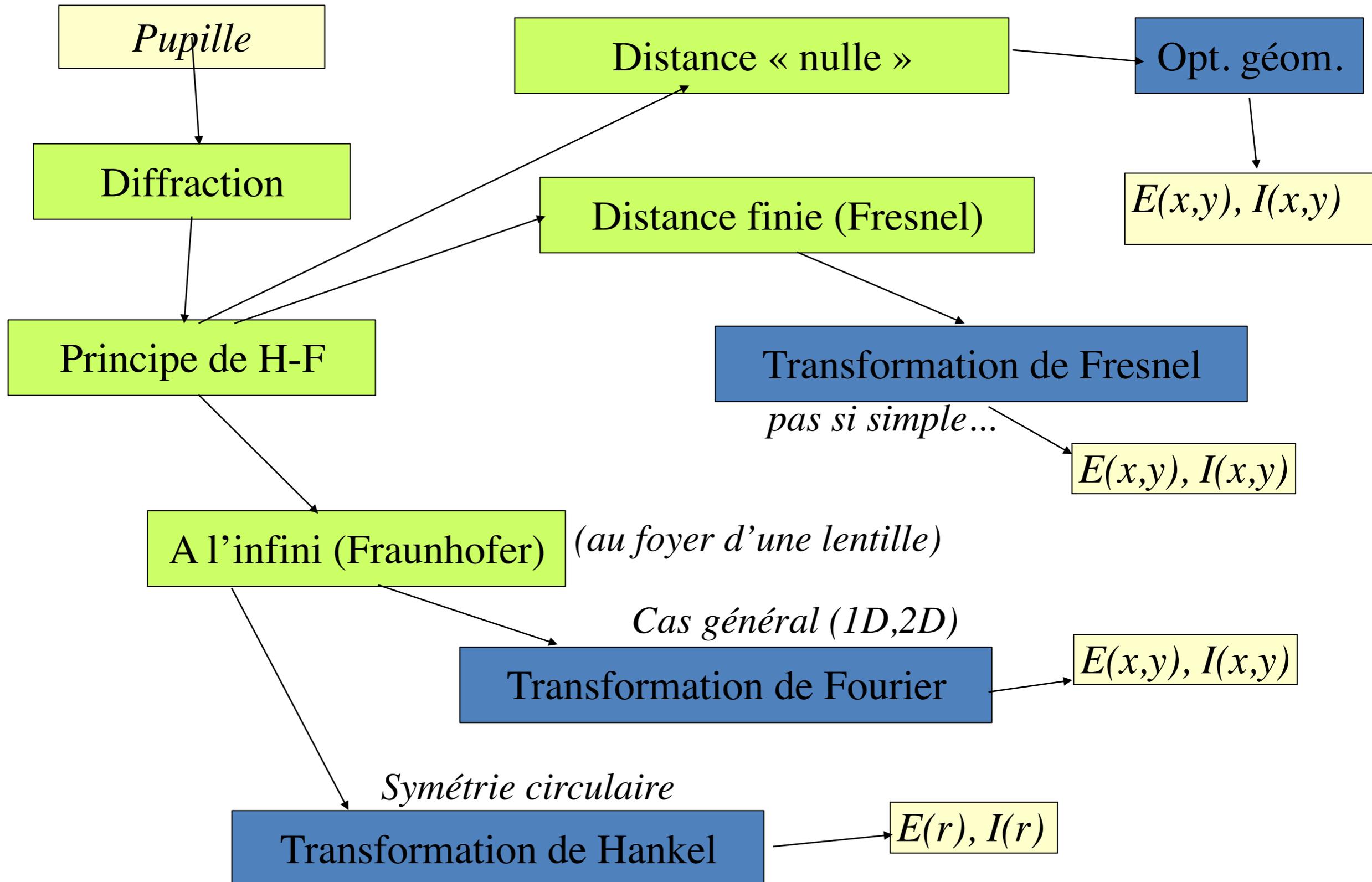
Exercice: Pupille et diffraction

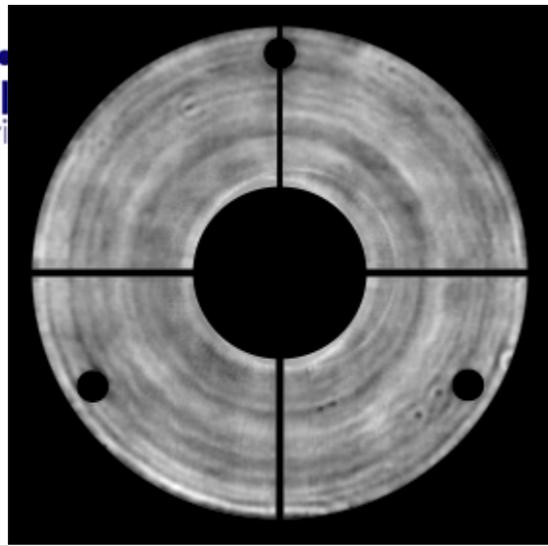


Comment calculer la FEP?



Comment calculer la FEP?





Pupille: $U_0(x/\lambda, y/\lambda)$

La relation pupille-FEP

Autocorrelation

FTO

$$FTO(u, v) = \iint U_0(u', v')^* U_0(u' - u, v' - v) du' dv'$$

TF

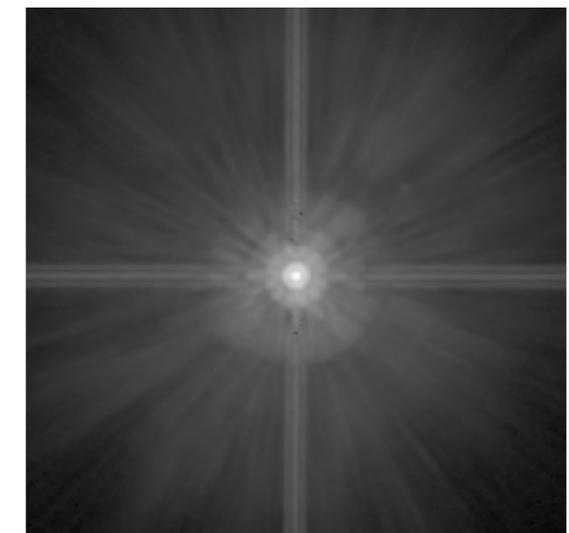
TF⁻¹

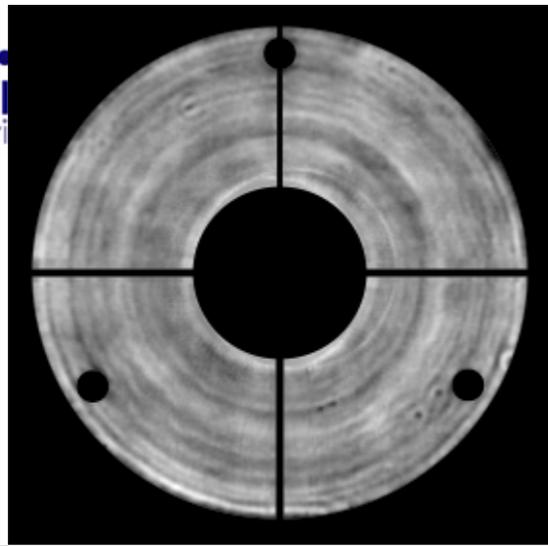
Dans l'hypothèse de Fraunhofer

Champ focal: $U_1(\alpha, \beta)$

$| \cdot |^2$

FEP: $|U(\alpha, \beta)|^2$





Pupille: $U_0(x/\lambda, y/\lambda)$

La relation pupille-FEP

Autocorrelation

FTO

$$FTO(u, v) = \iint U_0(u', v')^* U_0(u' - u, v' - v) du' dv'$$

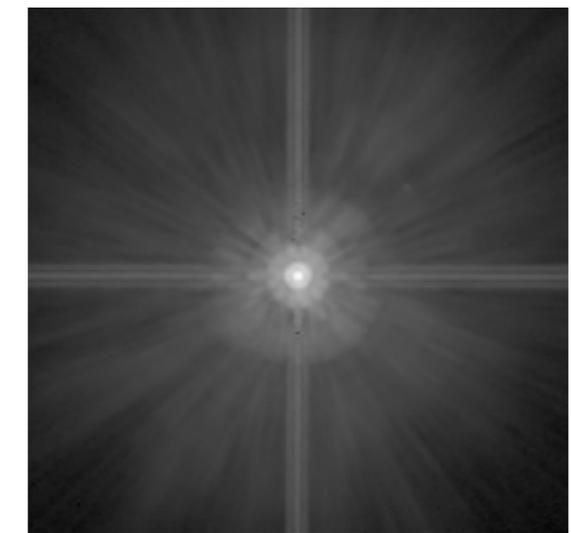
TF

TF⁻¹

Dans l'hypothèse de Fraunhofer

Champ focal: $U_1(\alpha, \beta)$

$| \cdot |^2$

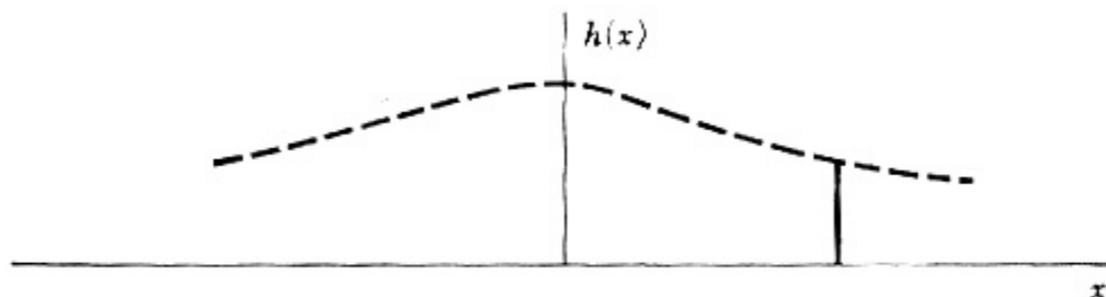
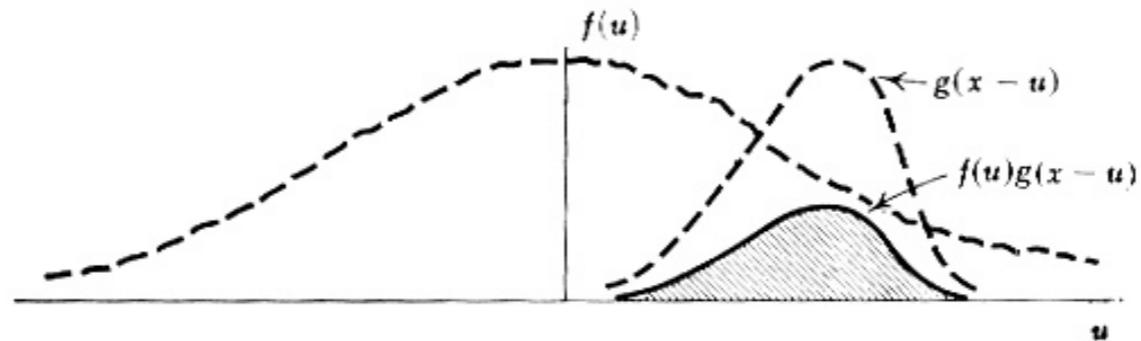
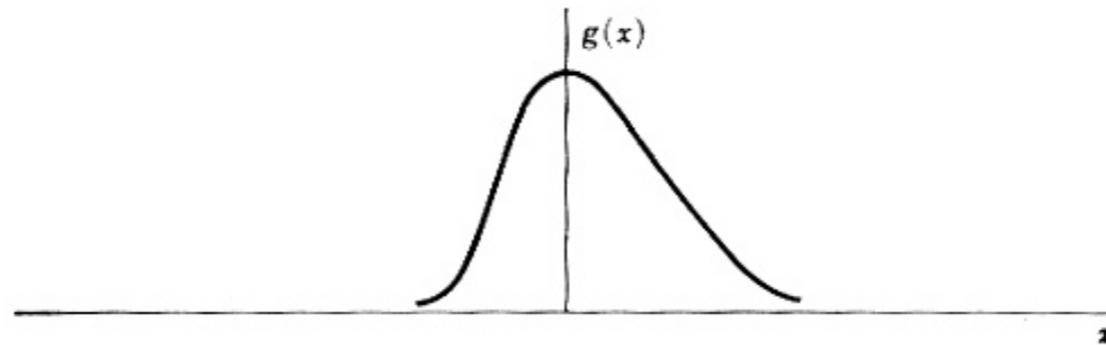
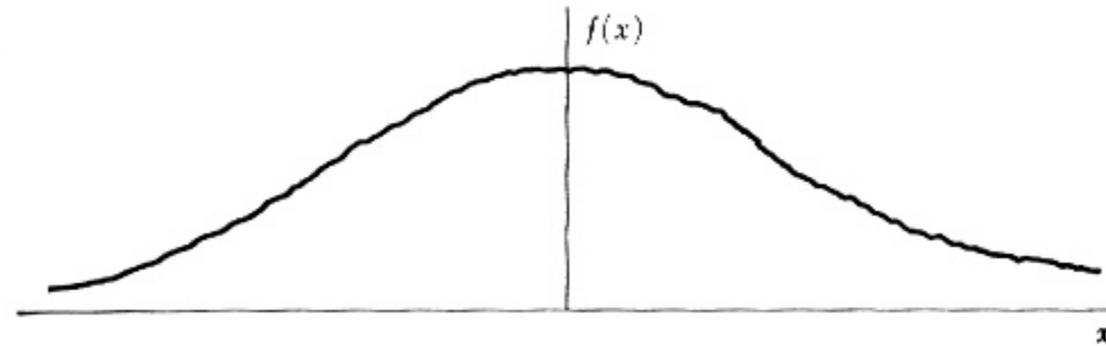


FEP: $|U(\alpha, \beta)|^2$

La fonction de transfert optique (FTO) est la transformée de Fourier de la FEP

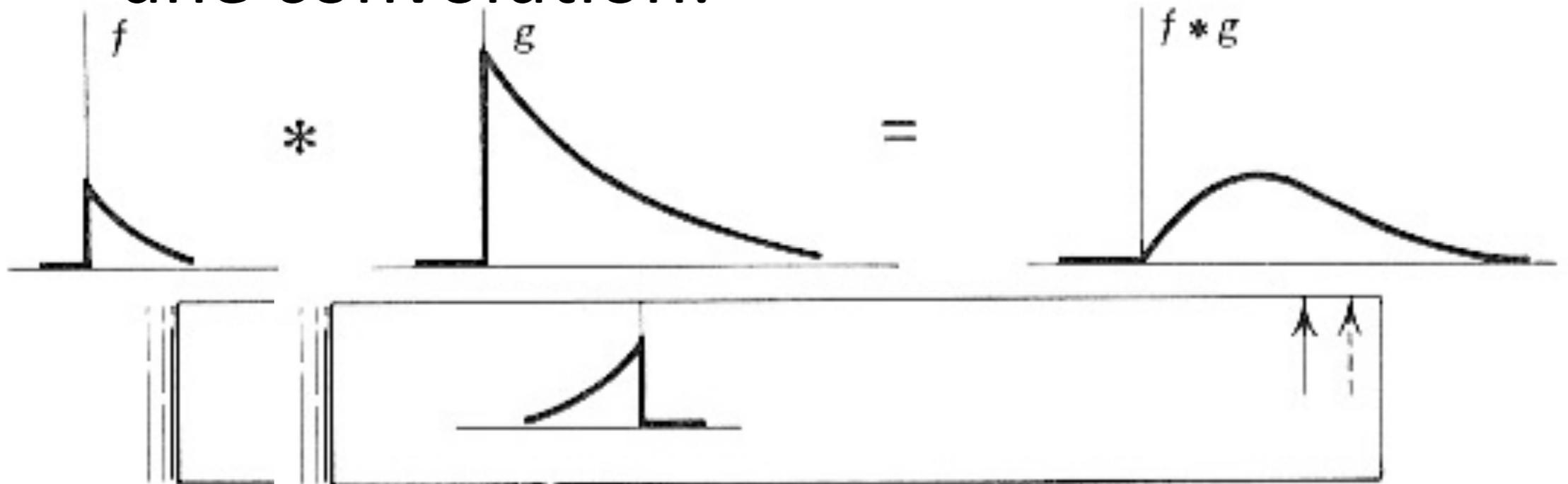
Convolution de deux fonctions

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t)dt$$



Convolution de deux fonctions

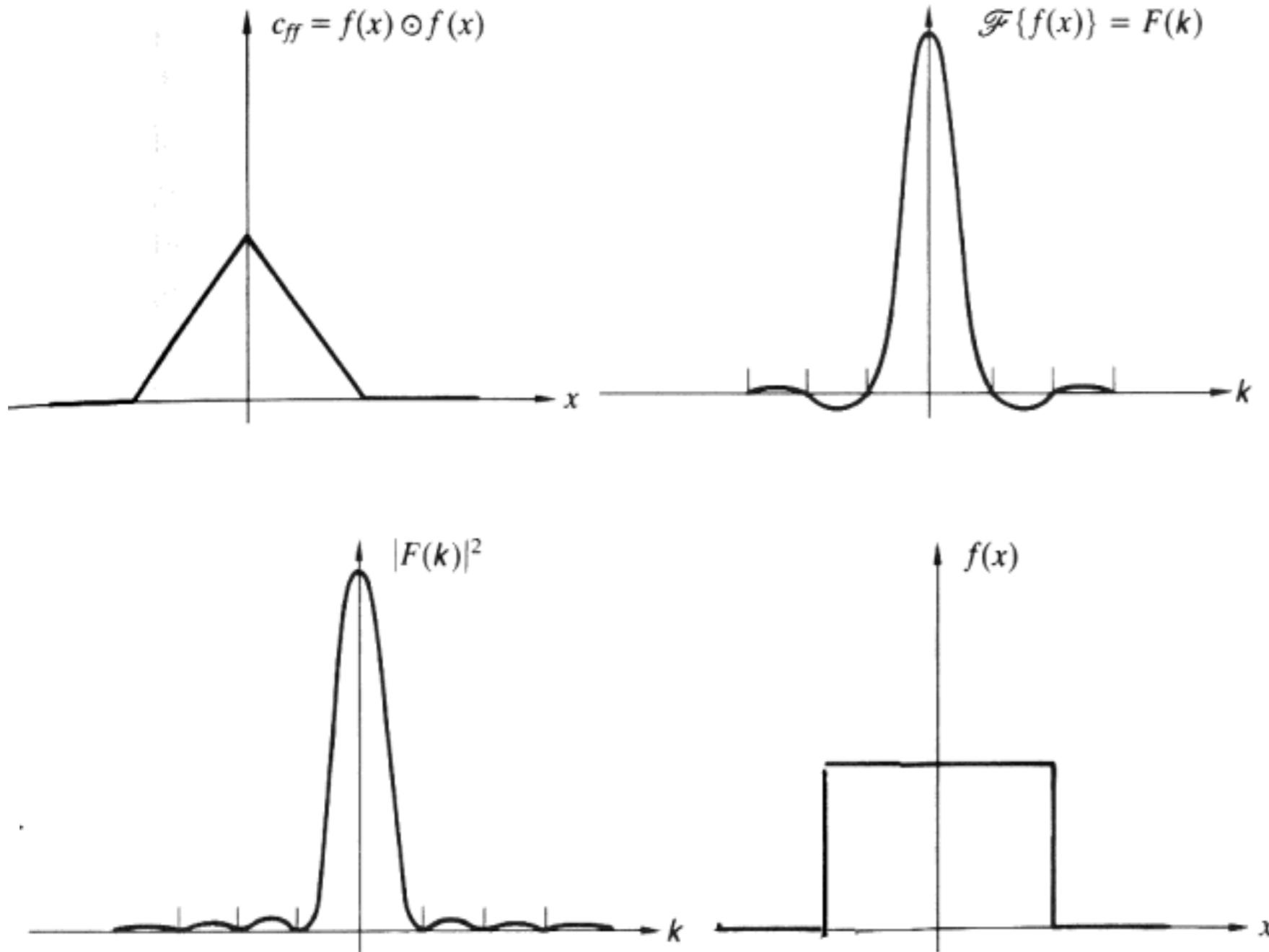
Il existe un moyen simple pour visualiser une convolution:



Cette méthode est utile pour vérifier qu'un résultat de calcul est raisonnable...

Le produit de convolution est « **plus doux** » que chacune des deux fonctions

Exercice

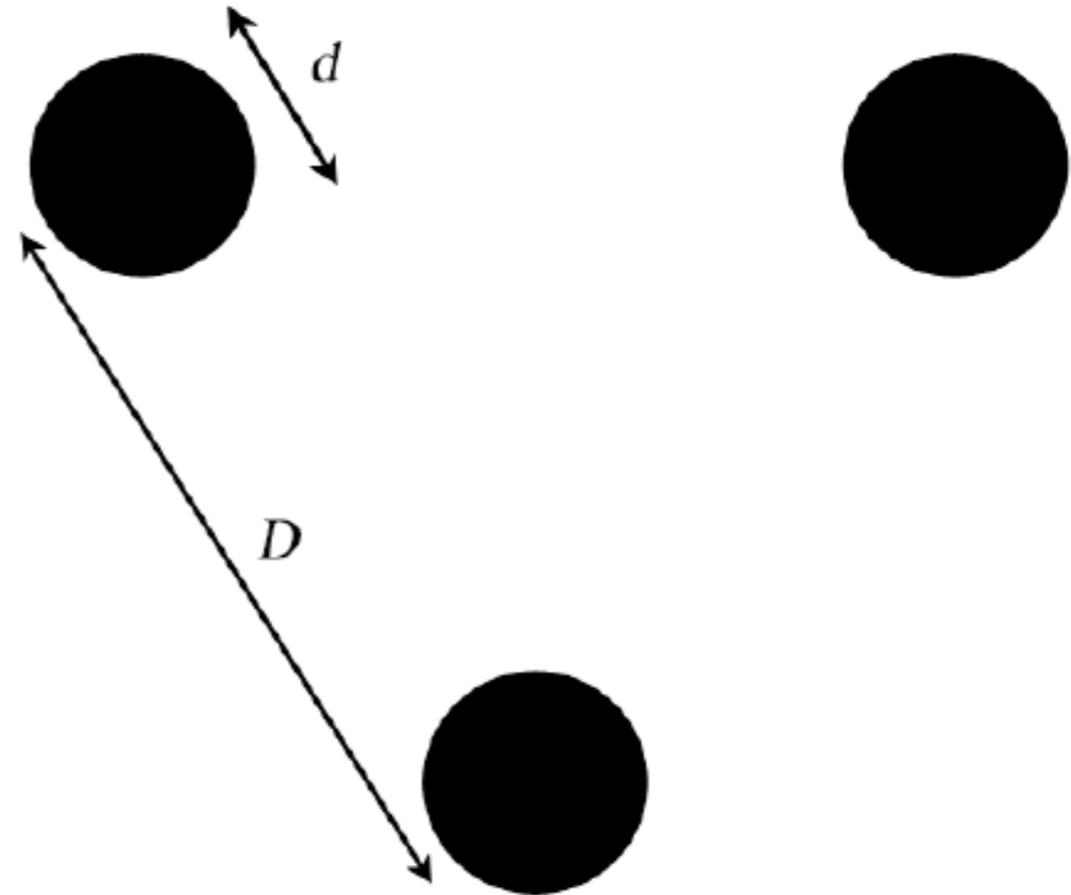


CHAMP PUPILLE ?
 CHAMP FOCAL ?
 FEP ?
 FTO ?

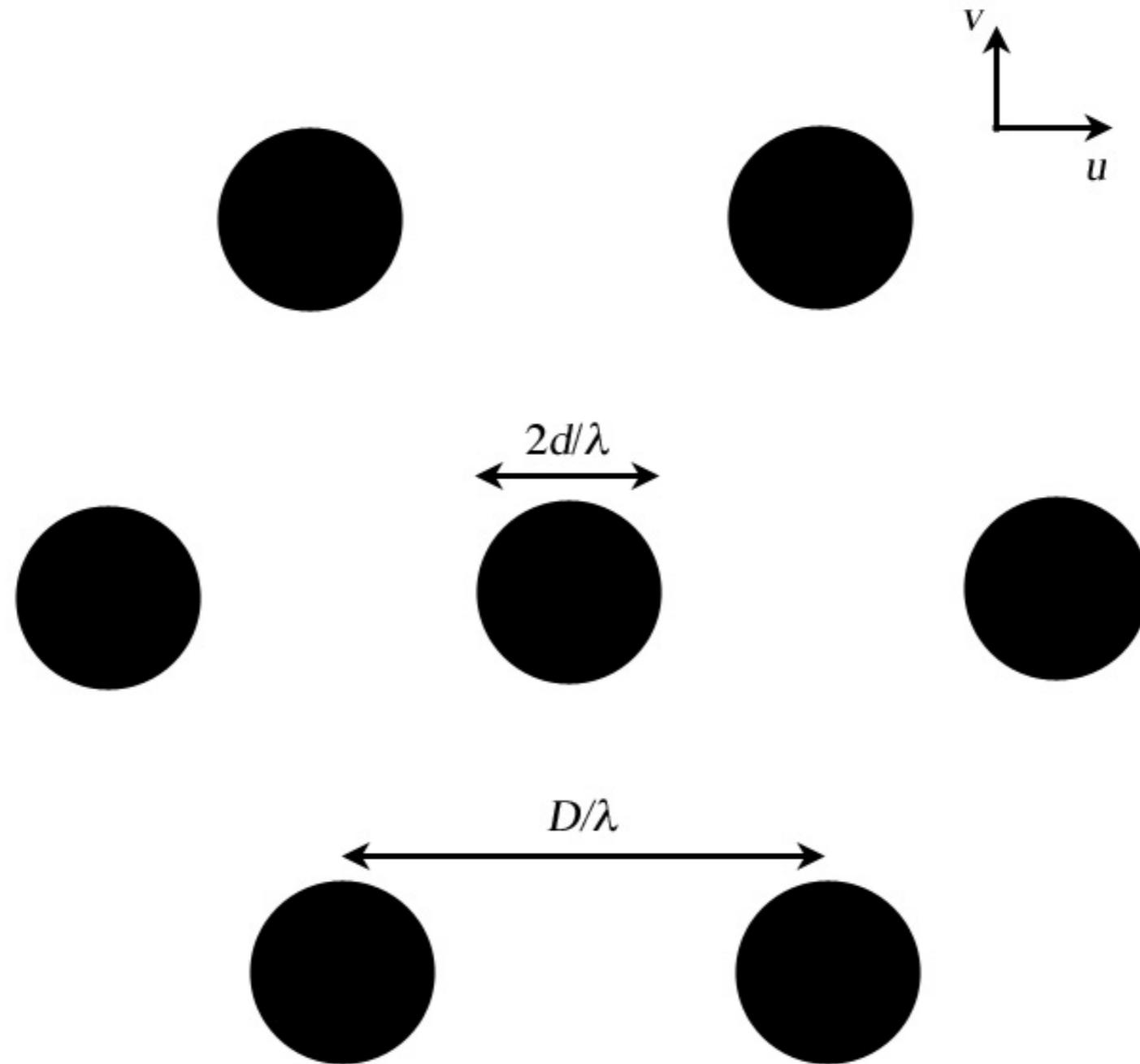
Exercice: Interféromètre à 3 ouvertures

- Dessiner la FTO de l'interféromètre à trois télescopes de la figure jointe (ouvertures de diamètre d aux sommets d'un triangle équilatéral de côtés D).

Pour simplifier, on se limitera à représenter la FTM en deux dimensions, en grisant les zones correspondant aux fréquences spatiales transmises (même partiellement).



Solution



«Glissement» du conjugué de la pupille sur elle-même

Formation de l'image

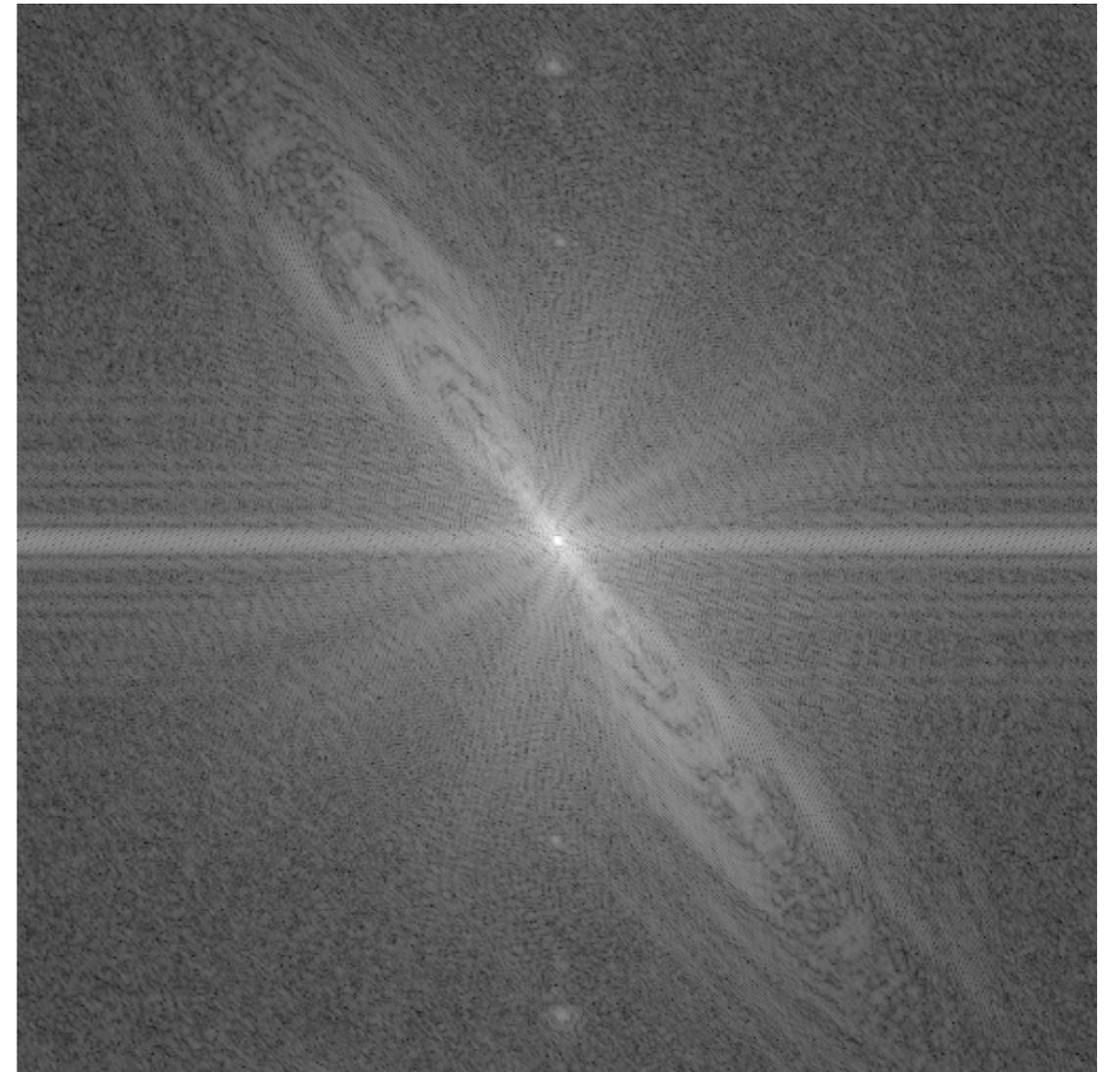
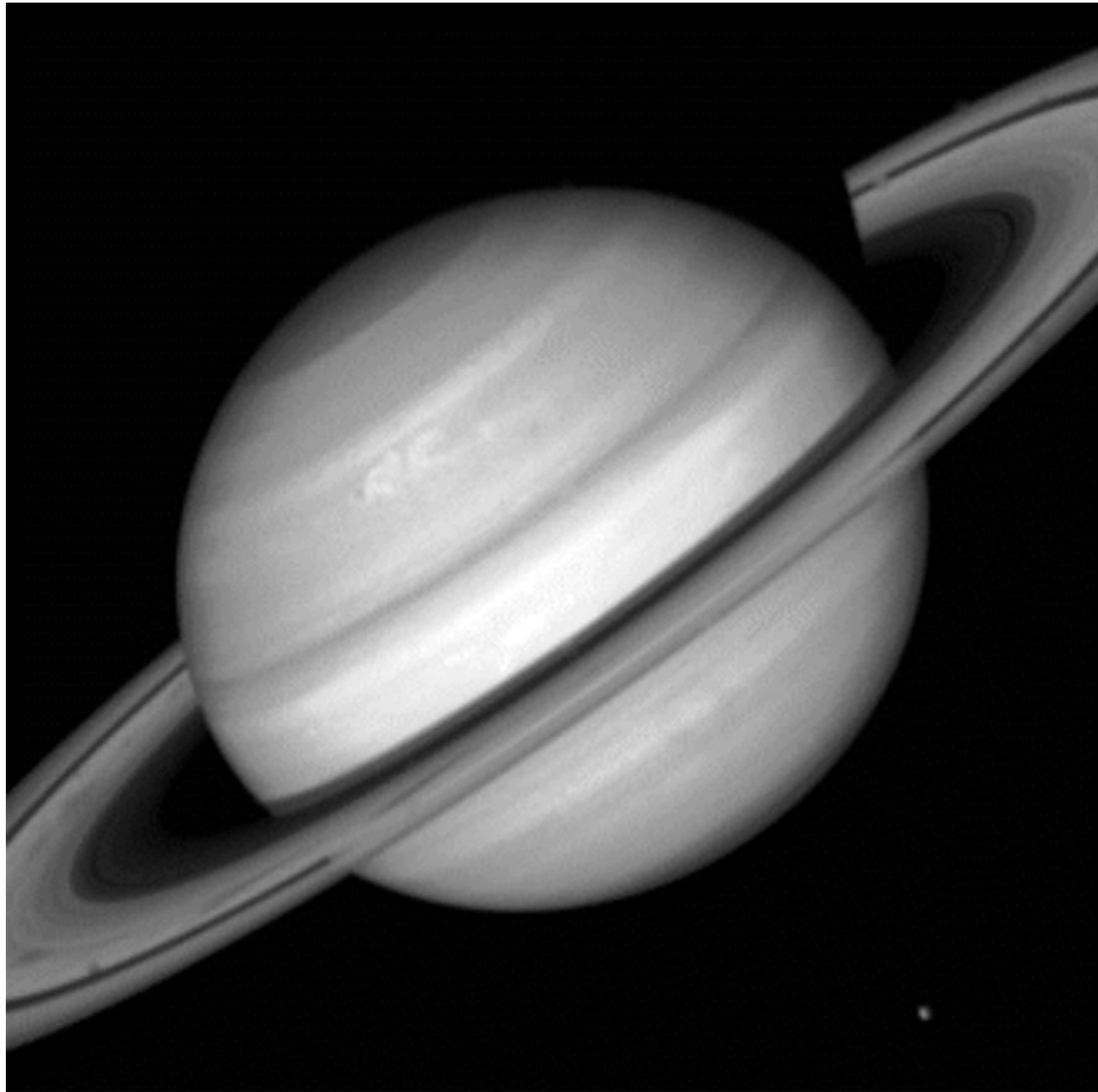
IMAGE

=

**produit de convolution de l'objet par la
FEP de l'instrument**

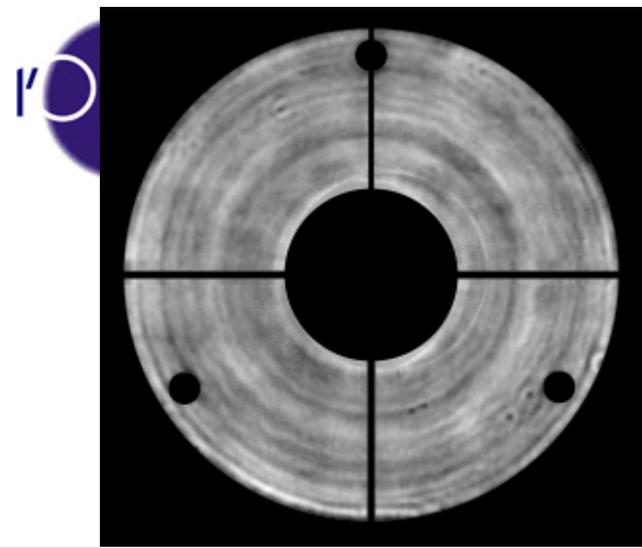
Spectre spatial d'une image

- On a vu apparaître précédemment la **transformée de Fourier FTO** de la **distribution d'intensité $o(\alpha, \beta)$** d'une source ponctuelle (FEP)
- Comment se présente le spectre spatial (=TF) d'une image ?



- **Attention:** une TF est une fonction *complexe* !

La relation pupille-FEP-Image



Pupille: $U_0(x/\lambda, y/\lambda)$

Autocorrelation



FTO

x

TF(Objet)

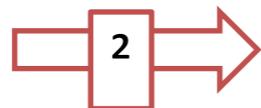
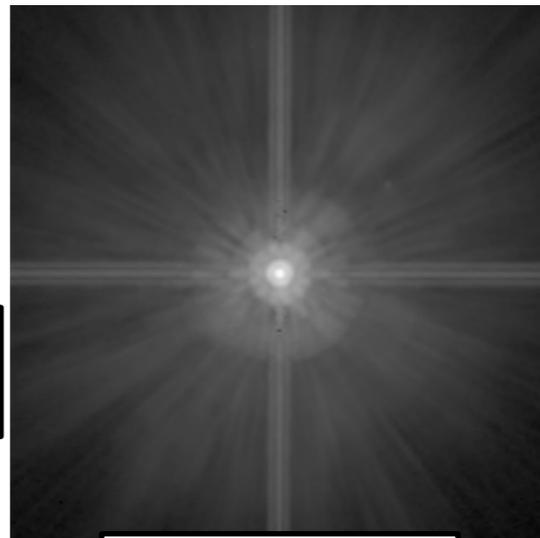
=



TF

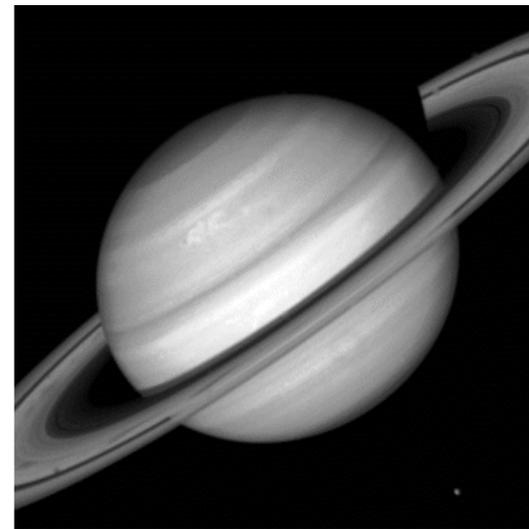


Champ focal: $U_1(\alpha, \beta)$



FEP(α, β)

*



Objet: $O(\alpha, \beta)$

=

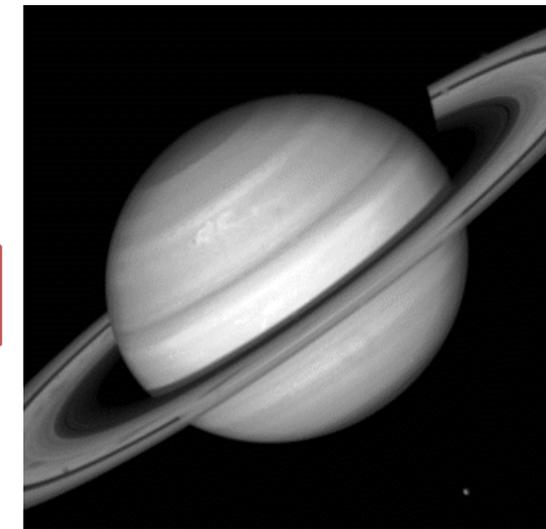
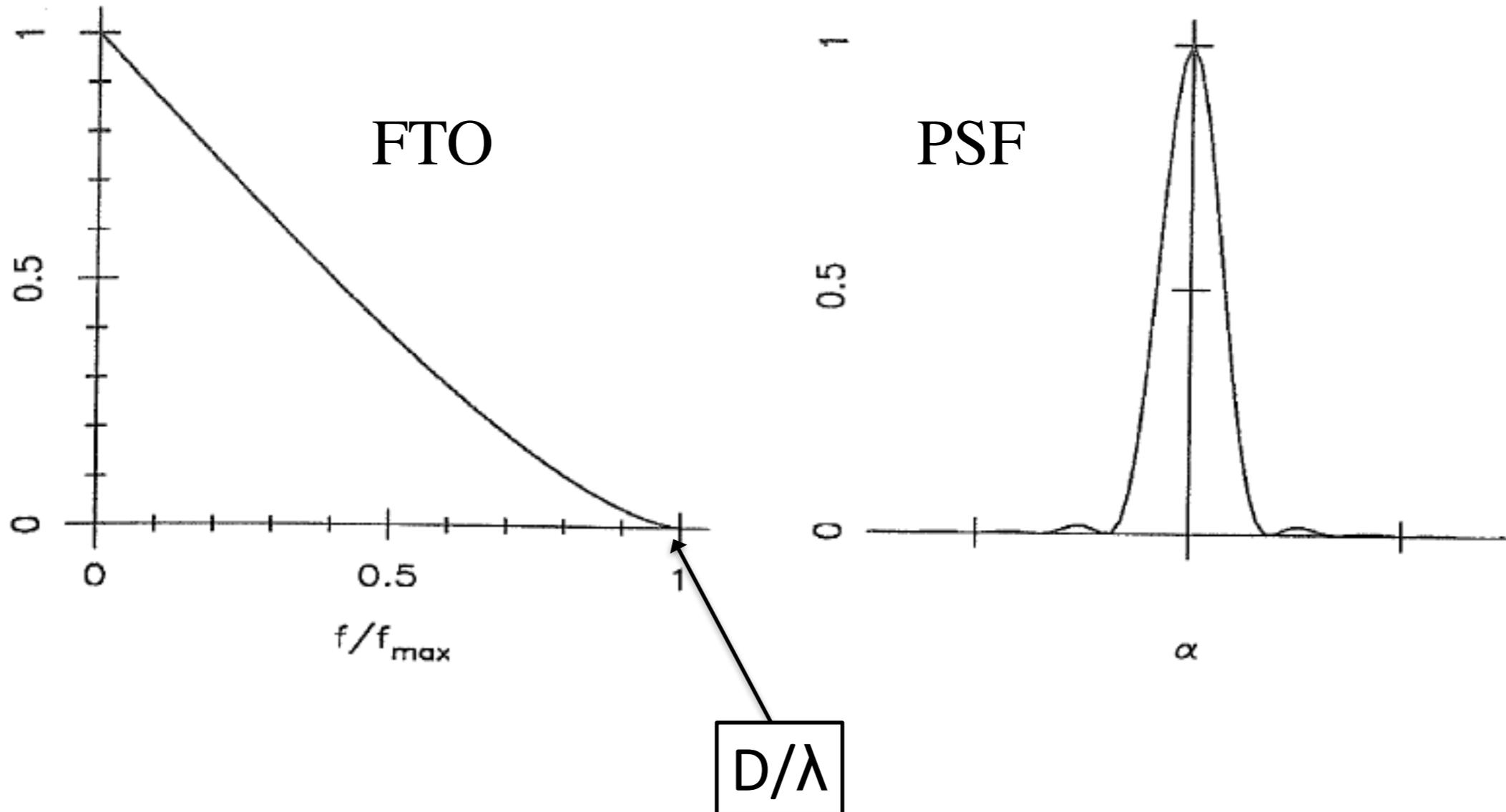


Image: $I(\alpha, \beta)$

$$\text{Image}(\alpha, \beta) = |U_1(\alpha, \beta)|^2 * \text{Objet}(\alpha, \beta)$$

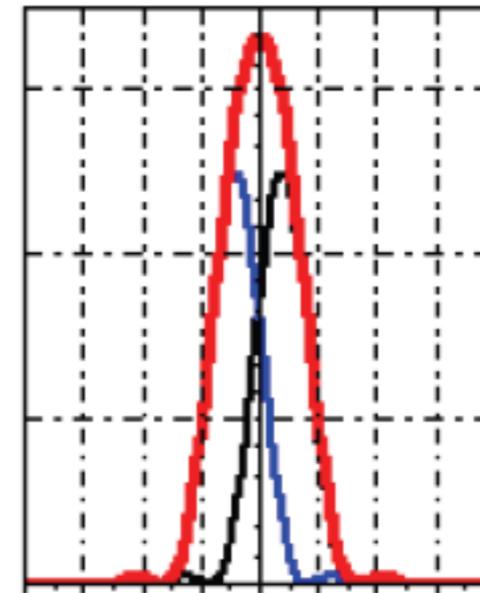
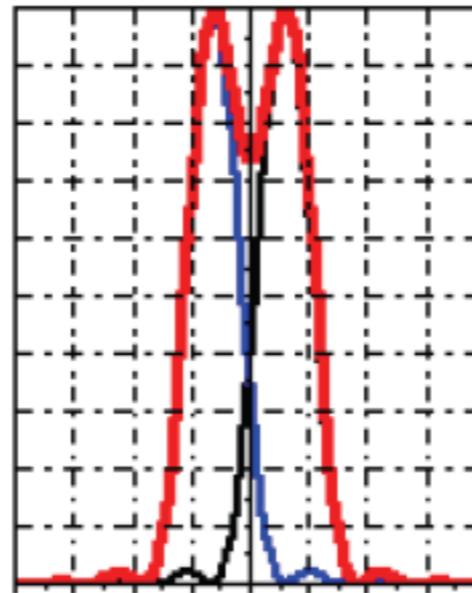
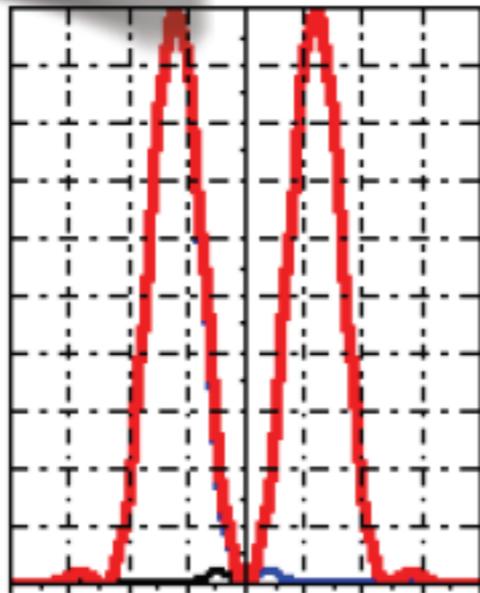
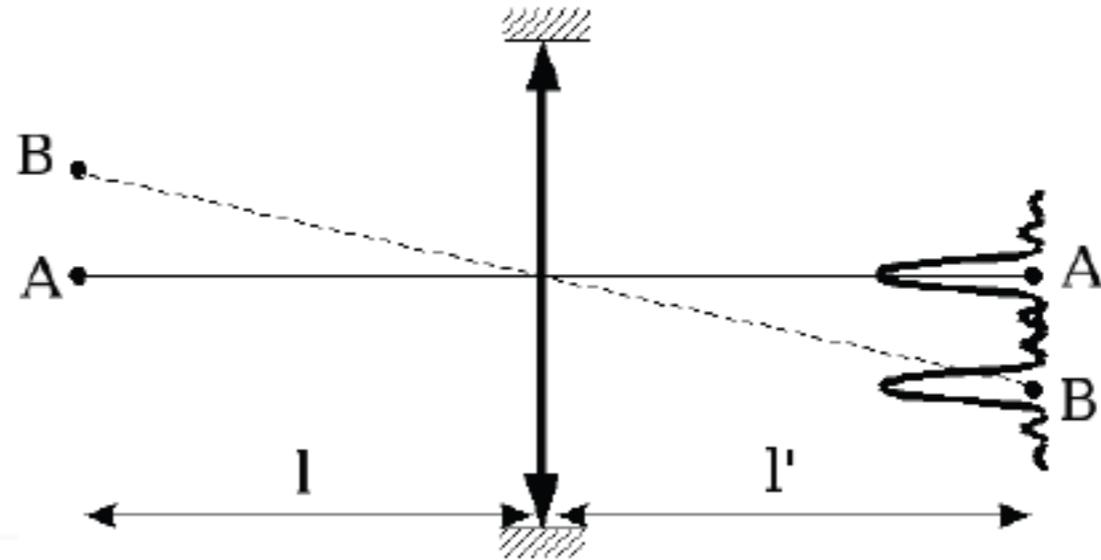
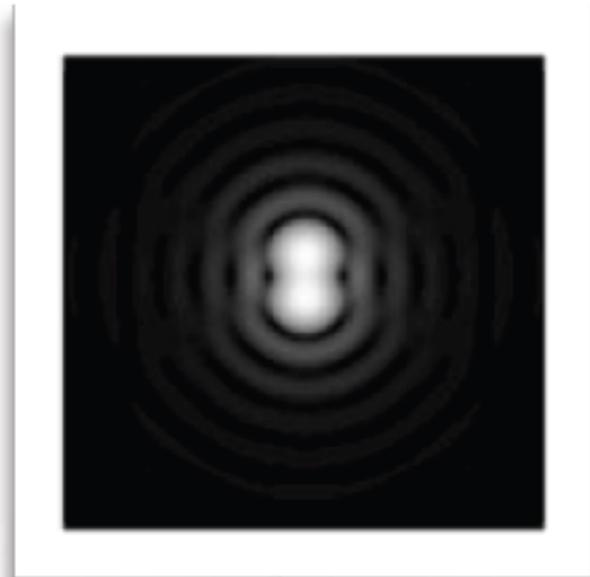
$$\text{TF}(\text{Image}) = \text{Autocorrelation}(U_0) \times \text{TF}(\text{Objet})$$

Fréquence de coupure



- Le critère de résolution interférométrique correspond à la fréquence spatiale de coupure de la FTO: D/λ
- pour $\lambda=550\text{nm}$, fréquence de coupure [arcsec^{-1}] = 8.8 diamètre[m]

Critère de résolution de Rayleigh



$$\alpha = 1,22 \lambda / (2a)$$

- Le **pouvoir de résolution** ou simplement la **résolution** d'un télescope est sa capacité à séparer deux sources A et B
- pour $\lambda=550\text{nm}$, **résolution[arcsec] = 0,138 / diamètre[m]**

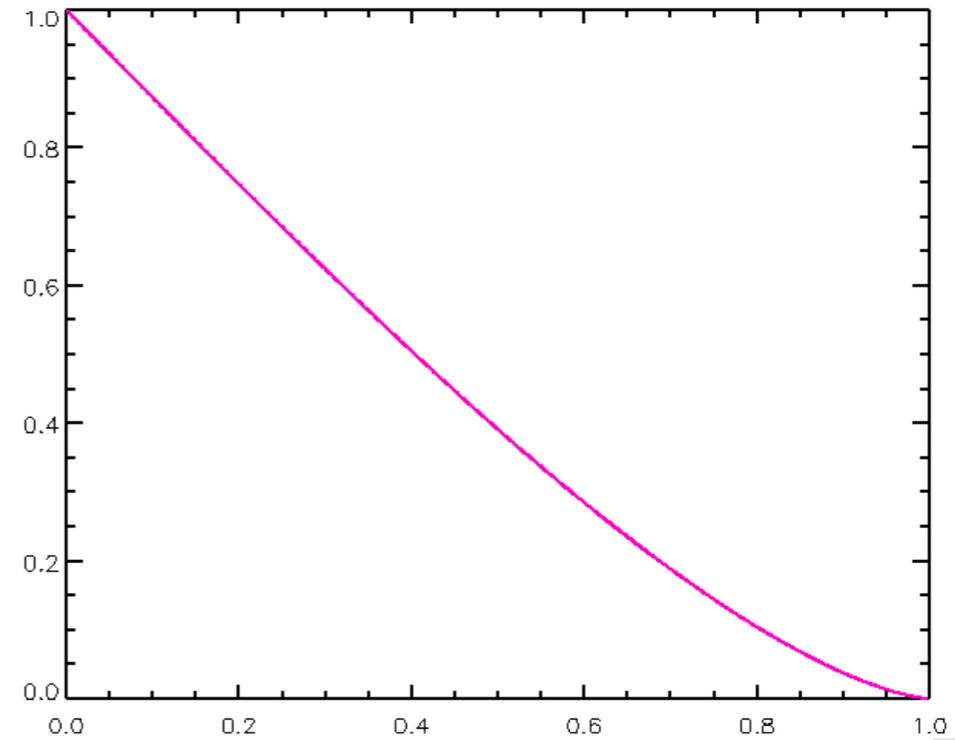
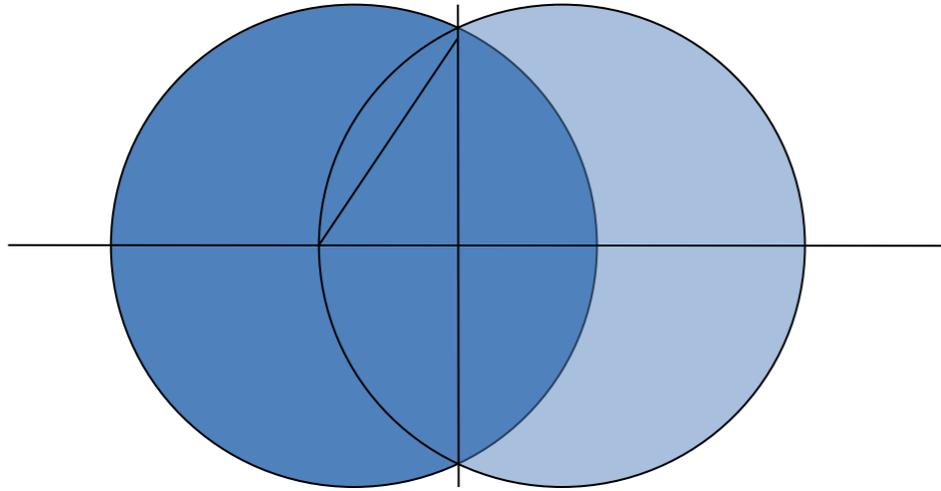
Exercice: pupille circulaire

On considère une pupille circulaire de diamètre D

1. Comment feriez-vous pour calculer la fonction de transfert optique (FTO) de cette pupille ?
2. Quelle est la fréquence spatiale de coupure d'un télescope de 8m de diamètre en visible ($\lambda = 0,5\mu\text{m}$), exprimée en arcsec^{-1} ? D'un radiotélescope de 100m de diamètre à $\lambda = 18\text{cm}$?
3. Pouvez-vous expliquer pourquoi un télescope transmet moins les hautes fréquences spatiales ?

Solution: pupille circulaire

1. FTO : auto-corrélation de la pupille = surface d'intersection de 2 disques décalés



Théorème d'échantillonnage (1)

Etabli par Cauchy (1789-1857) et redécouvert par Shannon (1916-2001)

Si $f(x)$ a un spectre de Fourier limité, c'est-à-dire tel que $F(k)=0$ pour $k>k_c$ alors $f(x)$ peut être entièrement décrite par un ensemble suffisant d'échantillons régulièrement espacés

La preuve de ce théorème est simple et basée sur l'utilisation judicieuse de la fonction $\text{III}(x)$, définie par:

$$\text{III}(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(x - i)$$

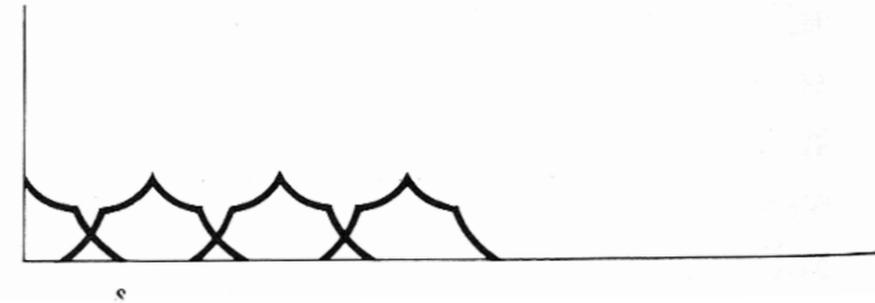
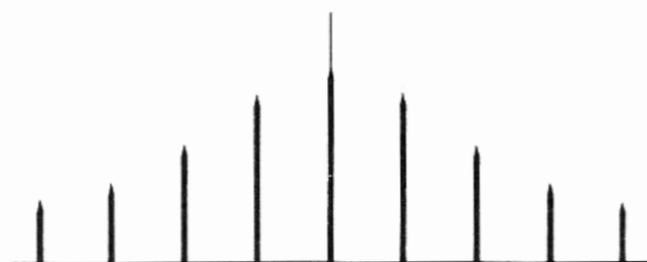
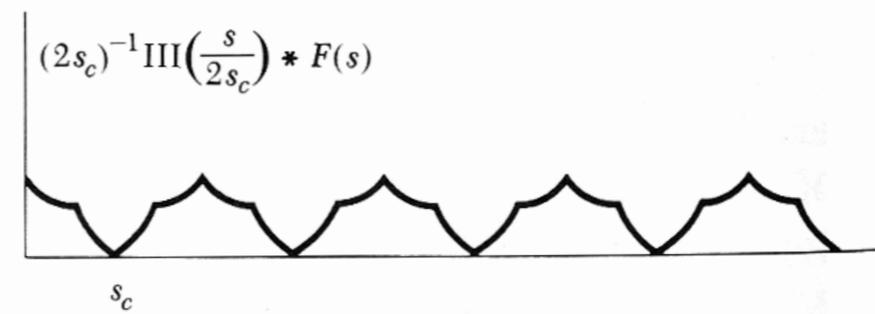
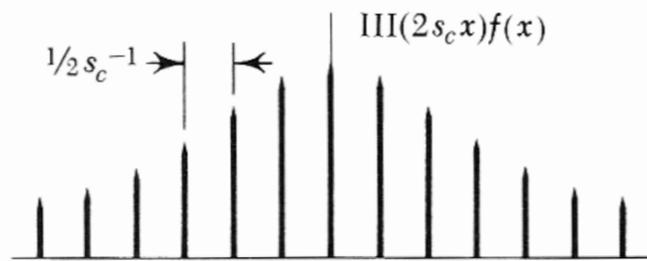
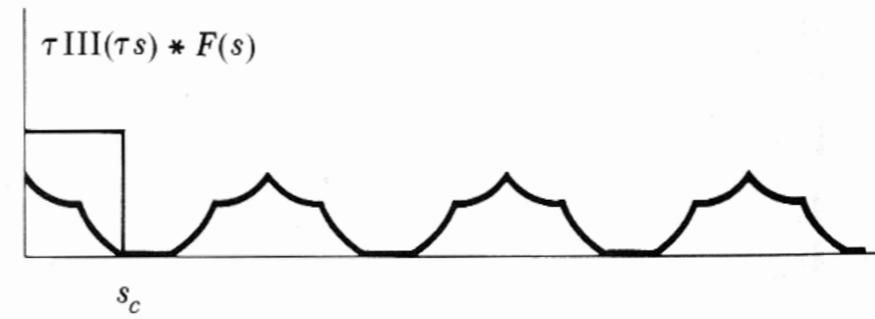
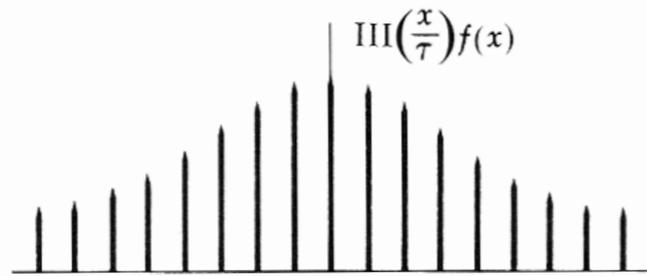
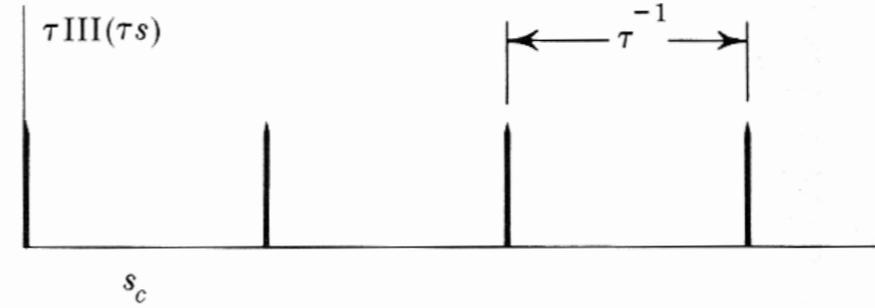
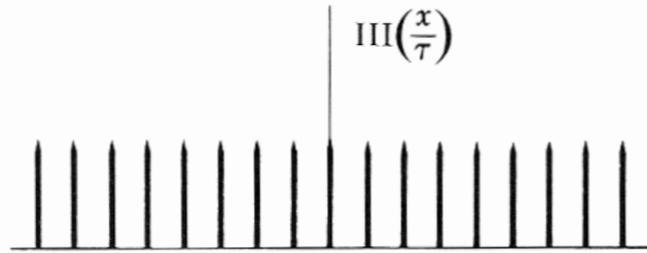
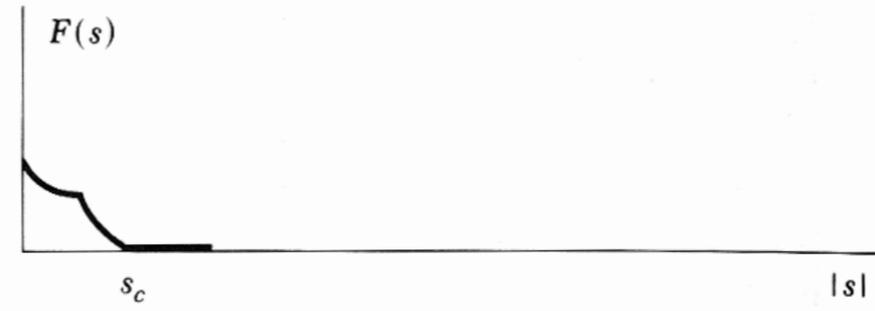
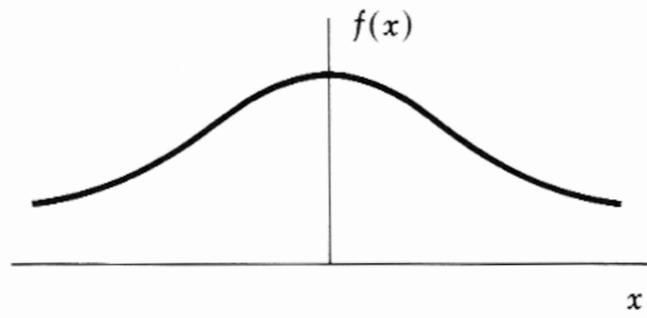
On peut écrire la fonction $f_s(x)$ échantillonnée sous la forme:

$$f_s(x) = \text{III}\left(\frac{x}{\tau}\right) f(x)$$

Sa transformée de Fourier est donc:

$$F_s(k) = \tau \text{III}(\tau k) * F(k)$$

$$F_x(k) = \tau \sum_{i=-\infty}^{+\infty} F\left(k - \frac{i}{\tau}\right) \text{ *répliques de } F(k)*$$



- Si $1/\tau > 2k_c$ alors les répliques de $F(k)$ sont séparées d'une distance supérieure à leur largeur et ne se superposent pas
- On en conclut que l'information complète sur $F(k)$ est conservée si la largeur d'échantillonnage τ est telle que:

$$\tau \leq \frac{1}{2k_c}$$

- On peut retrouver la fonction $f(x)$ d'origine en multipliant simplement $F(k)$ par une fonction porte $\Pi(\tau k)$ pour éliminer toutes les répliques sauf une:

$$F_x(k)\Pi(\tau k) = [\tau \text{III}(\tau k) * F(k)] \Pi(\tau k) = F(k)$$

- Ce qui donne par inversion de Fourier:

$$\left[\text{III} \left(\frac{x}{\tau} \right) f(x) \right] * \left[\frac{1}{\tau} \text{sinc} \left(\frac{x}{\tau} \right) \right] = f_s(x) * \frac{1}{\tau} \text{sinc} \left(\frac{x}{\tau} \right) = f(x)$$

- Toutes les valeurs de $f(x)$ peuvent être déduites de $f_s(x)$ par convolution

Exercice: Diffraction et échantillonnage

On considère un télescope du VLT, de diamètre d et de focale f , utilisé à la longueur d'onde λ ($d = 8$ m, $f = 120$ m, $\lambda = 2.2$ μm).

1. Quelle est le pouvoir de résolution théorique de ce télescope ?
Quelle est la fréquence spatiale correspondante ?
2. Quelle doit être la taille physique des pixels d'un détecteur placé au foyer de ce télescope, que l'on considèrera limité par la diffraction ? On cherchera à satisfaire la condition d'échantillonnage de Shannon.
3. Est-ce que cette résolution est réellement accessible pour un télescope au sol (en l'absence d'optique adaptative) ? Pourquoi?

Solution

1. Pouvoir de résolution théorique = $(1,22) \lambda/d$.
Numériquement, on obtient $\lambda/d = 2,75 \cdot 10^{-7}$ radians = 0,057 arcsec. La fréquence spatiale correspondante est l'inverse: 17,6 arcsec⁻¹.
2. La focale est de 120m, donc $2,75 \cdot 10^{-7}$ radians correspond au foyer à: $2,75 \cdot 10^{-7} \times 120 = 33 \cdot 10^{-6}$ m = 33 μ m. Pour satisfaire le critère de Shannon, on aura donc des pixels de 16-17 μ m maximum.
3. Non, l'atmosphère dégrade la qualité des images du fait de la turbulence.

Exercice: filtrage spatial et échantillonnage

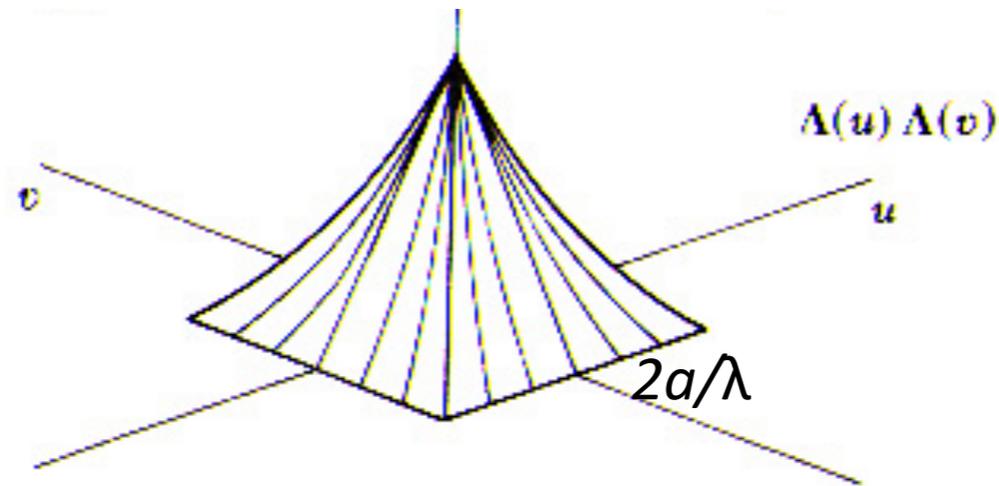
On a vu qu'un système optique est caractérisé par une fonction de transfert, qui définit l'intensité dans le plan image à partir de celle de l'objet

$$I = \text{TF}(i) = \text{TF}(o) \times \text{TF}(\text{FEP}) = O \times \text{FTO}$$

1. Dessiner à main levée la fonction de transfert de modulation en intensité d'un télescope à pupille carrée de côté $2a$, utilisé en lumière monochromatique de longueur d'onde λ
2. Quelle est la fréquence spatiale maximale transmise par ce télescope ?
3. Comment est-elle reliée à sa résolution angulaire ?
4. Quel échantillonnage utiliser pour ne pas perdre d'information dans le plan image de ce télescope ?

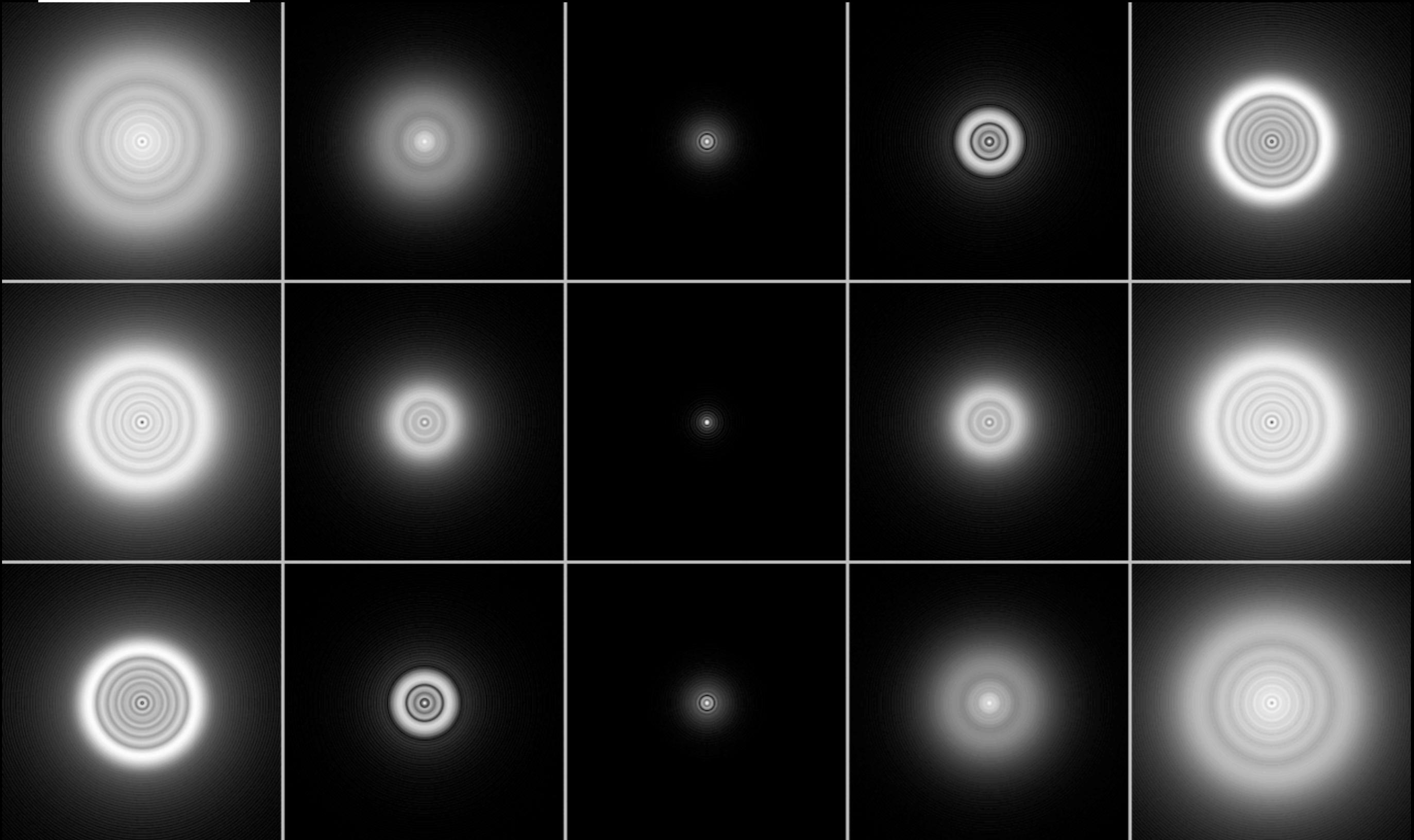
Solution

1. L'autocorrélation de la pupille est obtenue par « glissement »:



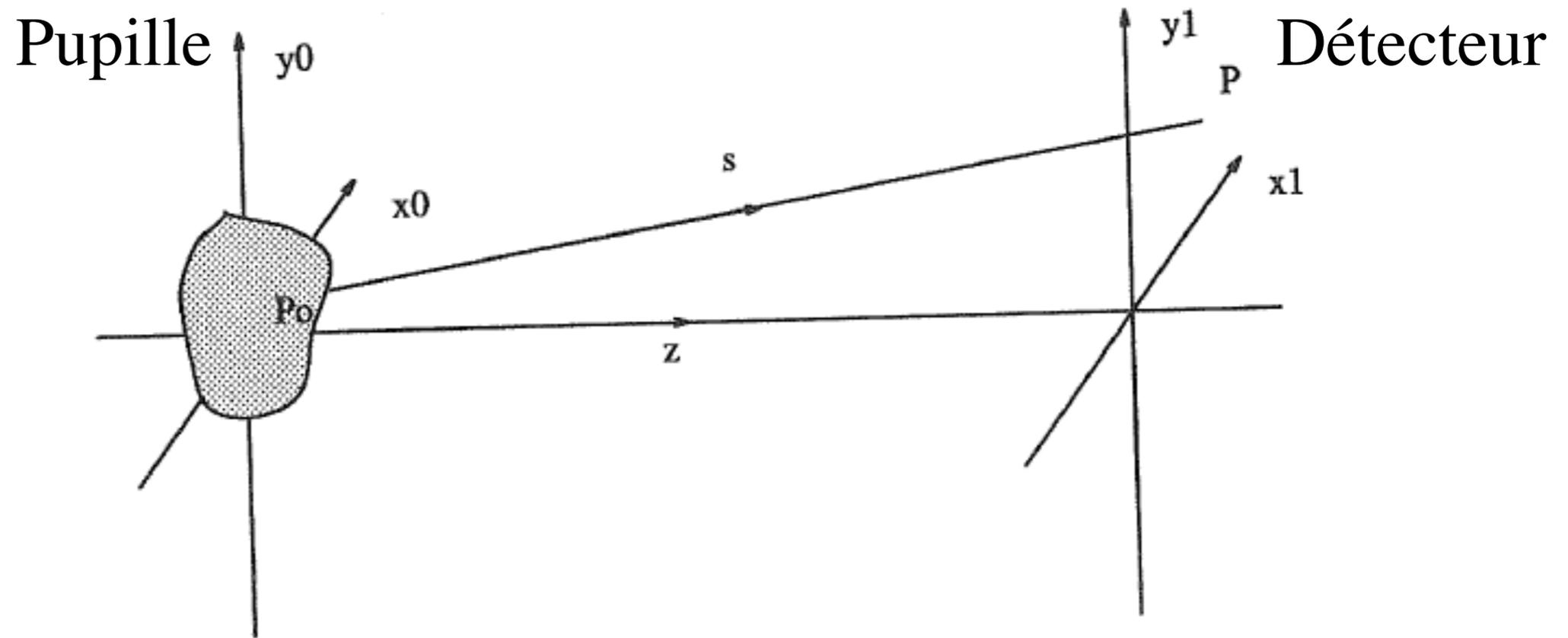
2. La fréquence spatiale maximale est $1,41 \cdot 2a/\lambda$ (en rad^{-1}) selon les diagonales
3. La résolution angulaire est l'inverse de la fréquence spatiale maximale. Donc elle est de l'ordre de $\lambda/(1,41 \cdot 2a)$.
4. On a vu que le théorème de Shannon impose deux échantillons par élément de résolution. Un pixel devra donc correspondre au maximum à un angle de $\lambda/(1,41 \cdot 4a)$ sur les diagonales de la pupille

Les Aberrations Optiques

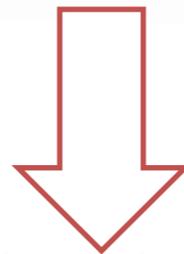


Les causes de la présence d'aberrations optiques :

- Difficultés à réaliser les surfaces idéales suivant les besoins
- Difficultés à trouver les bons indices de réfraction pour les matériaux à utiliser
- Chromatisme de l'indice $n(\lambda)$, inhomogénéité des matériaux
- Erreurs de polissage, de centrage, d'alignement des pièces optiques. Contraintes des fixations
- Effets de variation de la température (indice $n(T)$, déformation), déformation par la gravité
- **L'atmosphère terrestre (hautes fréquences)**



$$U(x_1, y_1) = -\frac{ie^{ikz}}{\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}[x_1^2 + y_1^2]} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x_0, y_0) e^{\frac{-i2\pi}{z\lambda}[x_0x_1 + y_0y_1]} dx_0 dy_0$$



$$U(x_0, y_0) = \exp[i\phi(x_0, y_0)] \text{ si } [(x_0, y_0) \in \text{pupille}]$$

$$U(x_0, y_0) = 0 \text{ si } [(x_0, y_0) \notin \text{pupille}]$$

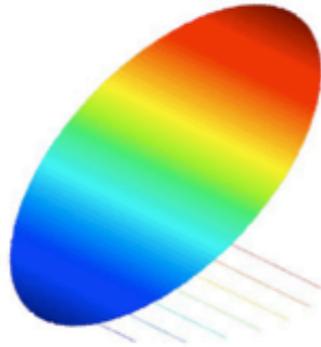
Les aberrations optiques sont considérées comme un déphasage du front d'onde dans la pupille

Les polynômes de Zernike

Mode 1



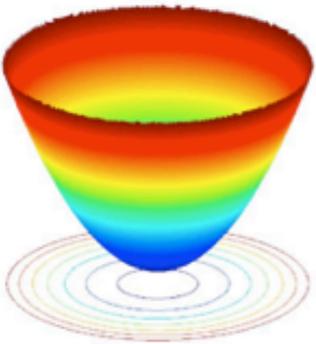
Mode 2



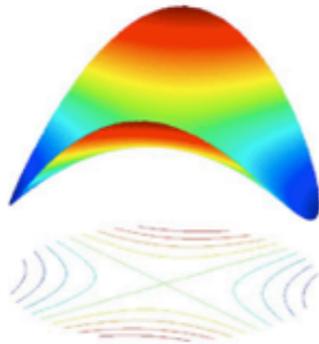
Mode 3



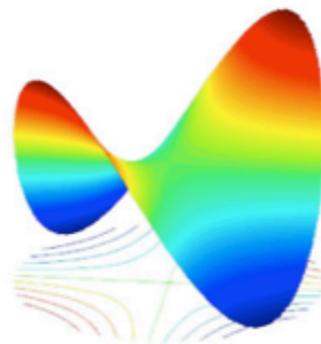
Mode 4



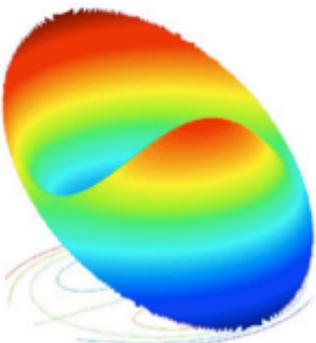
Mode 5



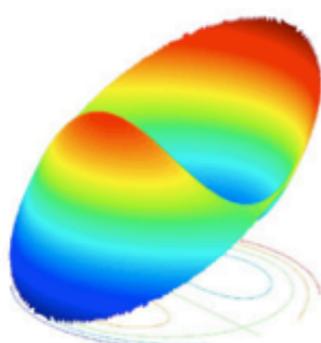
Mode 6



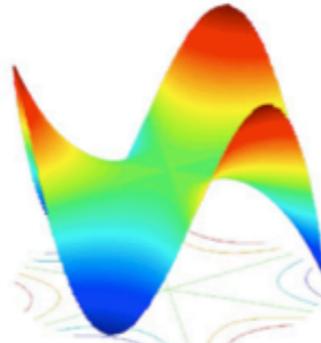
Mode 7



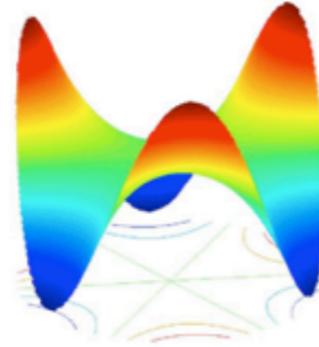
Mode 8



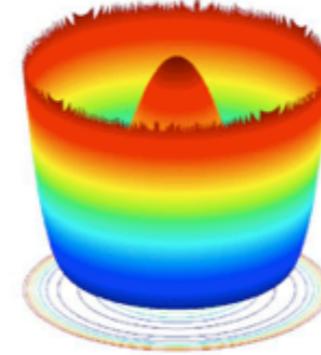
Mode 9



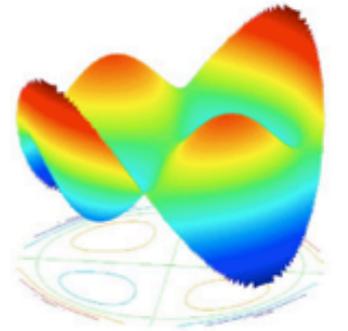
Mode 10



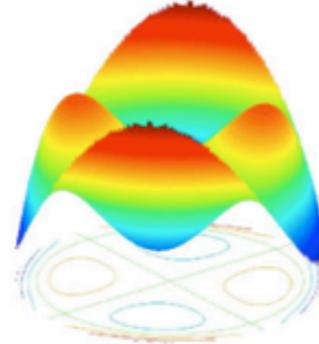
Mode 11



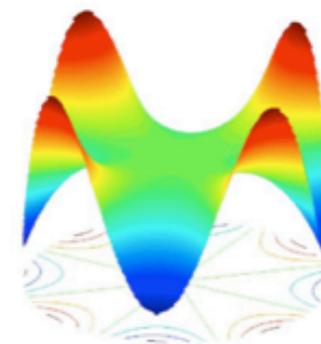
Mode 12



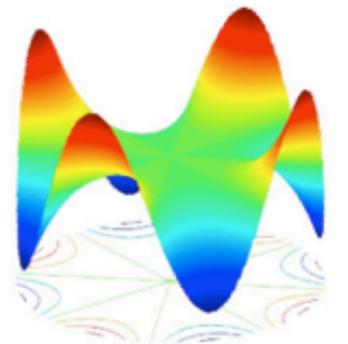
Mode 13



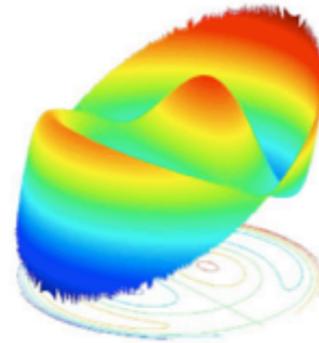
Mode 14



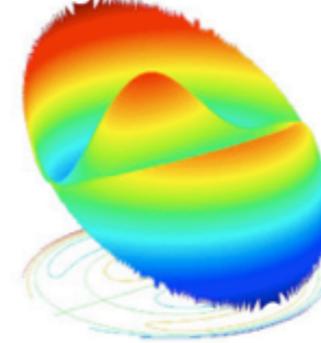
Mode 15



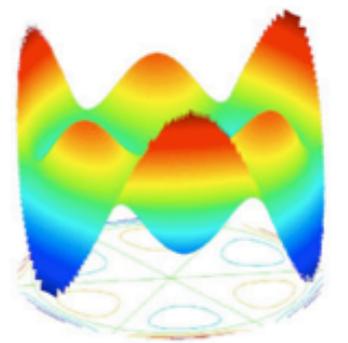
Mode 16



Mode 17



Mode 18



Les polynômes de Zernike

Polynômes pairs:

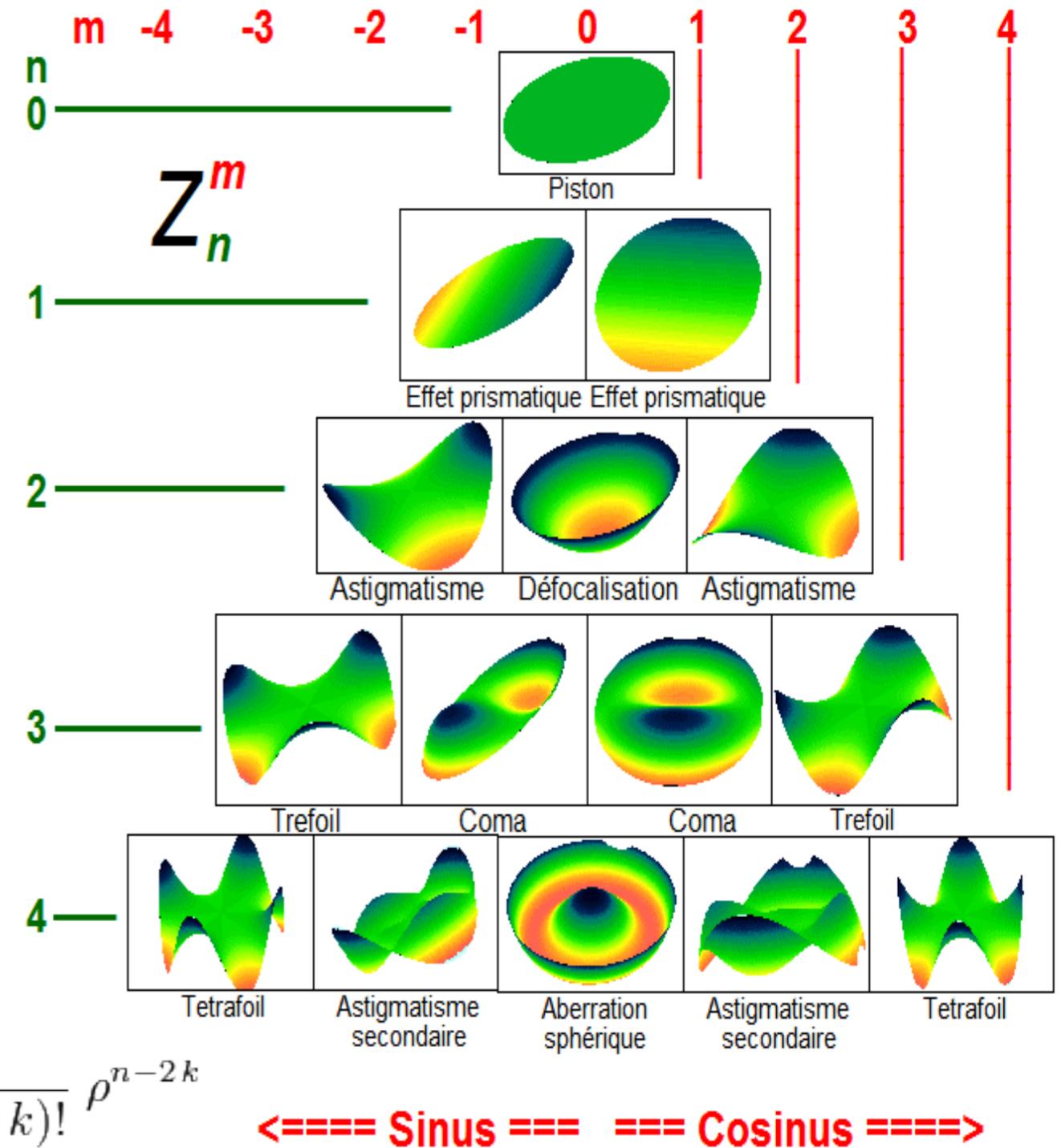
$$Z_n^m(\rho, \varphi) = R_n^m(\rho) \cos(m\varphi)$$

Polynômes impairs:

$$Z_n^{-m}(\rho, \varphi) = R_n^m(\rho) \sin(m\varphi),$$

Composante radiale:

$$R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! ((n+m)/2 - k)! ((n-m)/2 - k)!} \rho^{n-2k}$$



Les polynômes de Zernike

- Décomposition des aberrations de la phase sur une base de modes
- Les polynômes de Zernike :

$$\phi(\vec{\rho}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Z_i(\vec{\rho})$$

avec
$$a_i = \frac{1}{S} \iint_{\text{pupille}} \phi(\vec{\rho}) Z_i(\vec{\rho}) d\vec{\rho}$$

- Il s'agit d'une base orthonormée:

$$\frac{1}{S} \iint_{\text{pupille}} Z_i(\vec{\rho}) Z_j(\vec{\rho}) d\vec{\rho} = \delta(i, j)$$

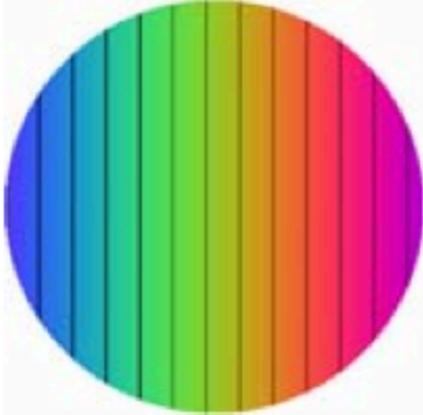
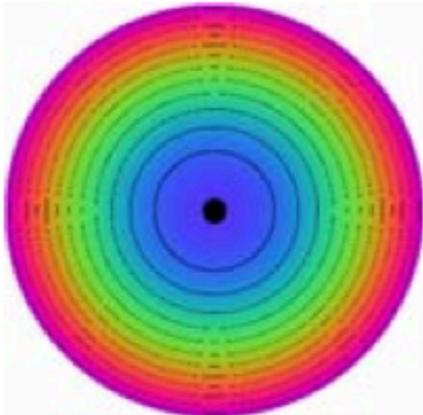
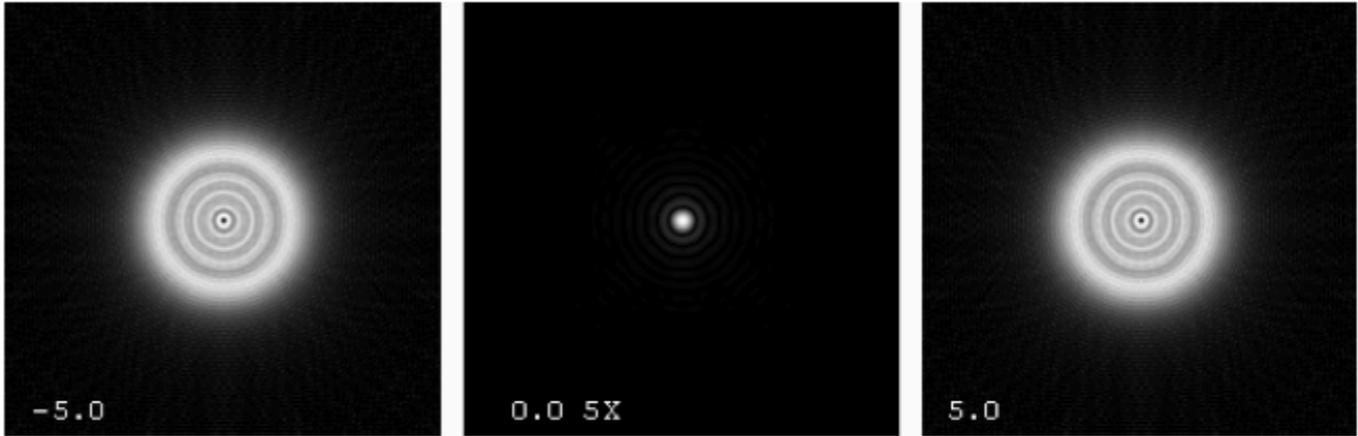
- Variance spatiale de la phase sur la pupille:

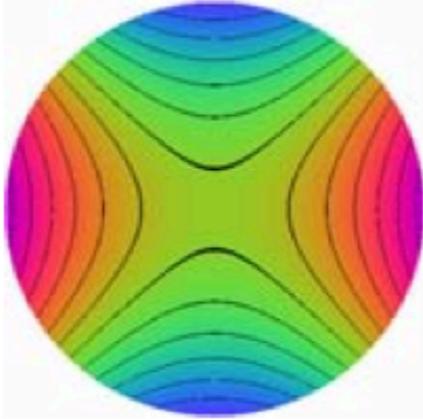
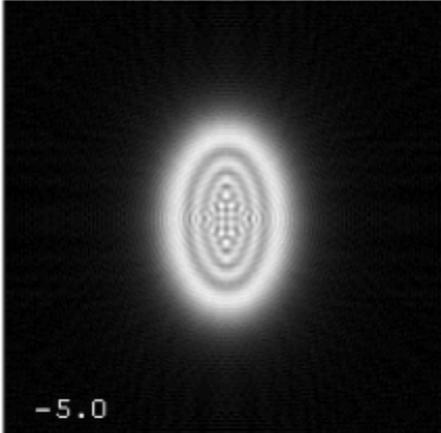
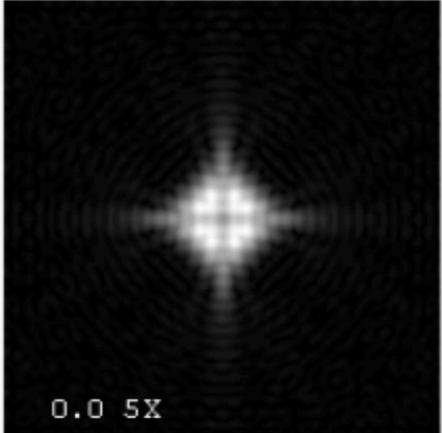
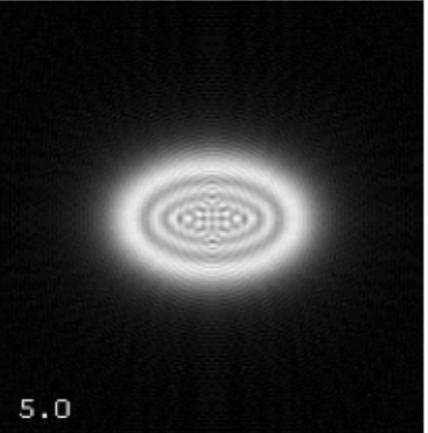
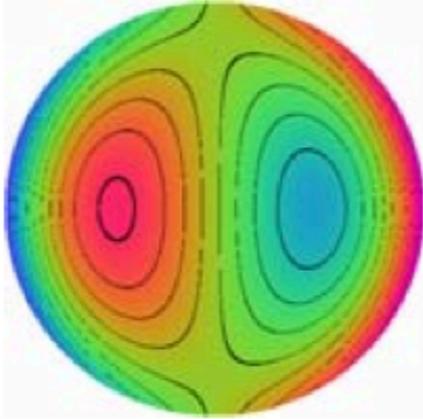
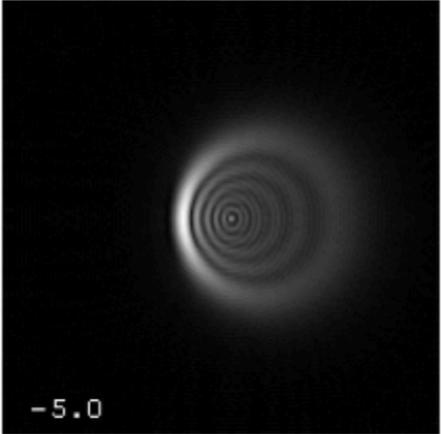
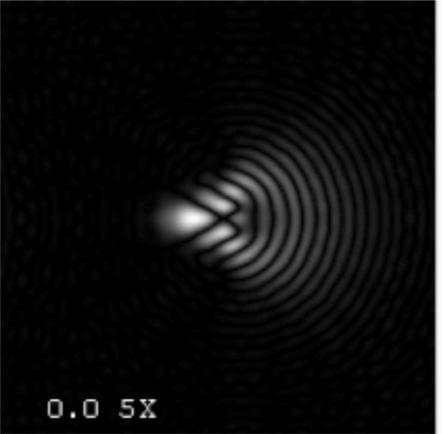
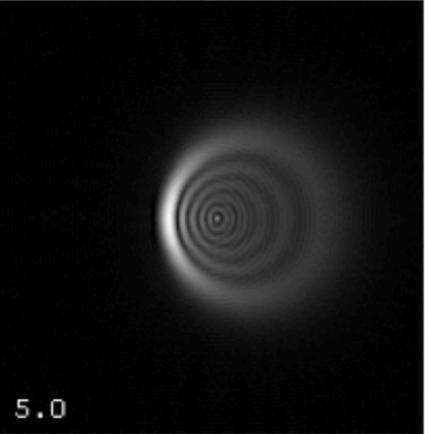
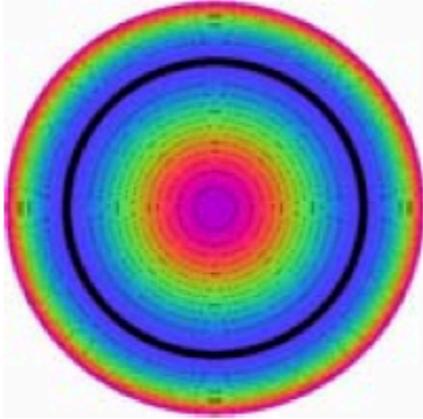
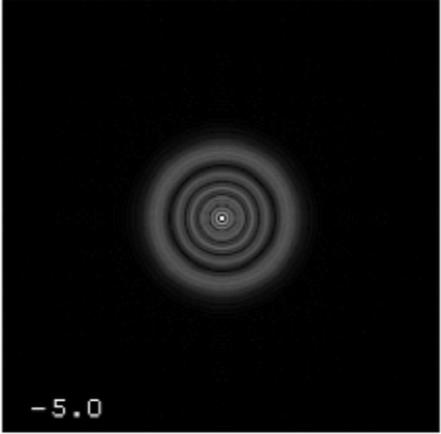
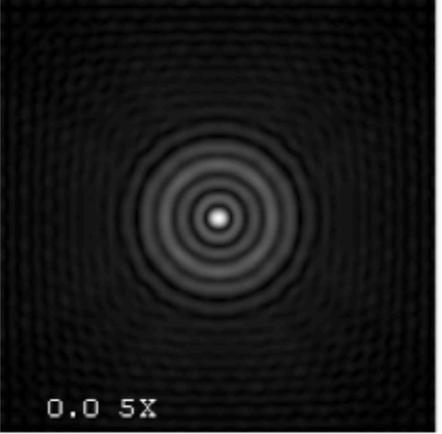
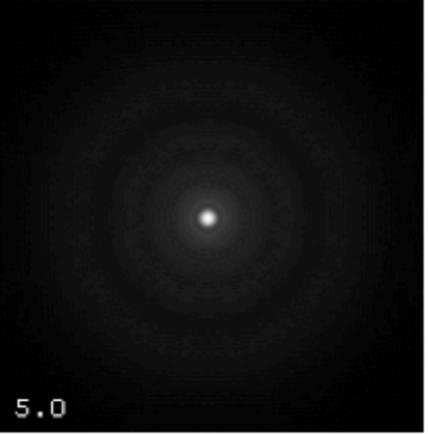
$$\sigma_{\phi}^2 = \frac{1}{S} \iint_{\text{pupille}} [\phi(\vec{\rho}) - \bar{\phi}] d\vec{\rho} = \sum_{i=2}^{\infty} a_i^2$$

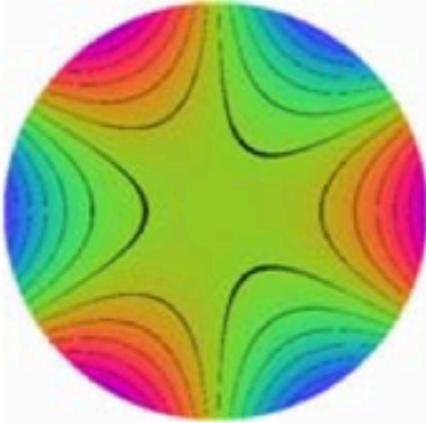
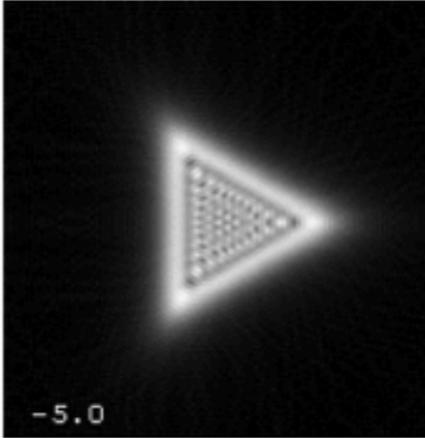
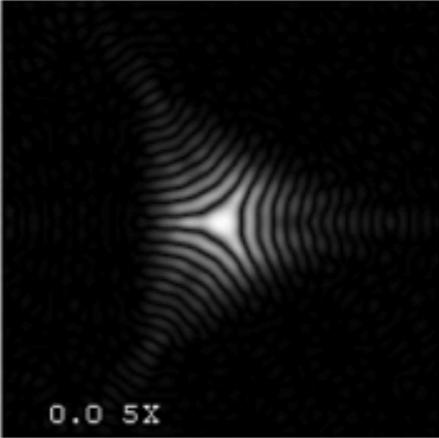
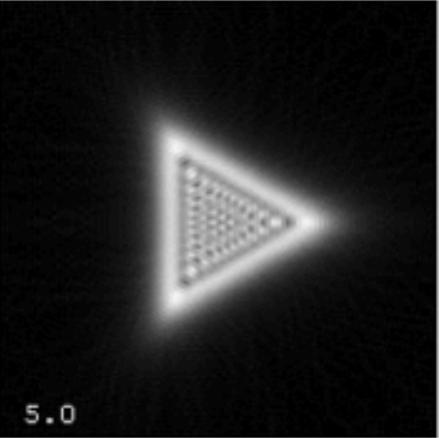
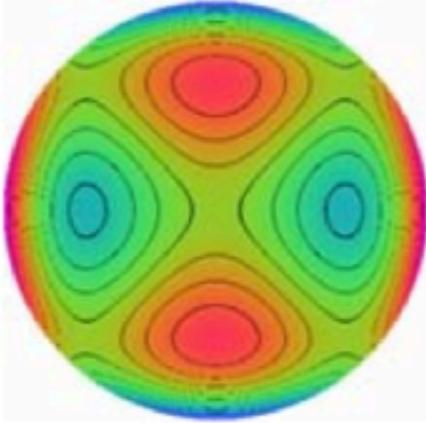
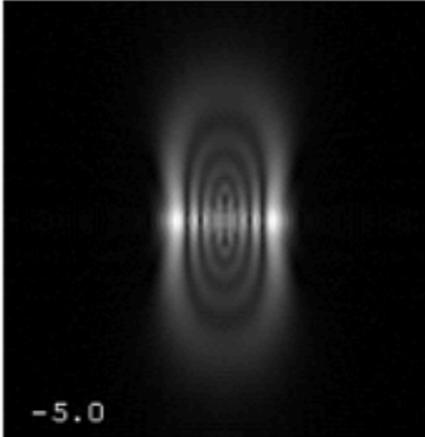
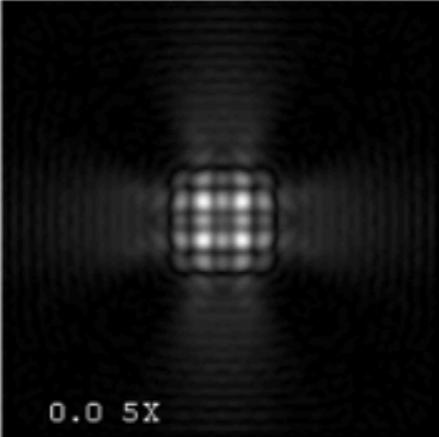
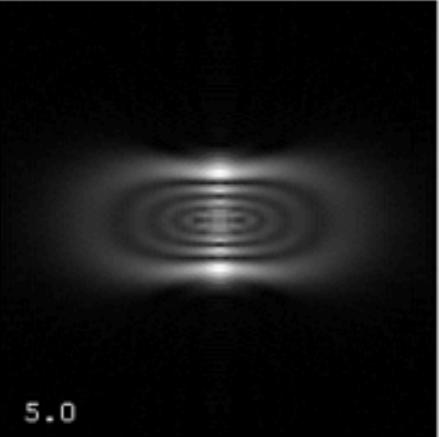
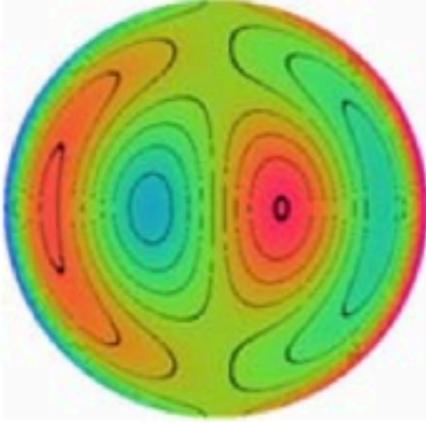
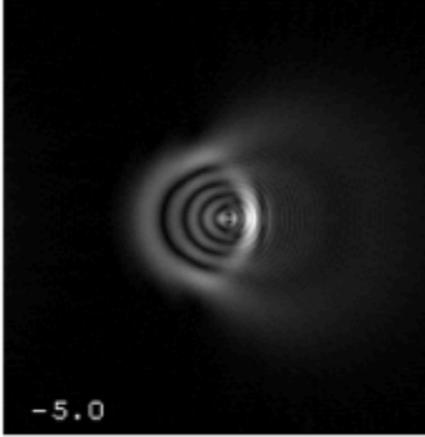
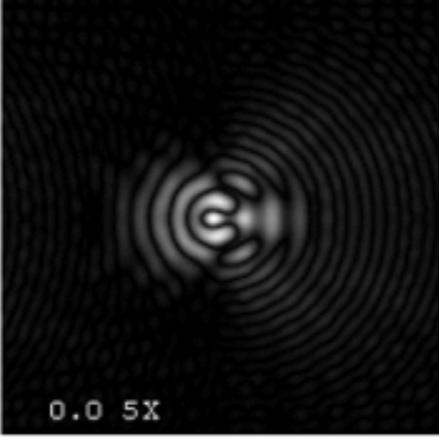
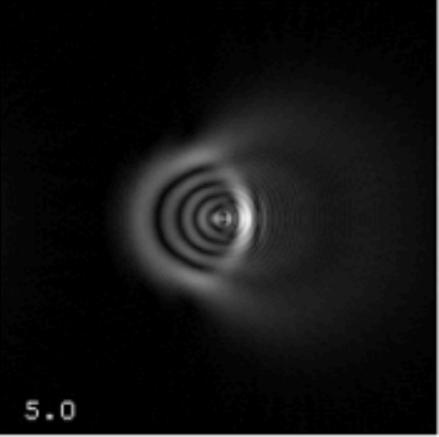
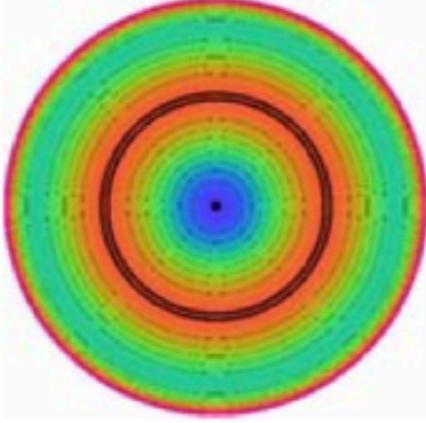
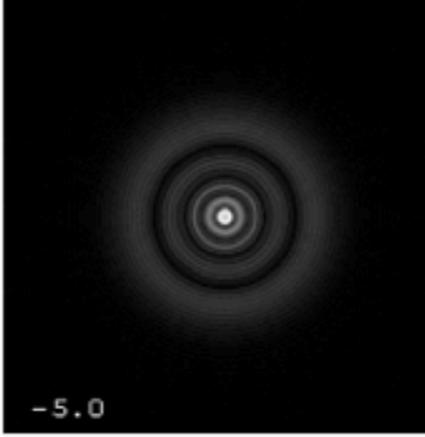
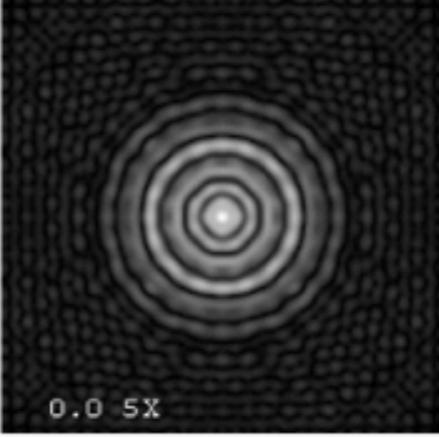
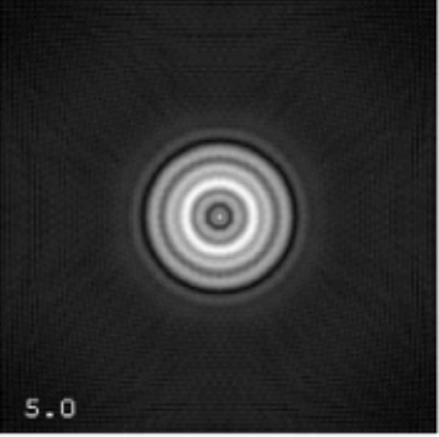
- Expression des polynômes:
- piston: $Z_1(r, \theta) = 1$
- basculements: $Z_2(r, \theta) = 2r \cos \theta$, $Z_3(r, \theta) = 2r \sin \theta$
- défocalisation: $Z_4(r, \theta) = \sqrt{3} (2r^2 - 1)$
- astigmatismes:

$$Z_5(r, \theta) = \sqrt{6} r^2 \sin(2\theta), \quad Z_6(r, \theta) = \sqrt{6} r^2 \cos(2\theta)$$

Zernike et effets sur l'image

N°	Type	Forme de l'onde	Effet
0	Piston	Plat parfait	« C'est parfait! »
1 & 2	Inclinaison		« Là, l'étoile n'est pas au centre. Commencez donc par la viser ! »
3	Mise au point		

<p>4 & 5</p>	<p>Astigmatisme N.B. Souvent lié aux contraintes mécaniques.</p>		 <p>-5.0</p>	 <p>0.0 5X</p>	 <p>5.0</p>
<p>6 & 7</p>	<p>Coma N.B.: Se règle parfois avec la collimation</p>		 <p>-5.0</p>	 <p>0.0 5X</p>	 <p>5.0</p>
<p>8</p>	<p>Sphéricité N.B.: C'est en générale le premier défaut du verre...</p>		 <p>-5.0</p>	 <p>0.0 5X</p>	 <p>5.0</p>

9 et 10	Trèfle		 -5.0	 0.0 5X	 5.0
11 et 12	Astigmatisme de 2ème ordre		 -5.0	 0.0 5X	 5.0
13 et 14	Coma de 2ème ordre		 -5.0	 0.0 5X	 5.0
15	Asphéricité de 2ème ordre		 -5.0	 0.0 5X	 5.0

FTO avec aberrations

- Toutes les aberrations sont exprimées sur la pupille du système (mais peuvent dépendre de la direction)
- Dans le domaine isoplanétique, les perturbations = différence de marche $W(u,v)$ dans la pupille
- Phase aberrante: $\phi(x_0, y_0) = 2\pi / \lambda * W(x_0, y_0)$
- Amplitude complexe du champ dans la pupille:

$$U(x_0, y_0) = \exp [i \phi(x_0, y_0)] \text{ si } [(x_0, y_0) \in \text{pupille}]$$

$$U(x_0, y_0) = 0 \text{ si } [(x_0, y_0) \notin \text{pupille}]$$

- Fonction de transfert optique = autocorrélation du champ dans la pupille

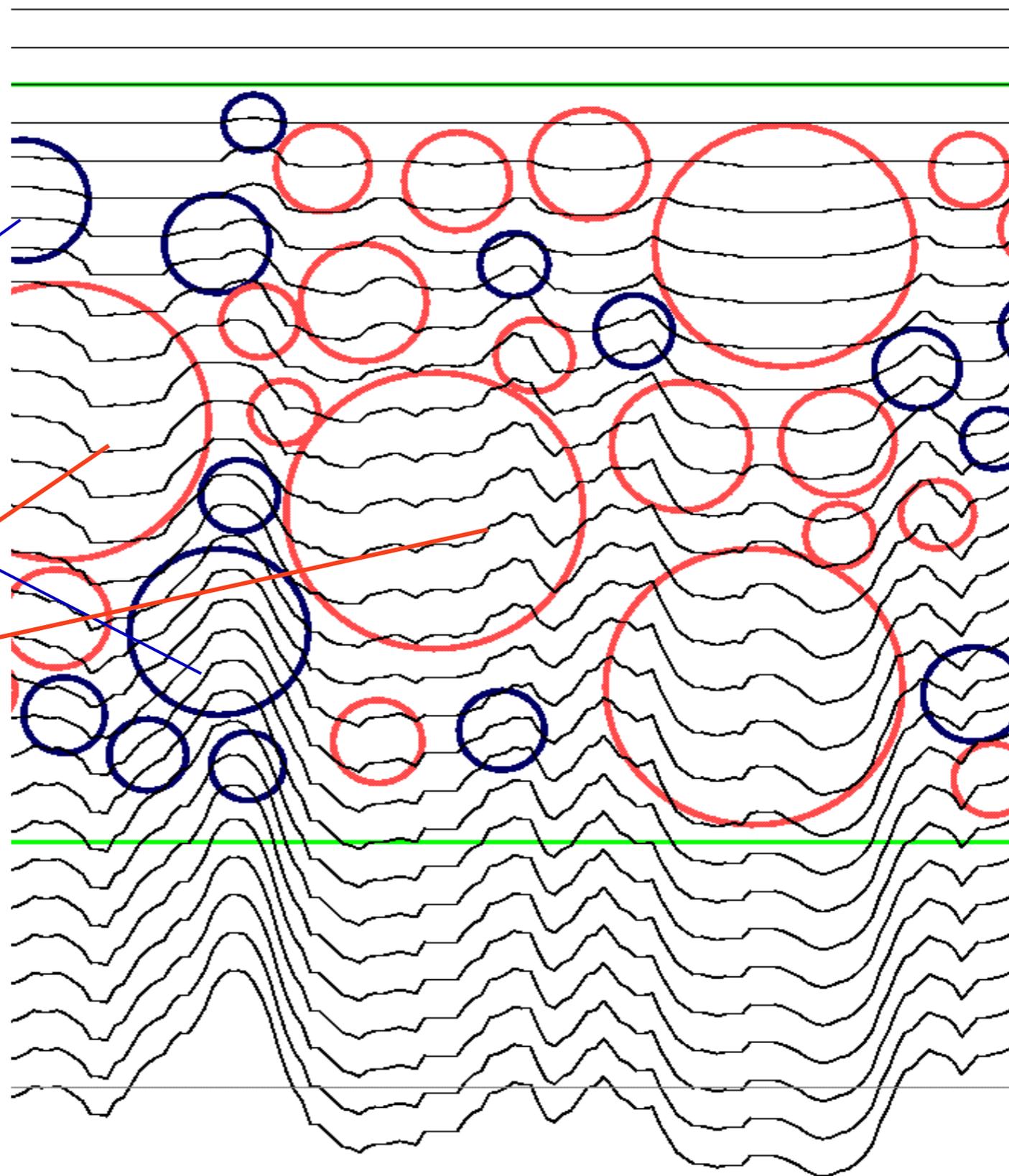
$$FTO(x, y) = \iint U(x', y')^* \cdot U(x' - x, y' - y) dx dy$$

$$FTO(x, y) = \oint \oint_{\text{pupille}} \exp [i (\phi(x' - x, y' - y) - \phi(x', y'))] dx dy$$

- En découpant par la pensée la pupille en N sous pupilles, les erreurs de phase se traduisent par des décalages des systèmes de franges d'interférence qui se superposent
- L'image est brouillée...

Air froid

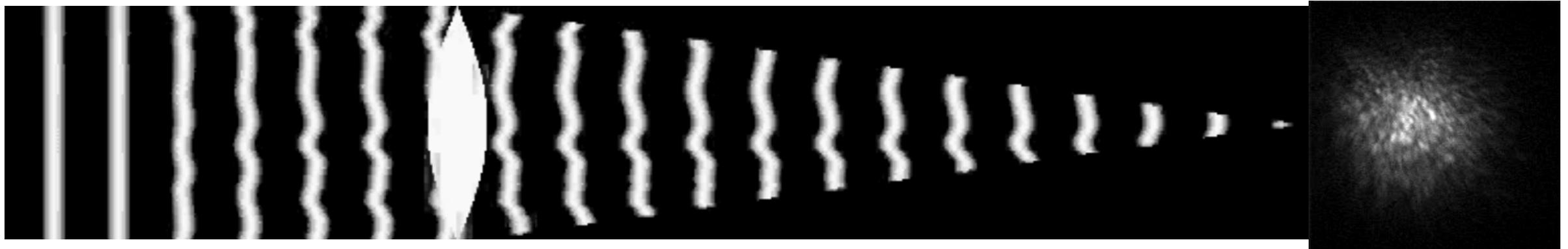
Air chaud



Fluctuations spatiales de la température donnent des fluctuations de l'indice n
car loi de Gladstone : $n-1 = K\rho$ où ρ est la masse volumique

Dégradation atmosphérique des images

- L'atmosphère introduit de la « **complexité** » dans un front d'onde
- Cela diminue sa **cohérence spatiale et temporelle** (un signal aléatoire possède une cohérence nulle)
- L'atmosphère agit comme un **masque de phase variable**

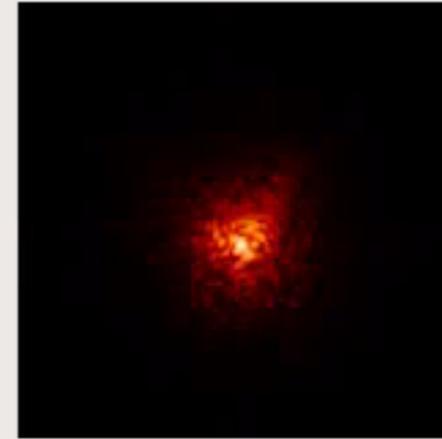
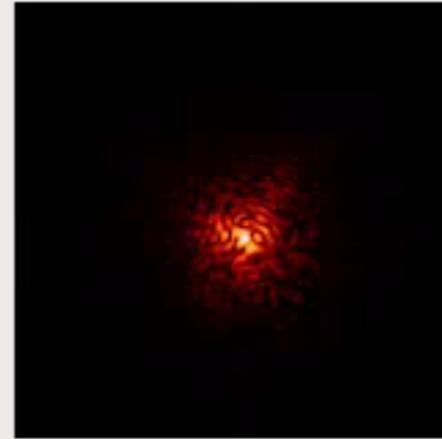
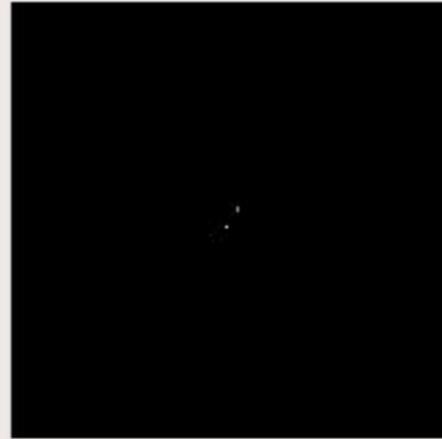


Objet

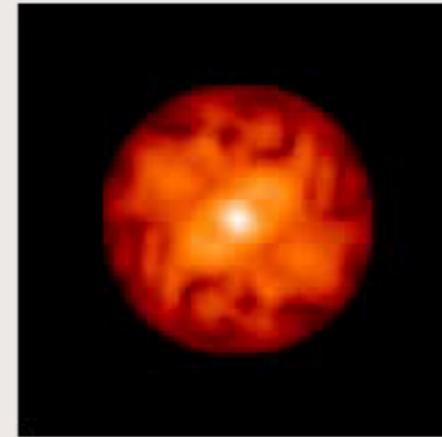
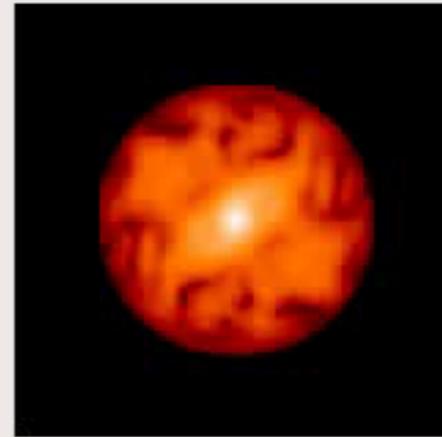
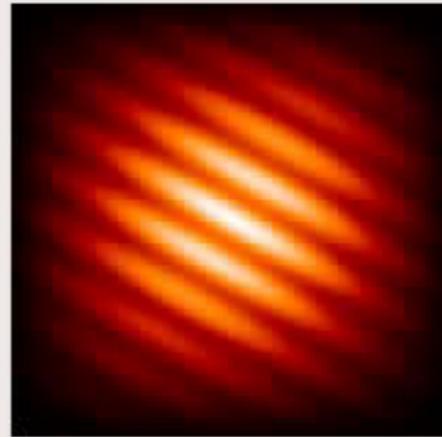
*

FEP =

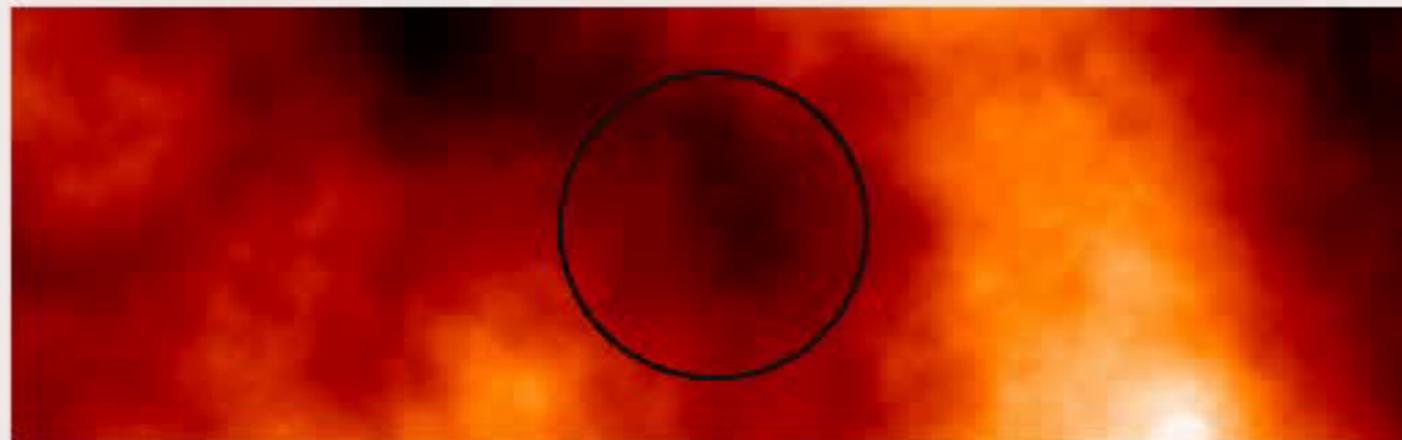
Image



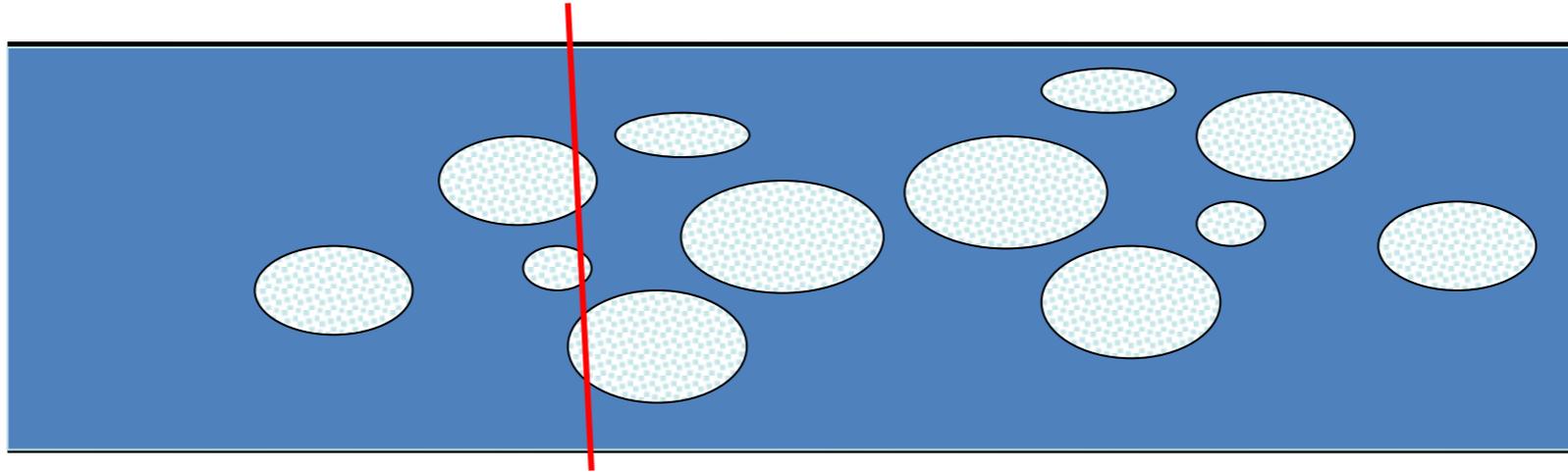
Domaine de
Fourier



Phase turbulente



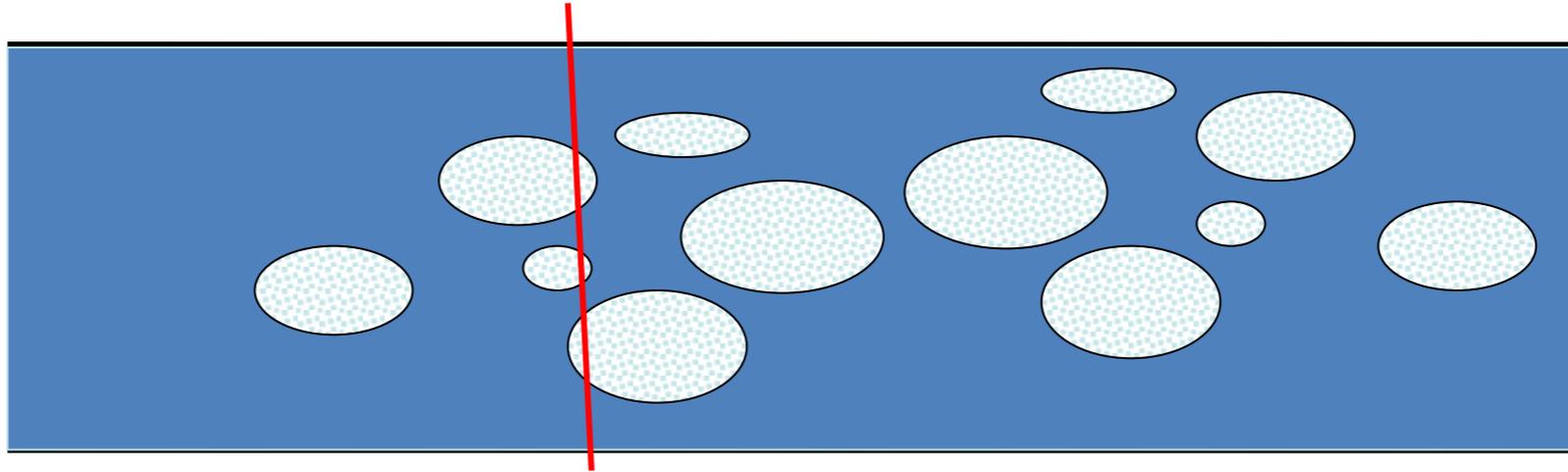
Variance de phase



- On suppose une observation faite durant un temps τ court devant τ_c le temps d'évolution caractéristique de la turbulence
- le **déphasage** introduit le long d'un rayon à la position x,y est :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \int_h^{h+\Delta h} n(x, y, z) dz$$

Variance de phase



- La FTO est une intégrale:

$$FTO(x, y) = \iint_{\text{pupille}} \exp [i (\phi(x' - x, y' - y) - \phi(x', y'))] dx dy$$

- Si on divise la pupille en cellules (on échantillonne la FTO), sur laquelle ϕ est \approx constante, chaque sous-pupille étant indépendante, alors à une fréquence donnée sera:

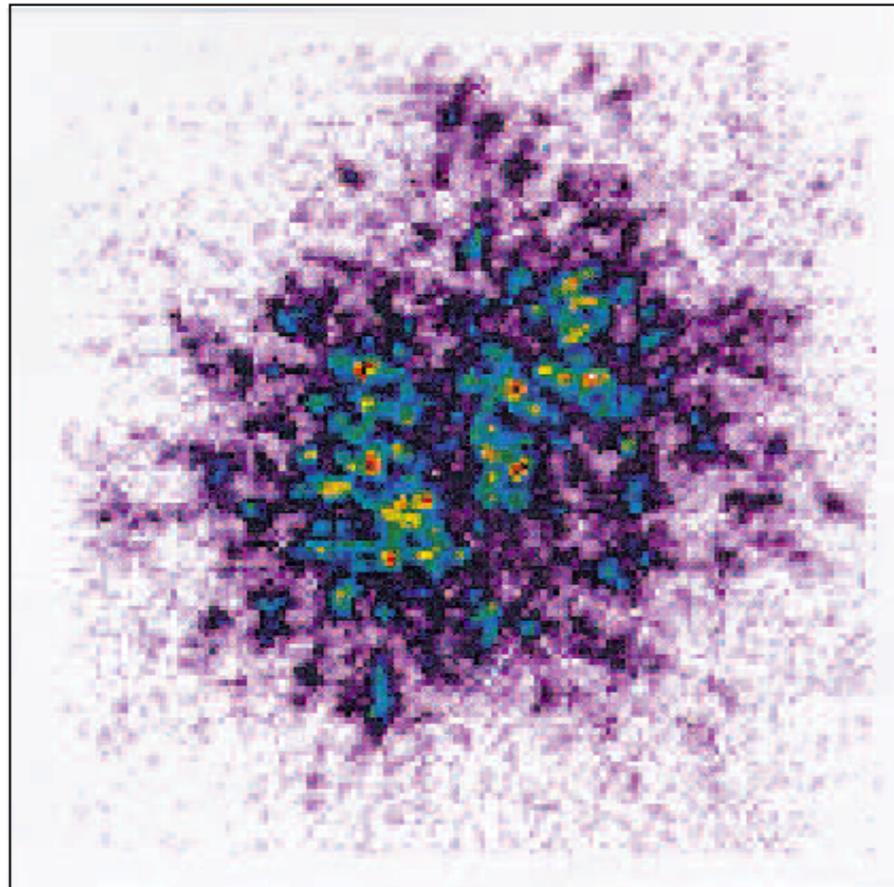
$$\sum \exp(j\phi_i) \approx \langle \exp(j\phi) \rangle$$

- On montre que :

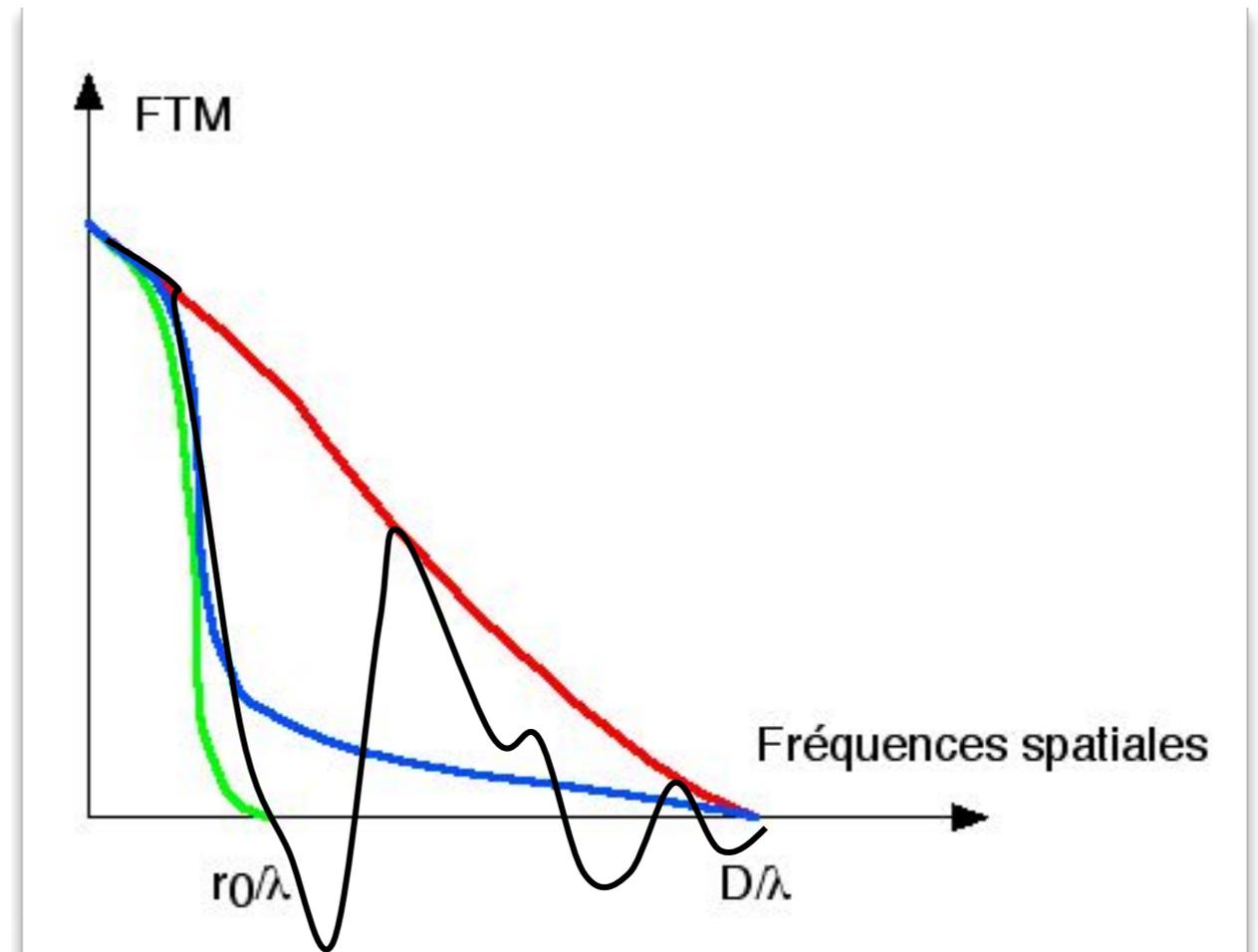
$$\langle \exp(j\phi) \rangle = \exp(- \langle \phi^2 \rangle / 2) = \exp(-\sigma^2(\phi)/2)$$

FEP et FTO en courte pose

- le spectre contient des **hautes fréquences** qui se traduisent par une structuration de l'image en petites tavelures (*speckles*) de taille caractéristique λ/D

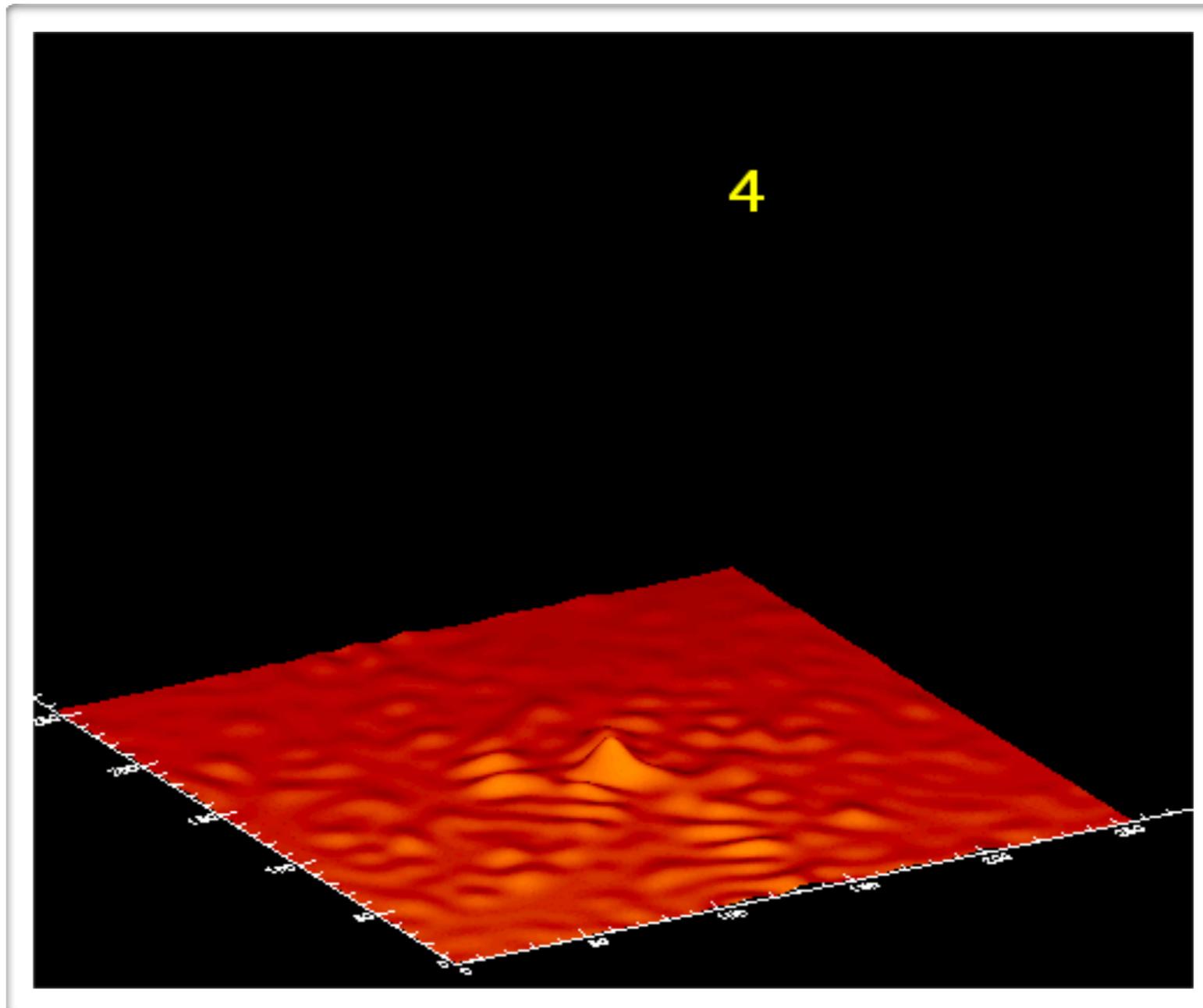


λ/r_0



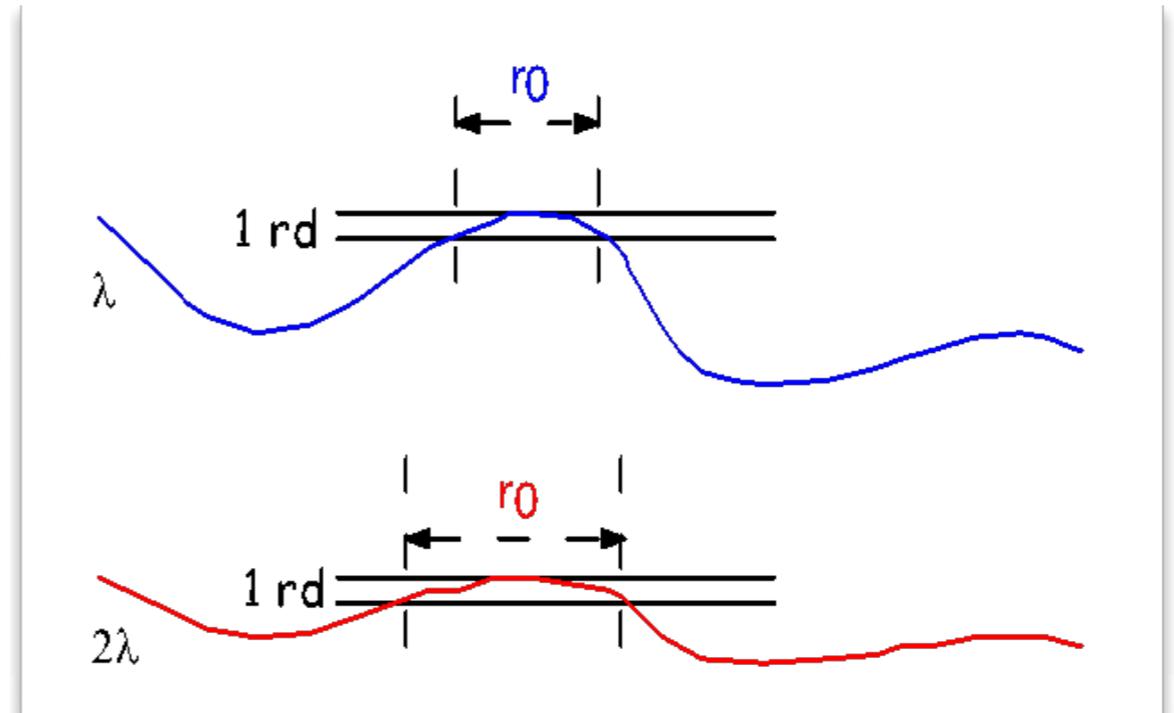
FEP et variance de phase

- Conséquence : l'intensité maximum dans la tache image est $\propto \exp[-\sigma^2(\phi)/2]$
Il y a une **dégradation exponentielle** du pic en intensité avec la variance de phase, donc avec la **force de la turbulence**



Le paramètre de Fried r_0

- C'est le diamètre du télescope qui en l'absence de turbulence donne des images de même résolution qu'un télescope "infini" en présence de turbulence
- Equivalent : le diamètre de la cellule sur laquelle la variance de phase est $\approx 1 \text{ rad}^2$
- $r_0 = 0,185 \lambda^{6/5} (\cos z)^{3/5} (\int C_n^2(h) dh)^{-3/5}$
- $C_n^2(h)$: constante de structure de l'indice, essentiellement achromatique (n dépend peu de λ)



r_0 croît comme $\lambda^{6/5}$ et décroît comme (masse d'air) $^{-3/5}$

– Typiquement :

$$r_0 = 10 \text{ cm @ } 550 \text{ nm ;}$$

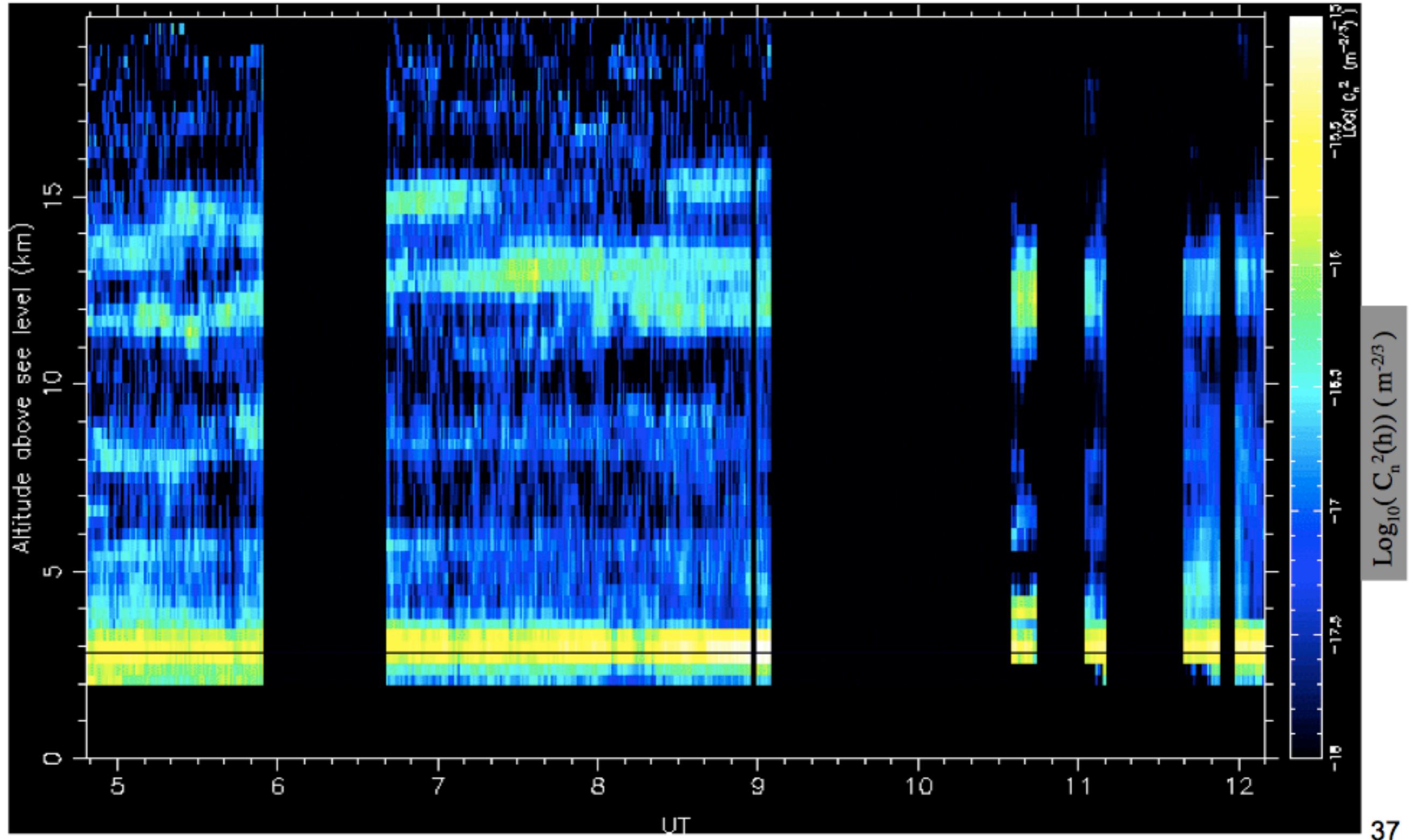
$$r_0 = 55 \text{ cm @ } 2,2 \mu\text{m}$$

– r_0 croît plus vite que λ donc $\theta = \lambda/d = \lambda/r_0$ décroît avec λ : le "seeing" s'améliore (doucement) avec la longueur d'onde

– Erreur de phase : $\sigma_\phi^2 = 1,0 (D/r_0)^{5/3}$; D = diamètre du télescope \Rightarrow

Il sera plus difficile de corriger un grand télescope

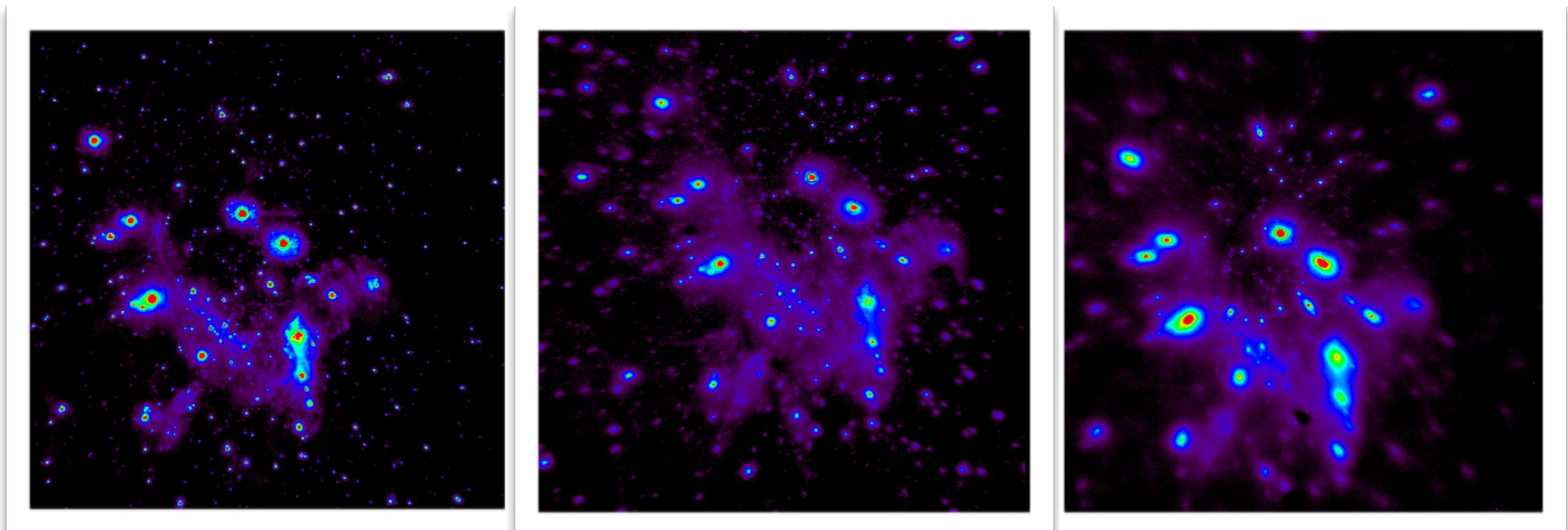
Avila et al. 1998



Comportement temporel de la turbulence

- **Hypothèse de Taylor** : la turbulence est "gelée" et les écrans de phase défilent à la vitesse du vent V sur le faisceau
- Conséquence : à une fréquence spatiale k va correspondre une fréquence temporelle $\nu = V k$ d'autant plus élevée que V est grand : l'agitation des images est d'autant plus rapide
- On caractérise le temps d'évolution de l'atmosphère par la constante de temps $\tau_0 = r_0 / V$

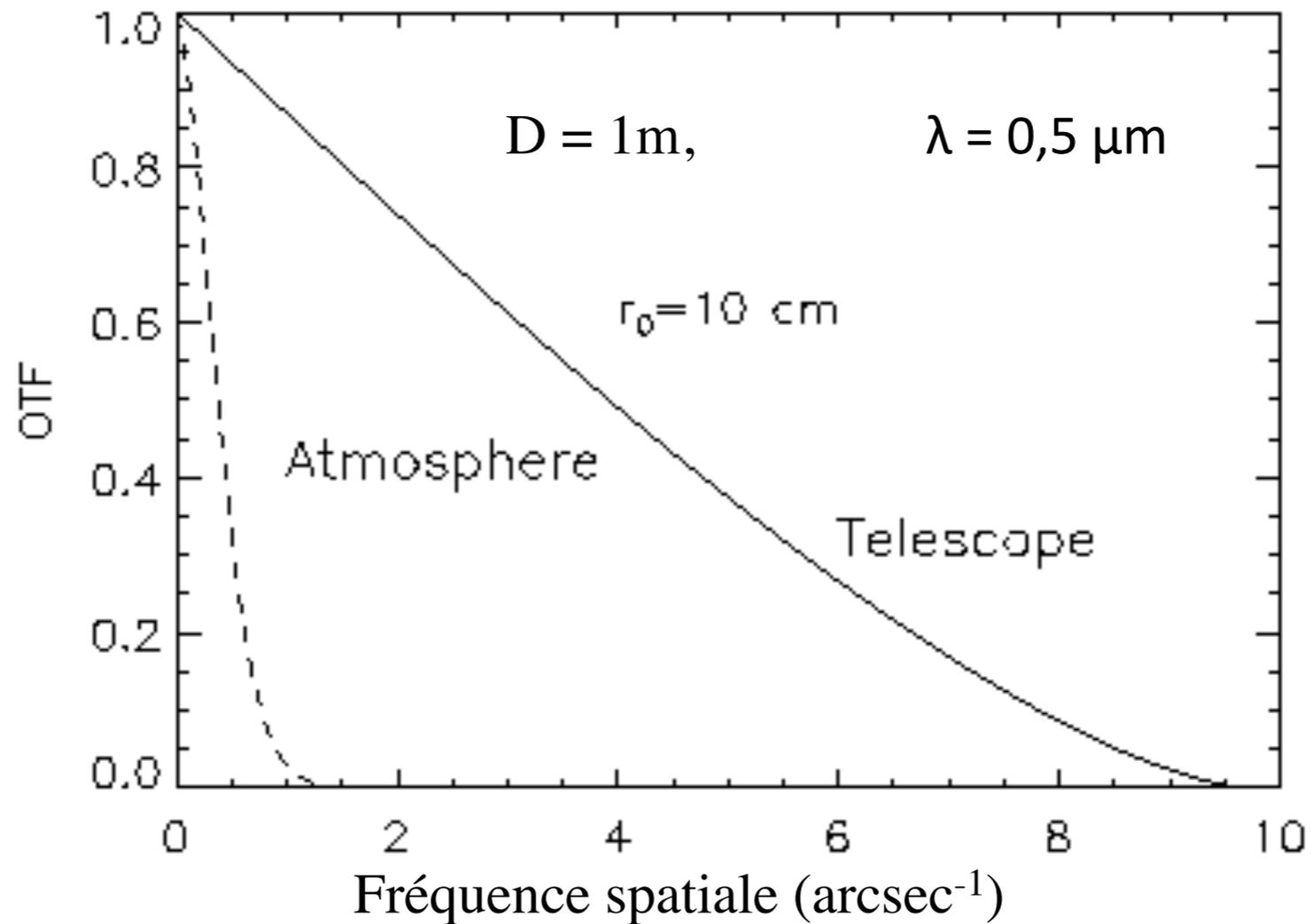
dégradation en optique adaptative quand τ_0 diminue



FTO en longue pose

- L'atmosphère introduit une fonction de transfert de modulation

devant le télescope: $FTO_{\text{totale}} = FTO_{\text{atmo}} \times FTO_{\text{telescope}}$

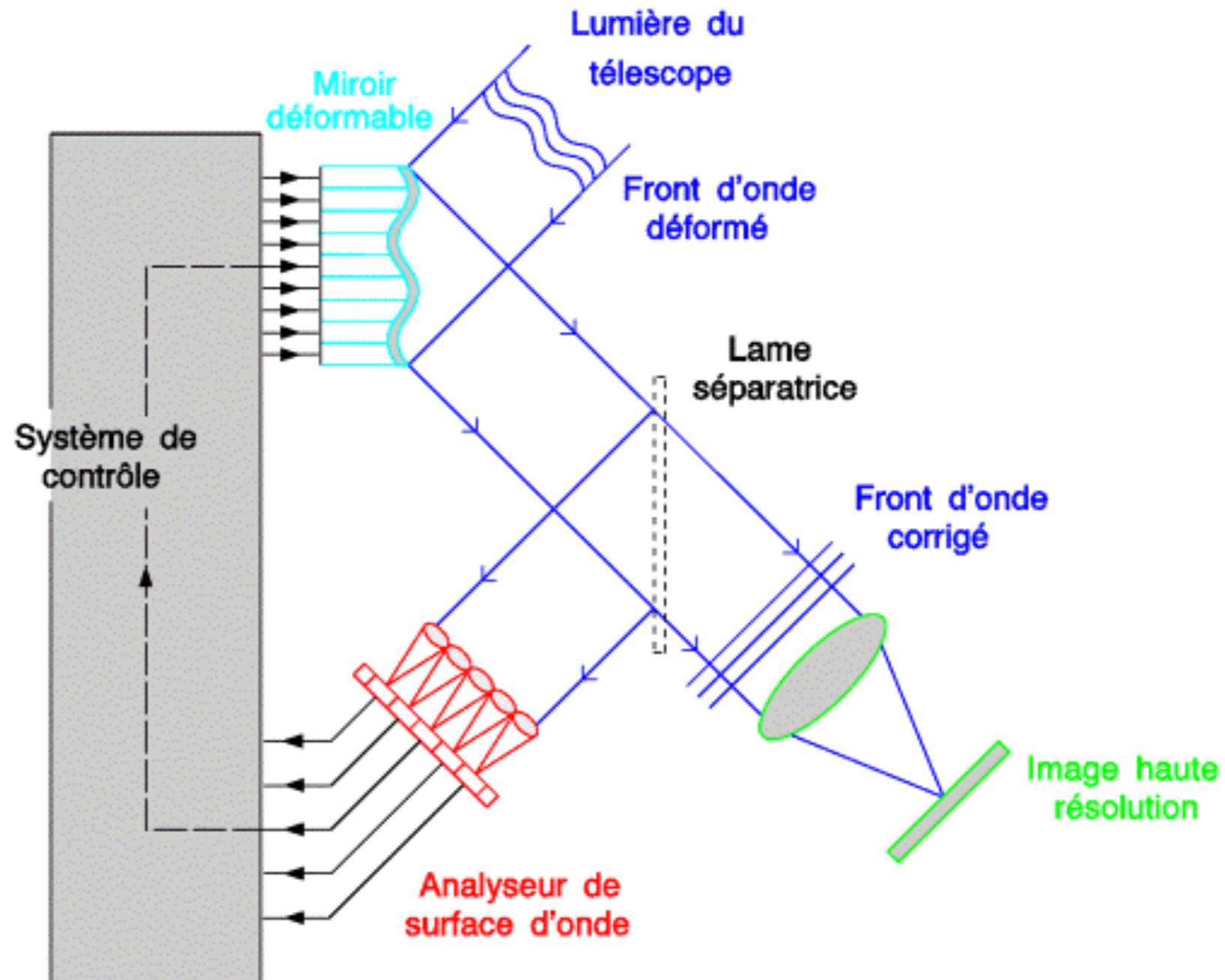




Optique adaptative

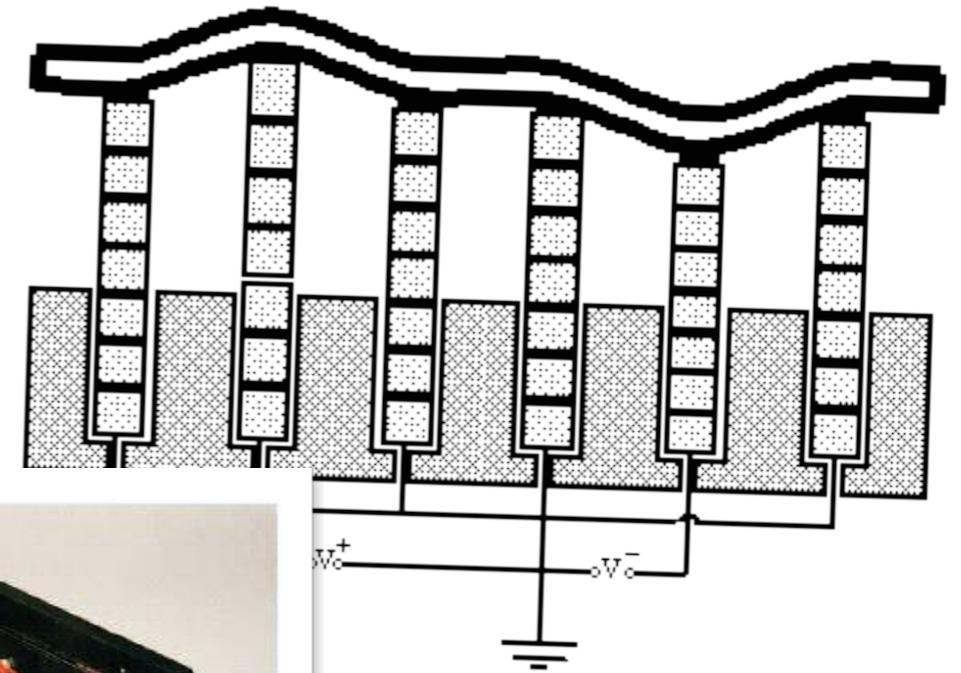
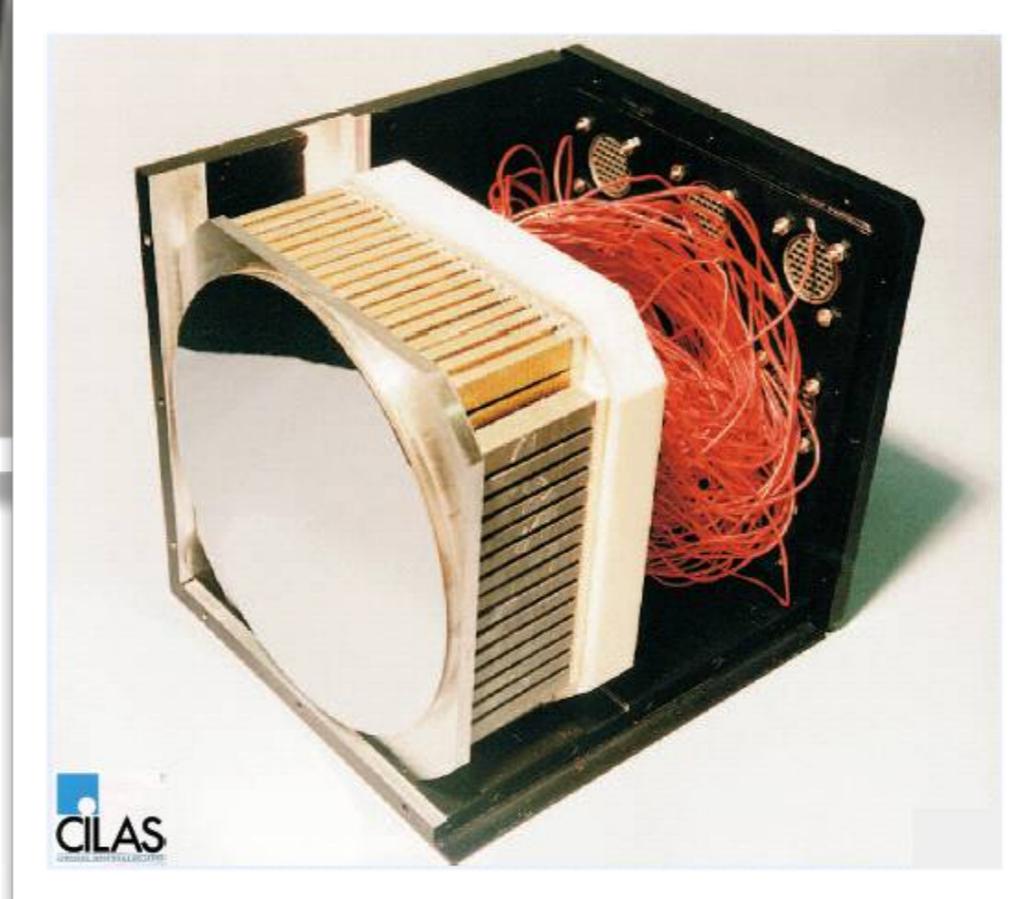
Principe de l'optique adaptative

- L'optique adaptative est une technique qui permet de **compenser les variations de phase** du front d'onde introduites par l'atmosphère grâce à un **miroir déformable** et ainsi de **reconstituer sa cohérence**

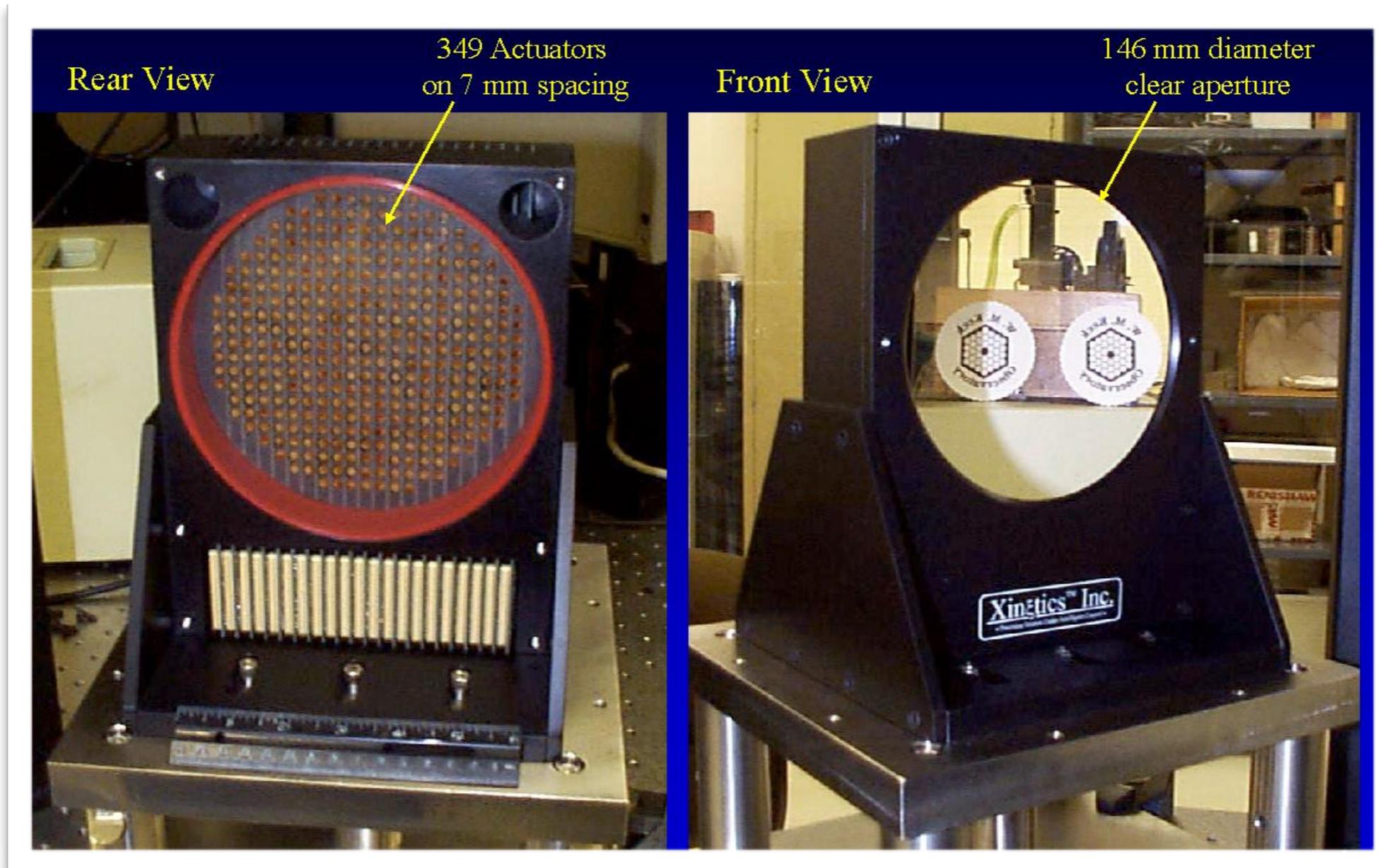


Miroir déformable

- Plusieurs technologies existent. La plus courante est basée sur des **actionneurs piezo-électriques** placés sous une membrane flexible.



Miroir déformable du télescope Keck



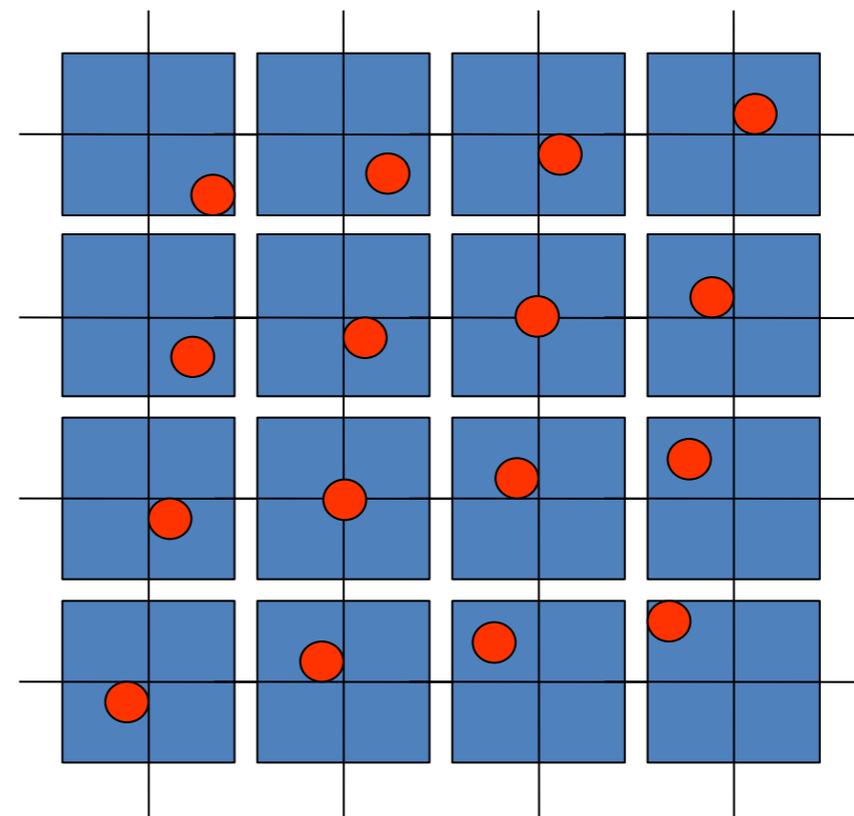
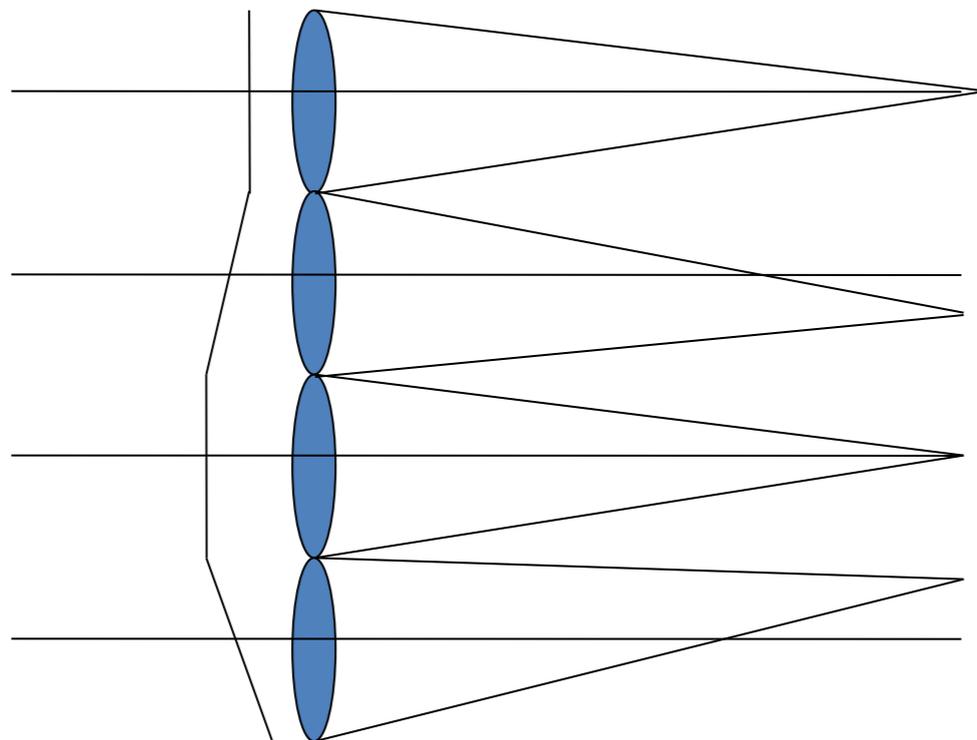
Comment le nombre d'actuateurs est-il lié à la taille du télescope et au paramètre de Fried r_0 ?

Analyseur de surface d'onde

- Le type le plus courant s'appelle « **Shack-Hartmann** » (SH)
- Fractionnement de la pupille : matrice de micro-lentilles
- Chaque lentille donne une imagerie de l'étoile de référence sur un CCD
- Mesure du centre de gravité de la tache-image sur chaque image individuelle du SH, qui donne l'angle local d'arrivée du front-d'onde

$$\alpha = 1/f \cdot \sum x_i I_i / \sum I_i ; \quad \beta = 1/f \cdot \sum y_i I_i / \sum I_i$$

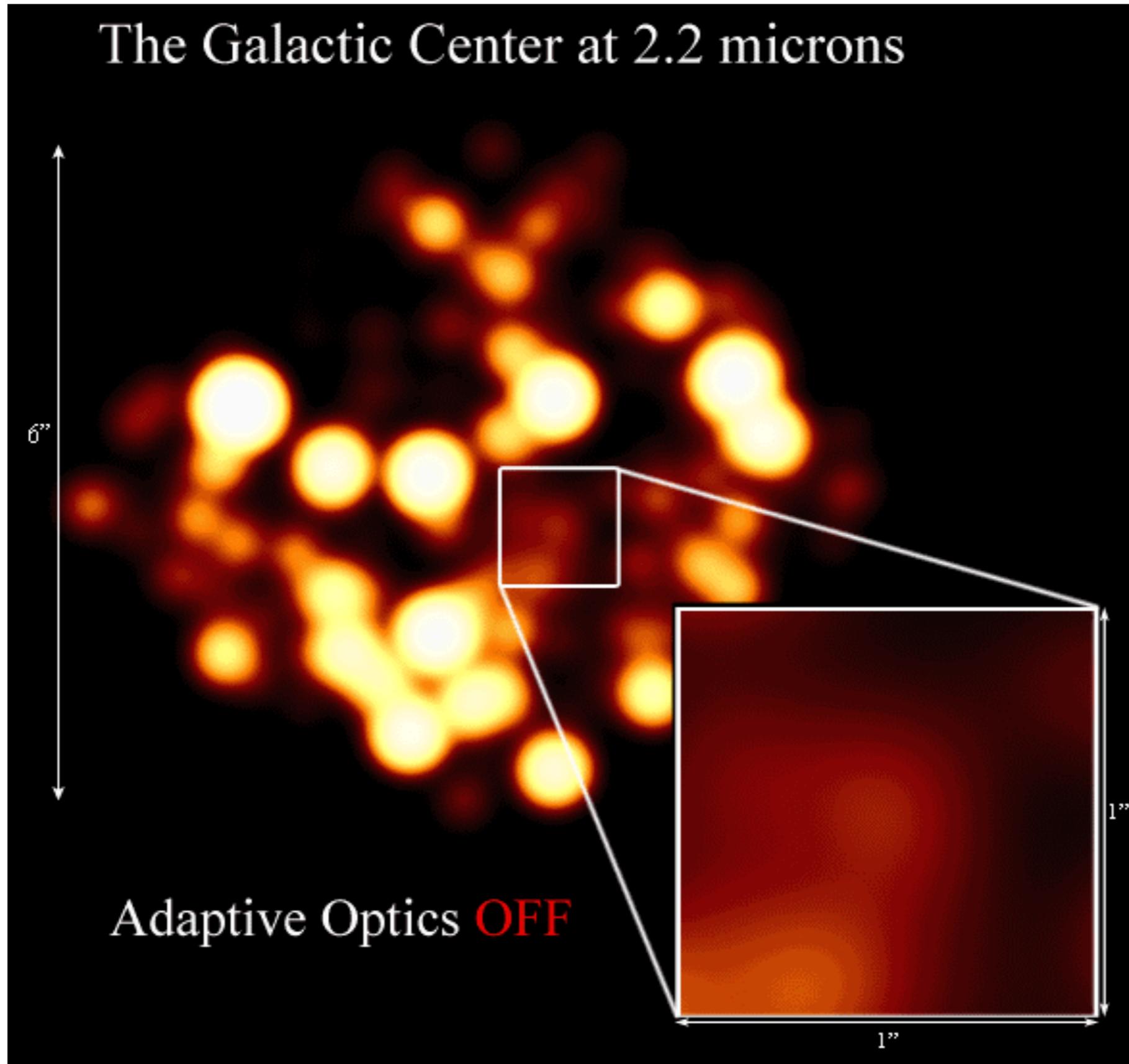
- Au moins 4 pixels par sous-pupille



Effet sur les images astronomiques



Effet sur les images astronomiques

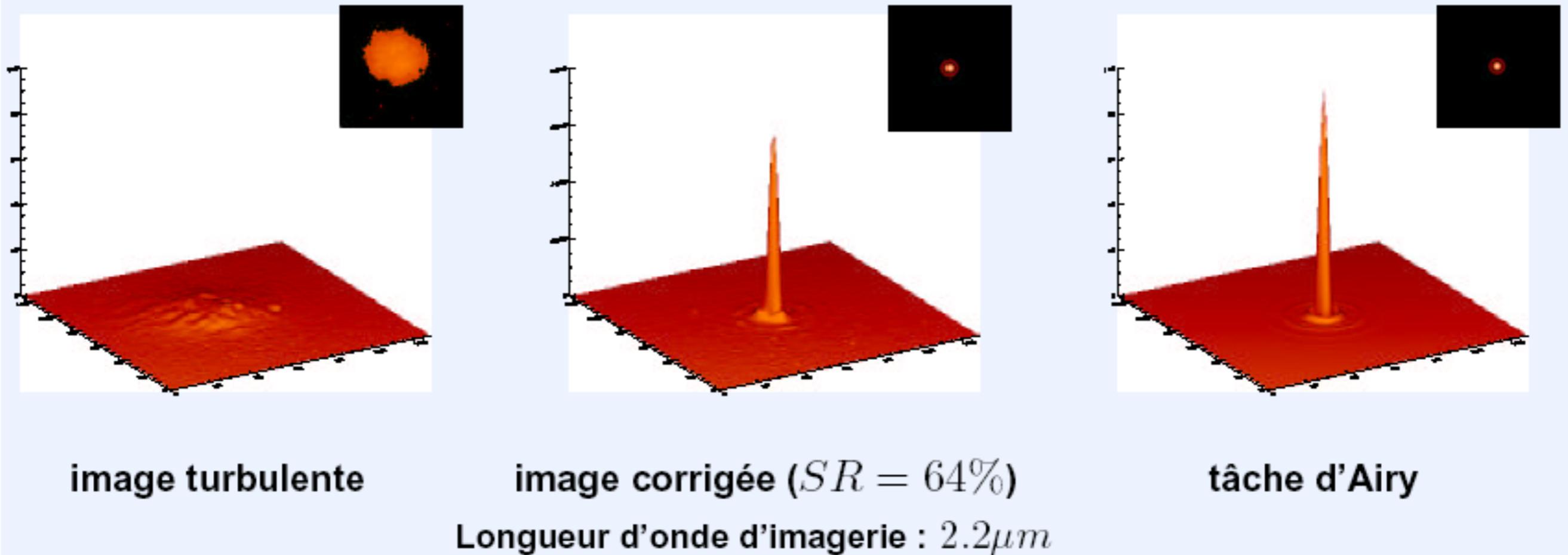


Le rapport de Strehl S_0

- Le **rapport de Strehl** S_0 permet de quantifier la qualité de la correction apportée par une optique adaptative

$$S = \frac{FEP_{\text{observe}}(0)}{FEP_{\text{ideal}}(0)}$$

- On a par ailleurs: $S_0 \sim (r_0/D)^2$ pouvez-vous expliquer pourquoi ?



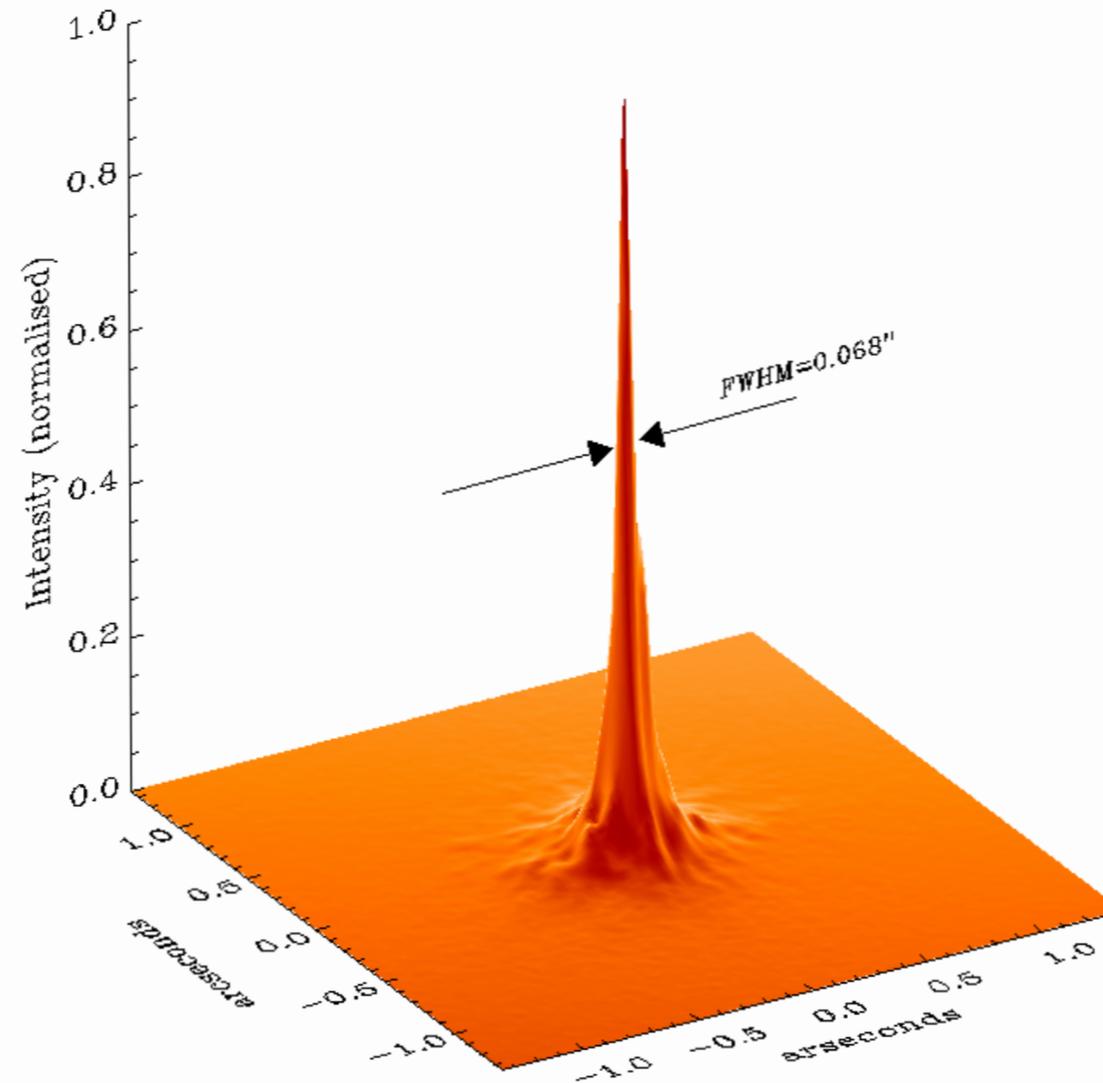
PUEO

CFHT adaptive optics bonnette.

I band

Magnitude=8.6

$D/r_0 = 9.4$

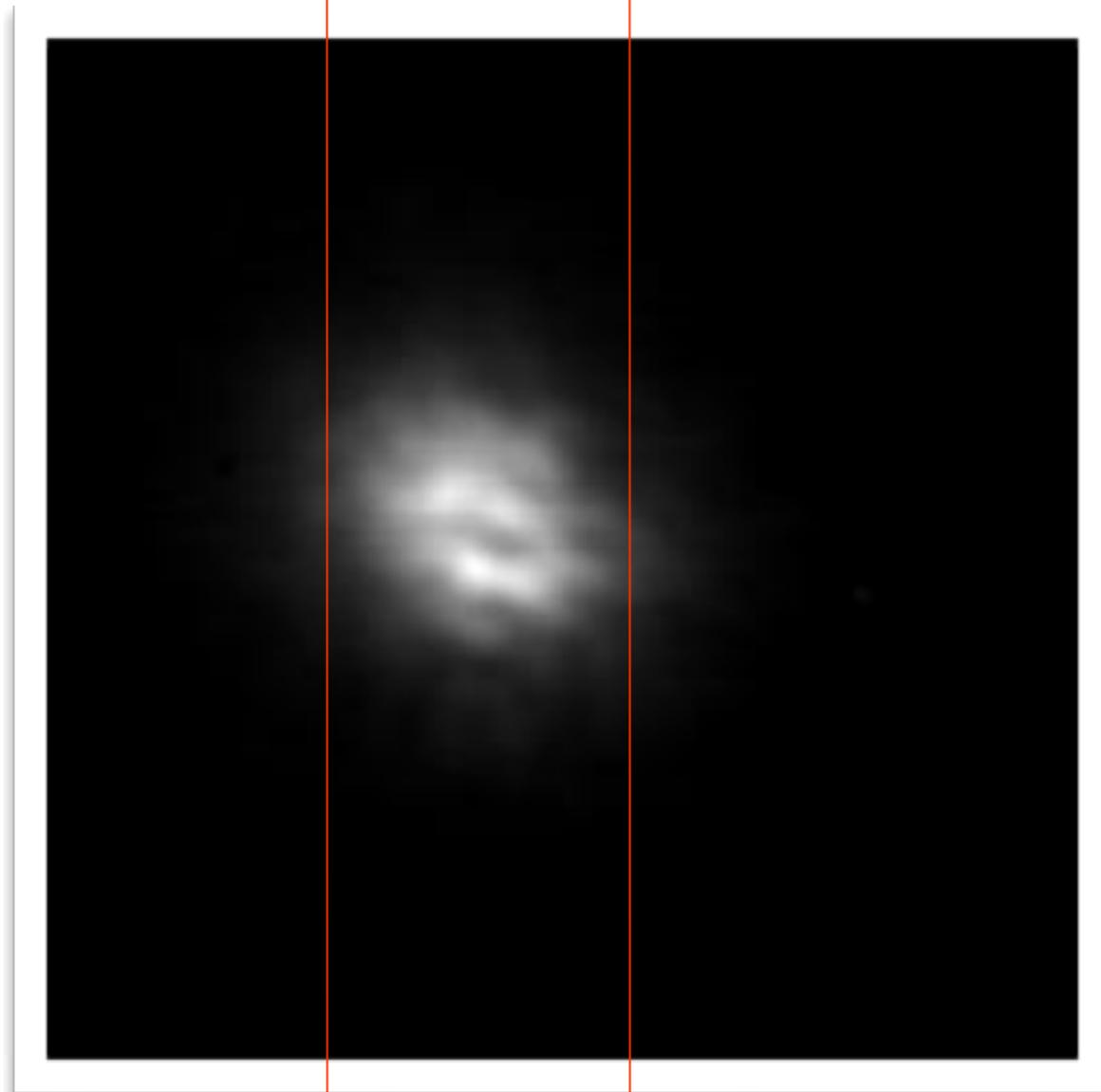


PUEO is a joint collaboration between CFHT/DAO/CILAS/DESPA.

- Si la largeur à mi-hauteur de l'image d'une étoile diminue d'un facteur 2, comment varie le rapport de Strehl ?
- Si on impose un déphasage de π à la moitié de la pupille, que devient le rapport de Strehl ?

Amélioration des images

0,4"



Meilleure image VLT
atmosphérique

0,04"

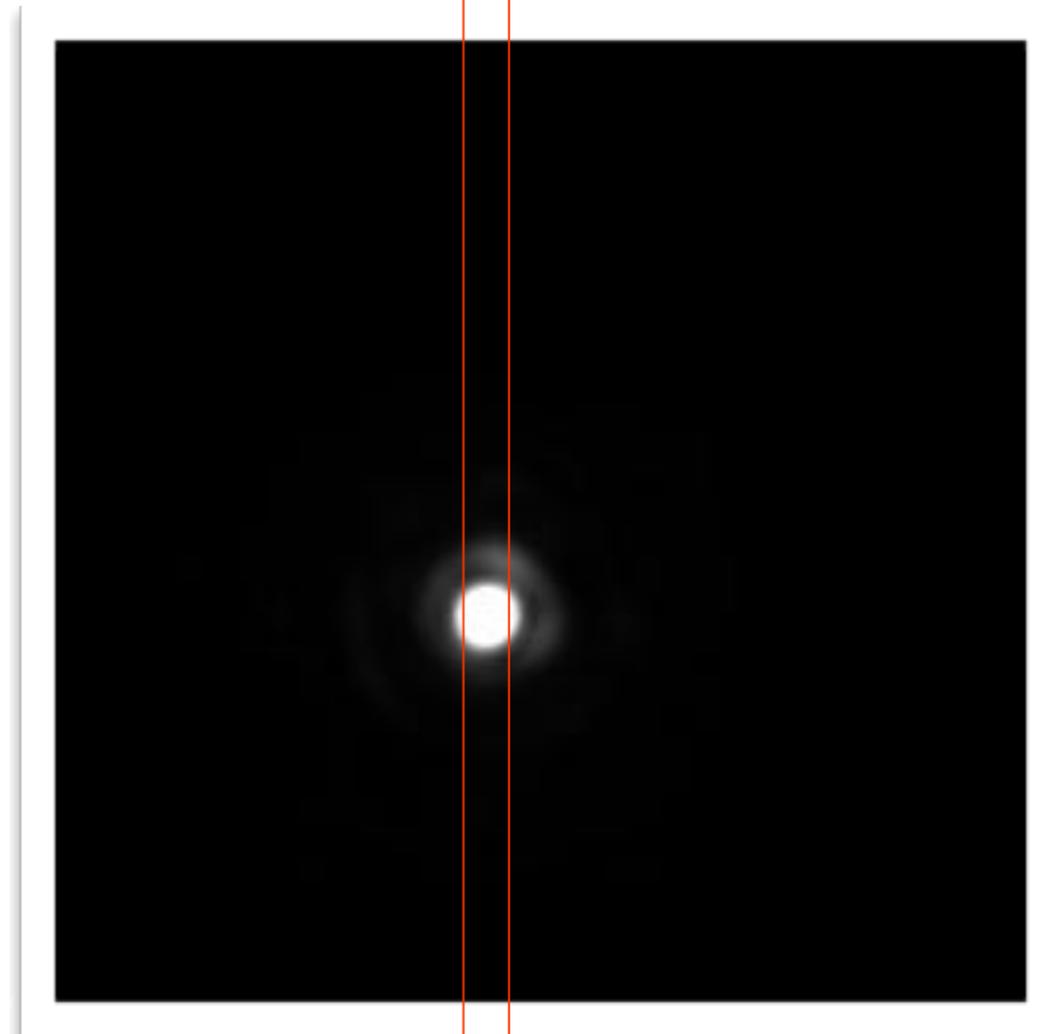
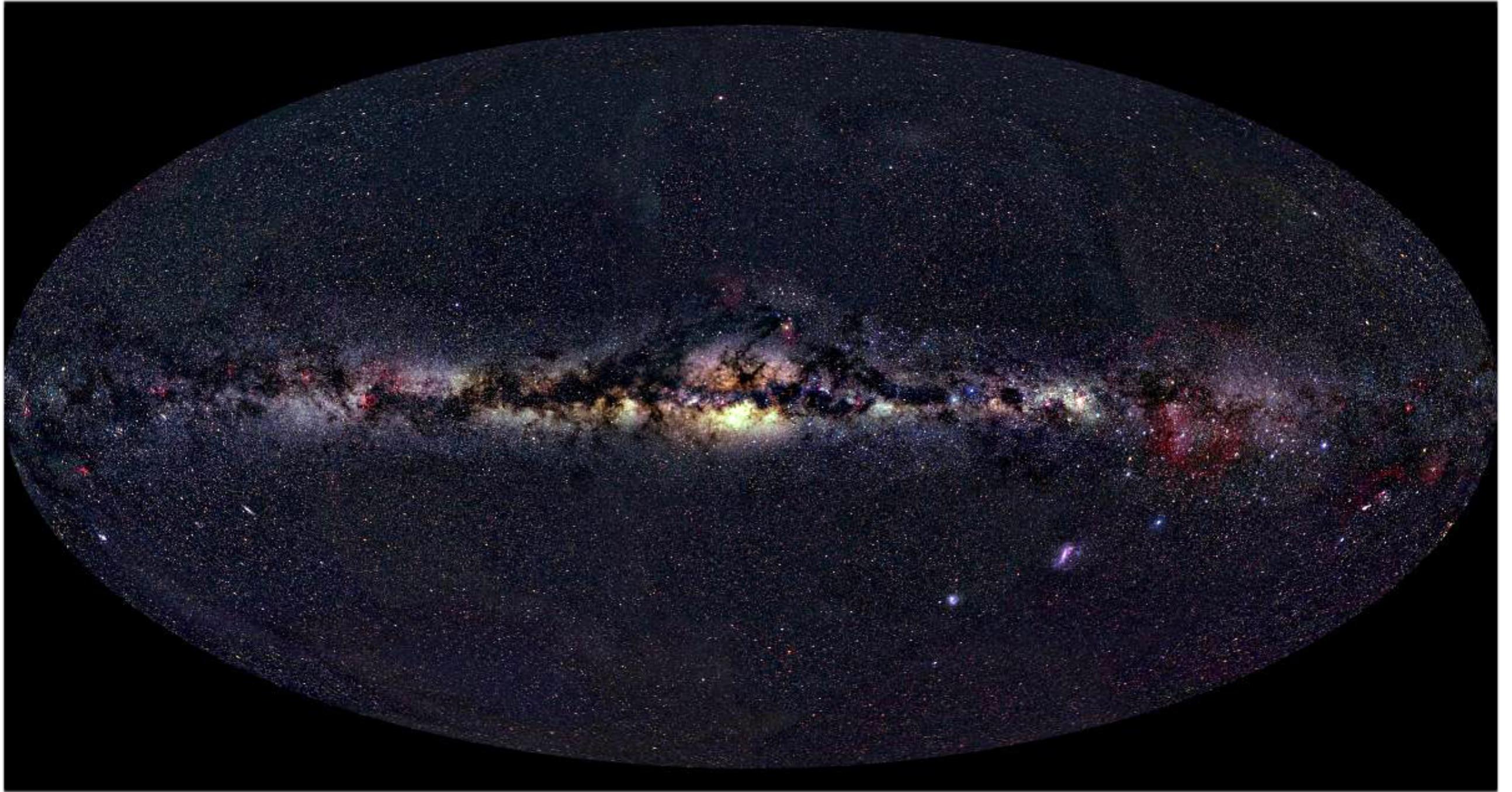


Image VLT+NAOS à 2,2 μm

L'étoile de référence

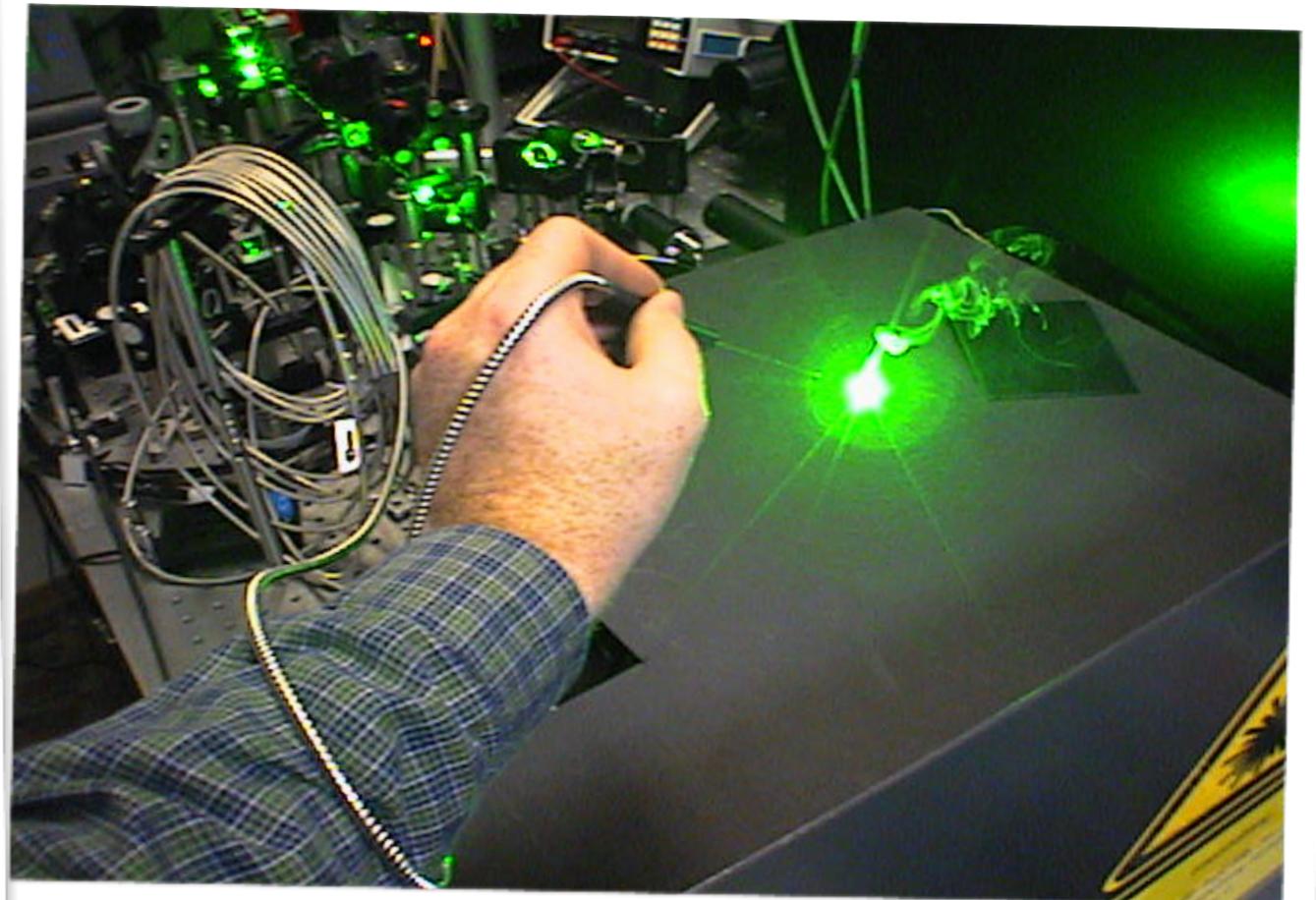
- Pour reconstituer le front d'onde originel, le système d'OA doit utiliser une source de référence
- Elle est d'autant meilleure qu'elle est en principe parfaitement **cohérente**, c'est-à-dire ponctuelle
 - mais un ASO de type Shack-Hartmann n'y est que peu sensible (*pourquoi ?*)
- Les **étoiles** sont de très bonnes sources de référence pour l'ASO, mais elles doivent être assez brillantes
- La fraction du ciel observable est **faible**: de l'ordre de 1 à 10% seulement ! De plus, la couverture dépend de la **latitude galactique**

L'étoile de référence



Etoile artificielle

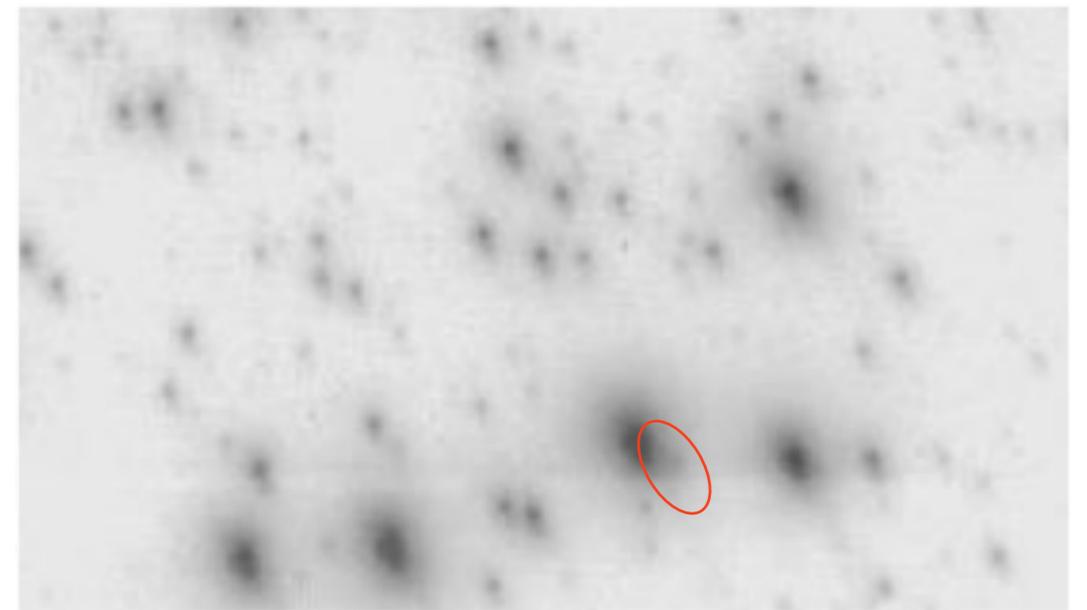
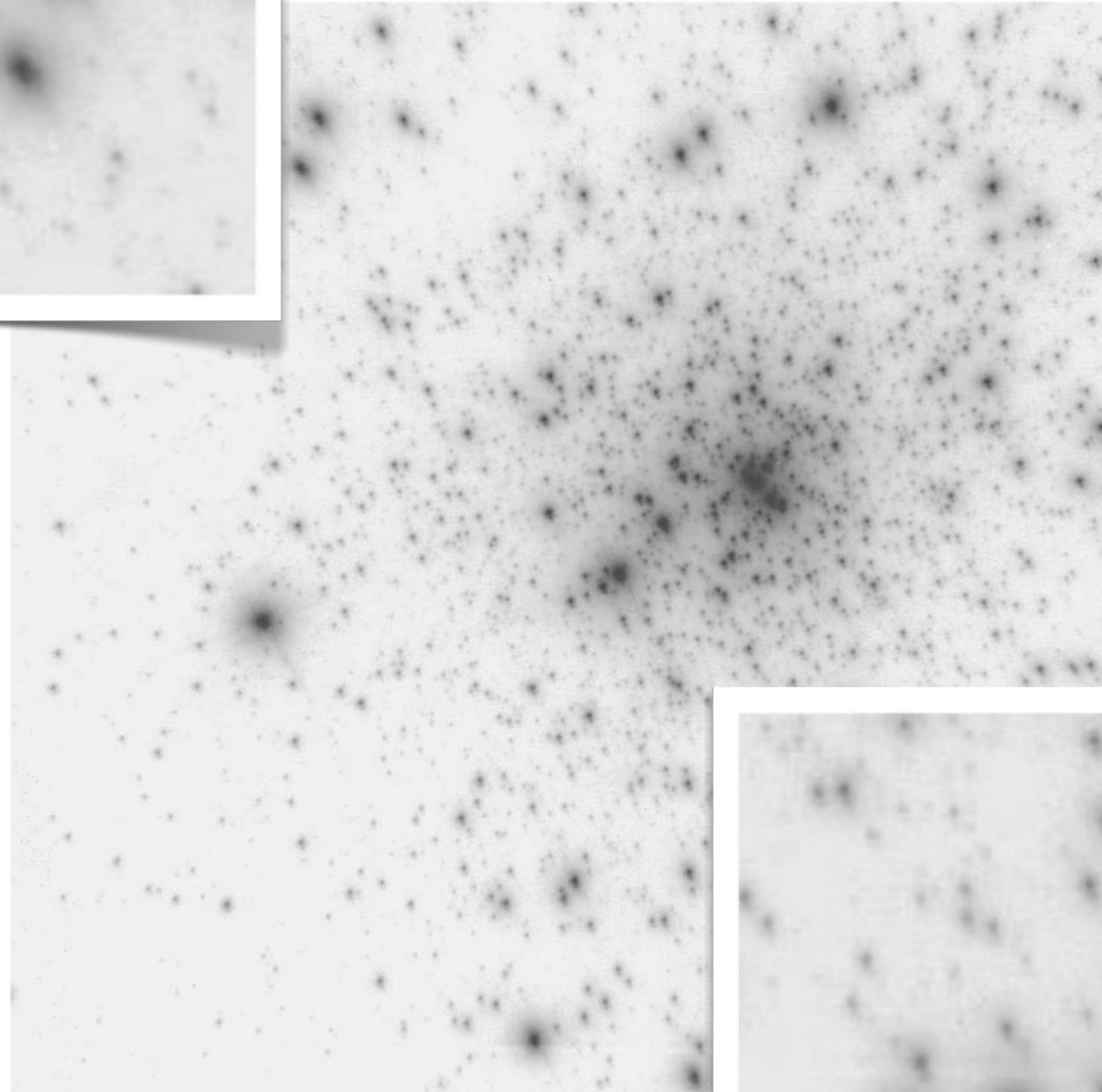
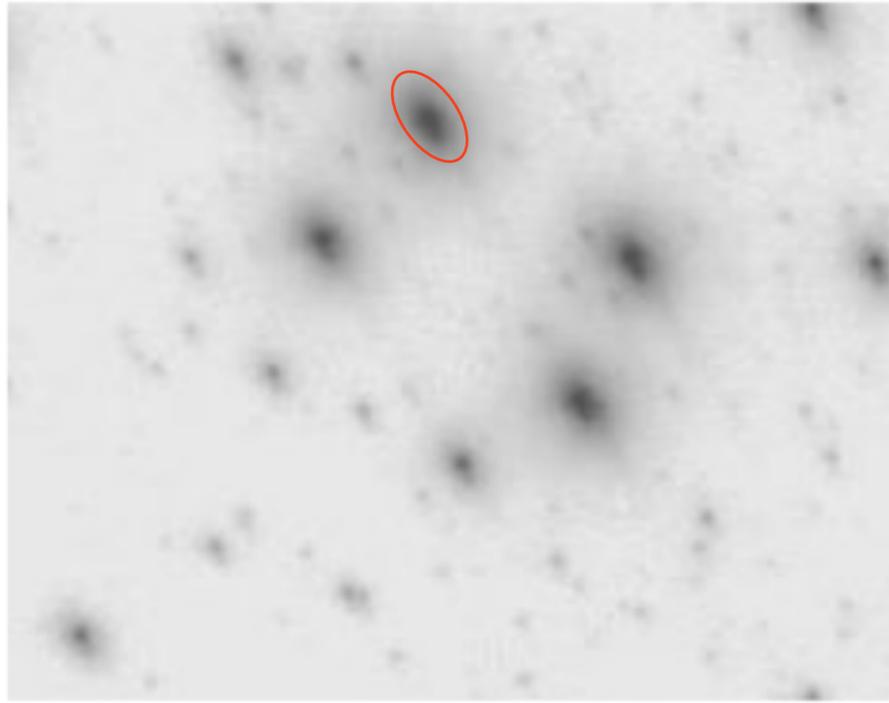
- Face au manque d'étoiles de références, on peut en créer une !
- On utilise pour cela la couche de sodium de l'atmosphère terrestre, et un laser puissant pour créer une étoile artificielle qui sera utilisée comme référence pour l'OA
- Ce système ne permet pas de corriger le basculement du front d'onde (*tip-tilt*) et la source de référence créée n'est pas ponctuelle



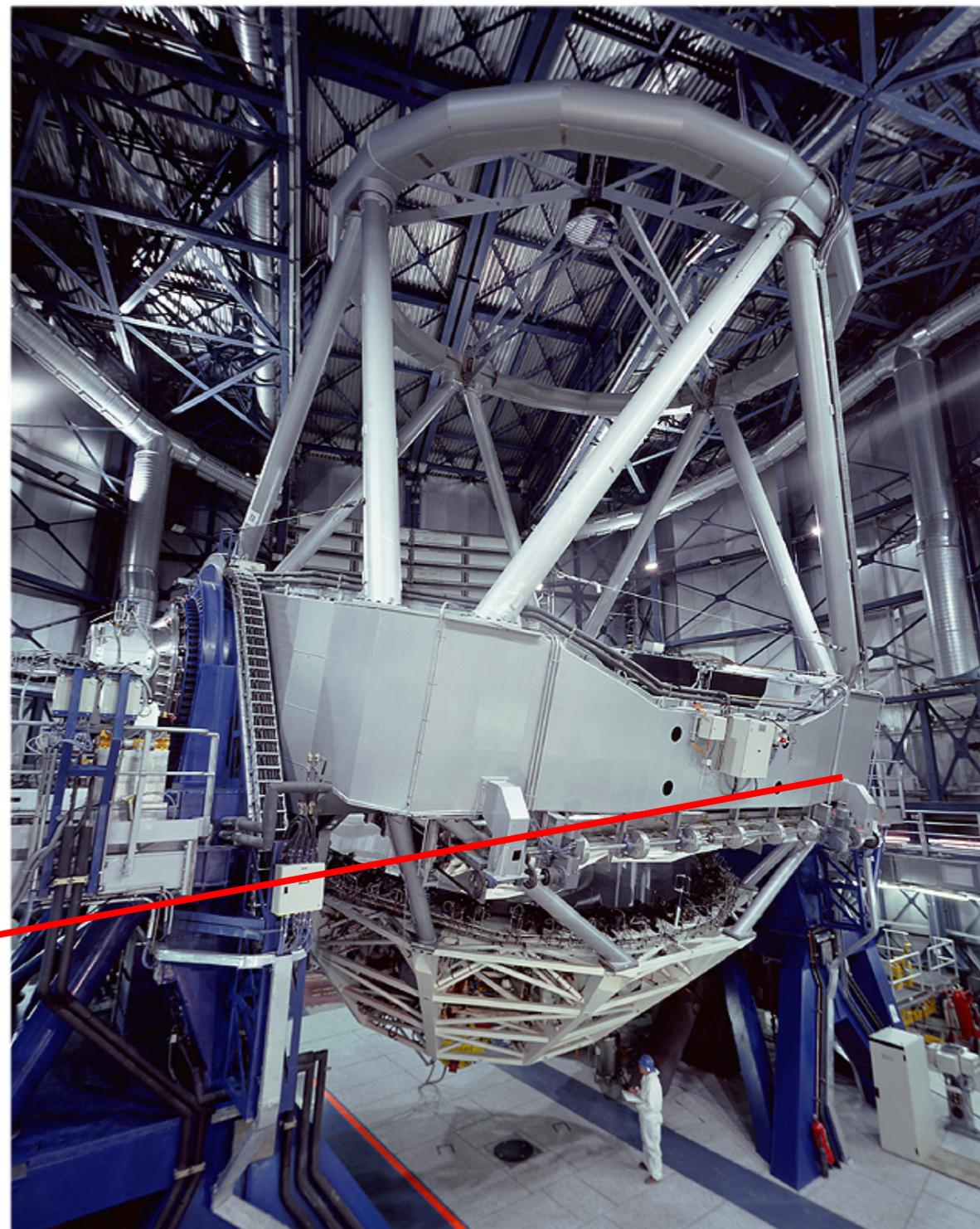
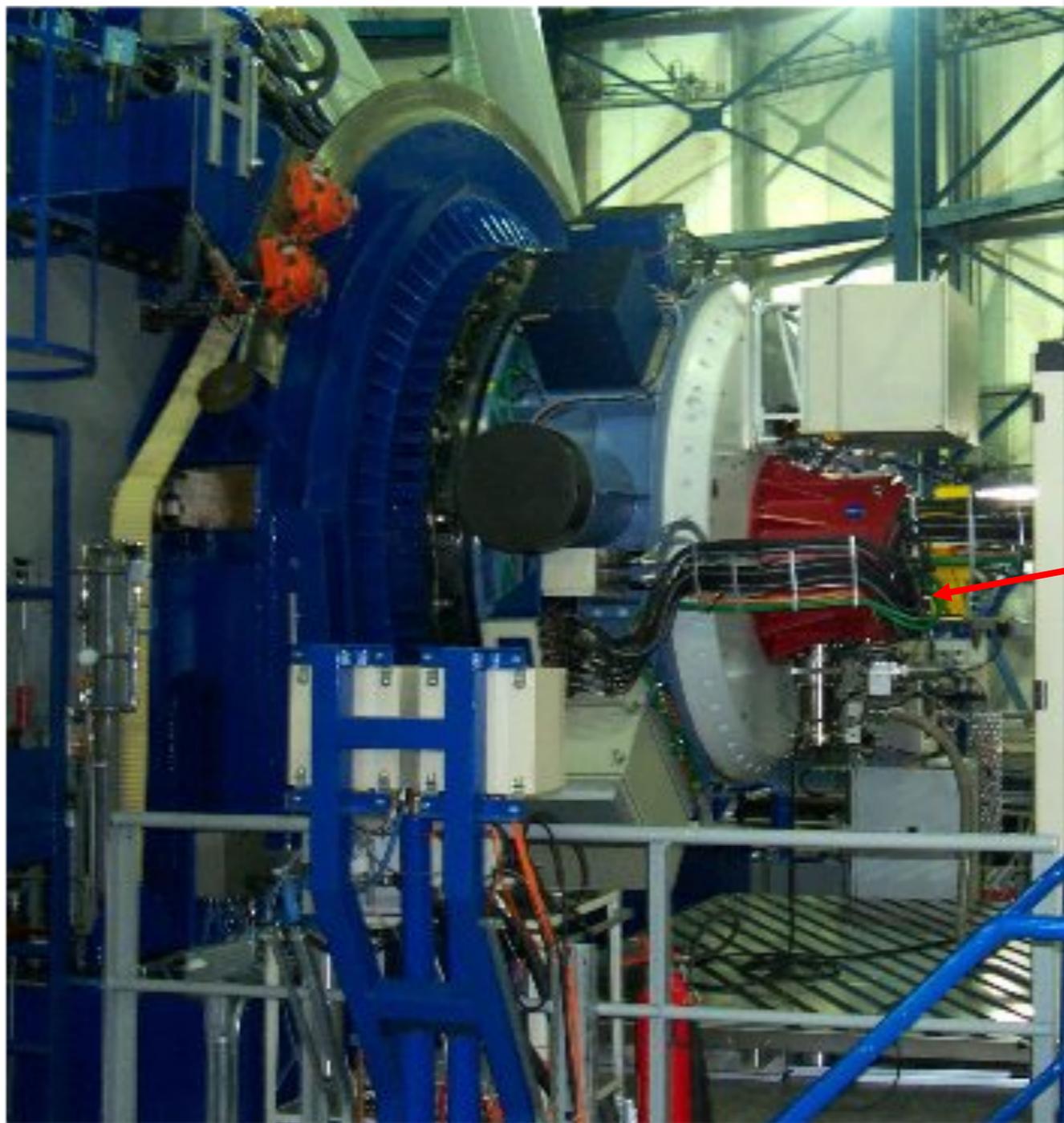
LGS sur le centre galactique



Anisoplanétisme



Systeme NACO du VLT



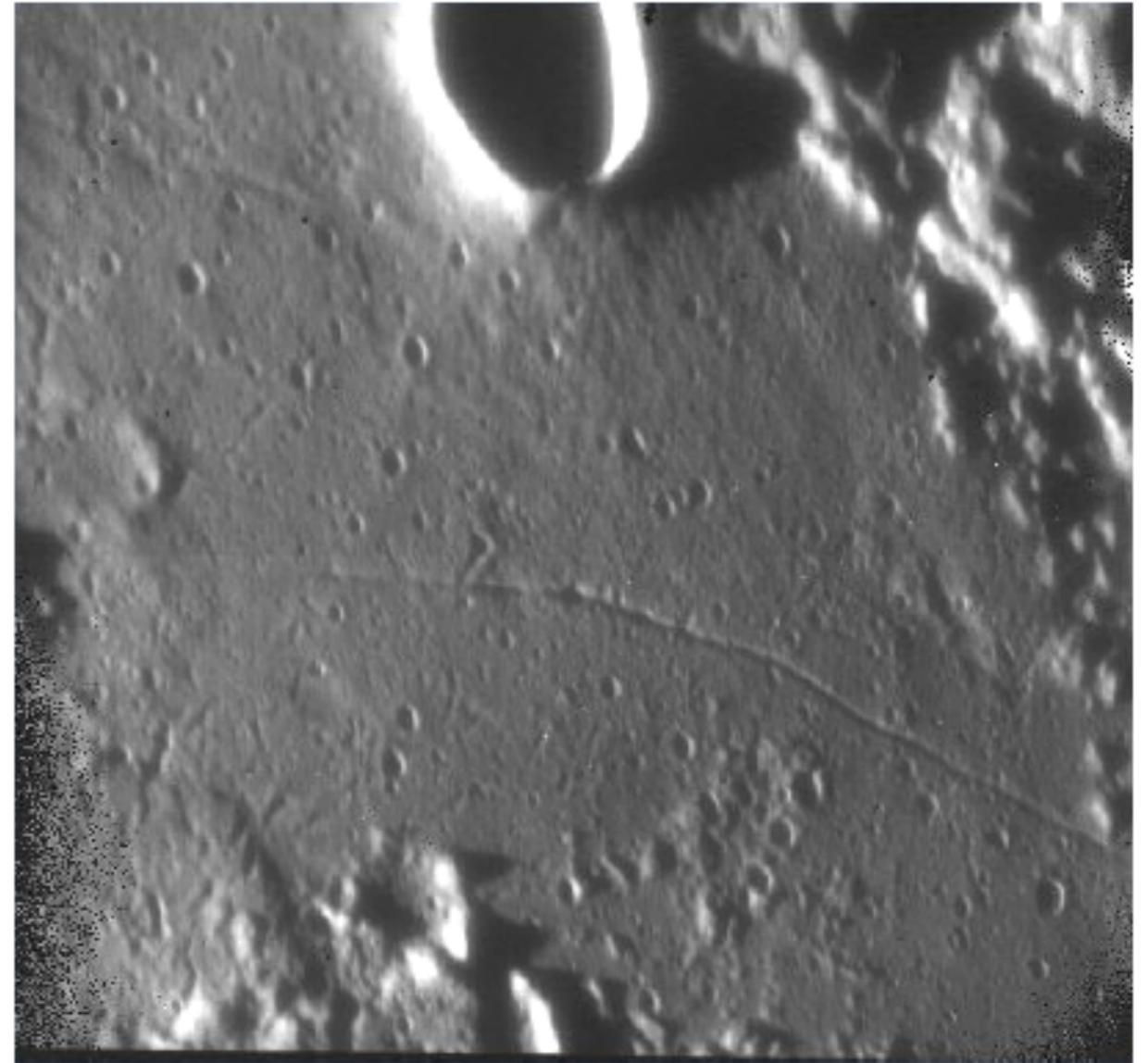
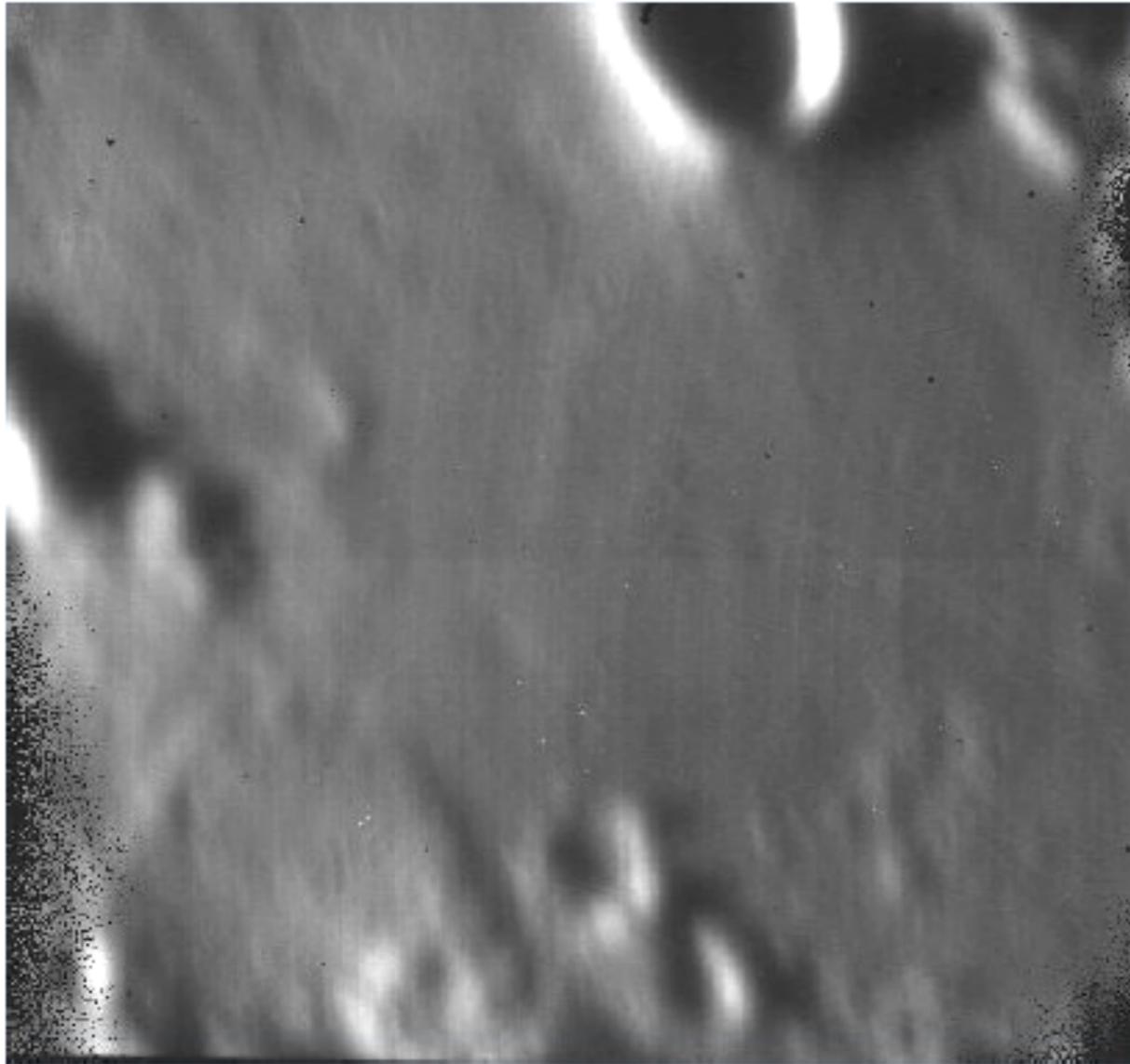
Paramètres du système NAOs

- Conditions :
 - Télescope de 8m, r_0 ($0.5 \mu\text{m}$) = 10 cm, $V = 10 \text{ m/s}$

Rapport de Strehl	Bon		Élevé	
Échantillonnage pupille	r_0		$r_0/3$	
λ (μm)	0.5	2.2-4.5 (NAOS)	0.5	0.8-2.2 (SPHERE)
Nombre d'actionneurs du miroir déformable	6400	185	64000	1600
Echantillonnage temporel	1	0.2	5	1

- Conclusion : dans le visible il faut calculer très vite, avoir beaucoup d'actionneurs et le nombre de photons pour l'analyse devient très faible.
- Seuls systèmes existants aujourd'hui : type NAOs, bientôt SPHERE

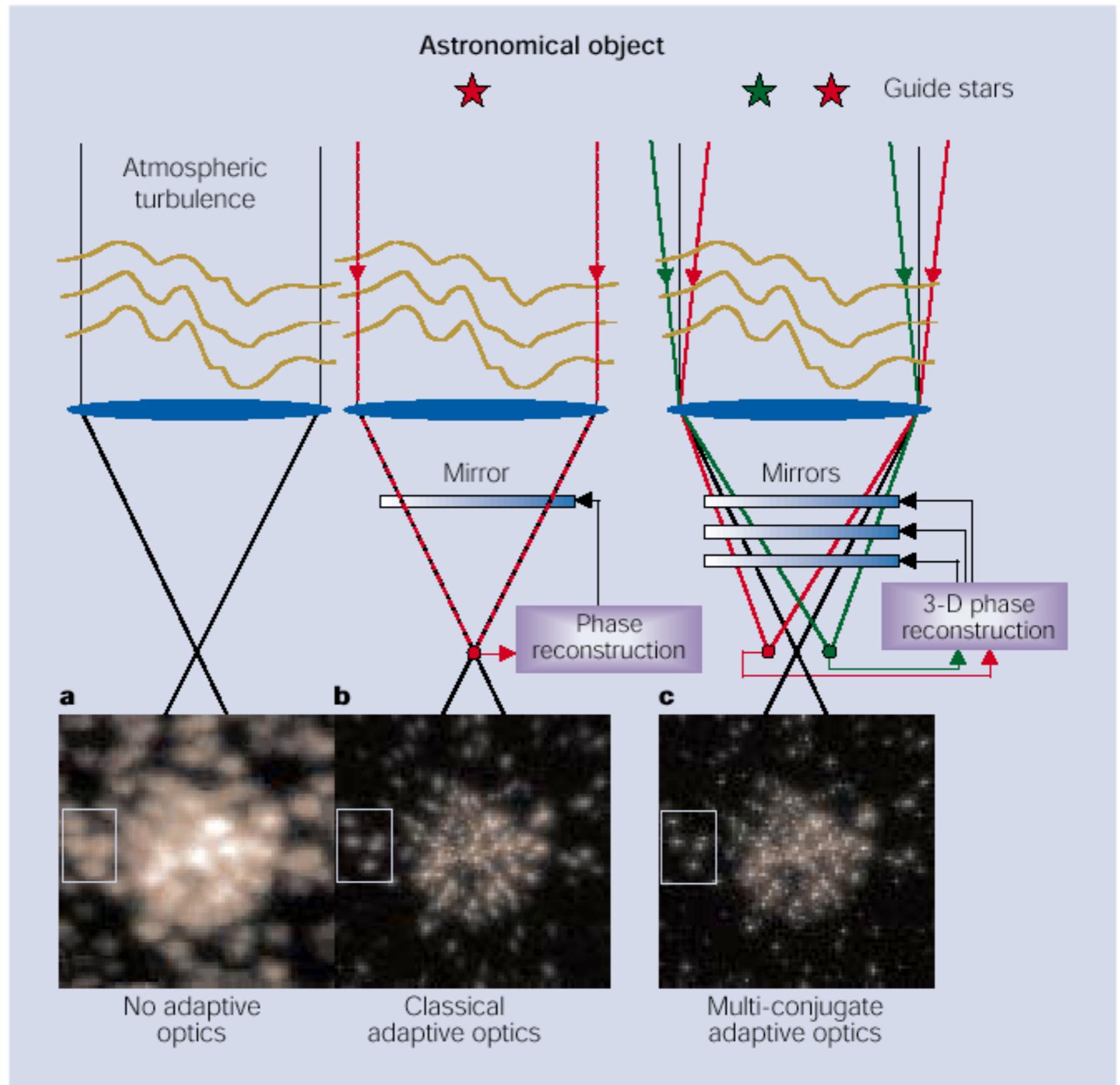
La Lune vue par le VLT/NACO



~60 km ~30 arcsec

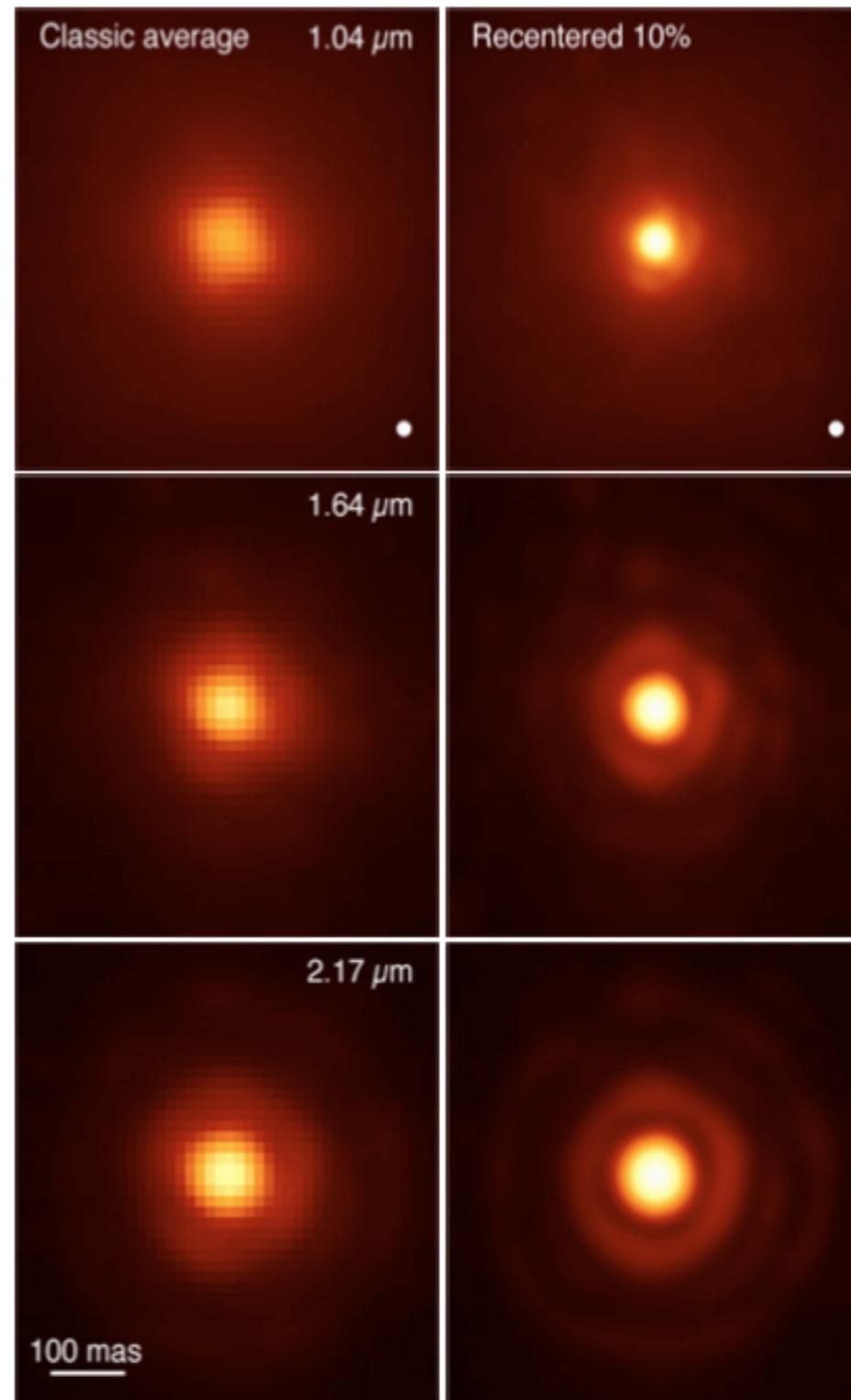
Optique adaptative multi-conjuguée

- Reconstitution tridimensionnelle de la turbulence
- On parle de MCAO (acronyme anglais)
- C'est une évolution nécessaire pour les très grands télescopes optiques en projet, d'une taille de plusieurs décamètres (ELTs)



Imagerie sélective

- Même après correction par une OA, des résidus persistent
- Des très courtes poses, sélectionnées, permettent d'améliorer la qualité d'image
- L'amélioration peut être très importante à courte longueur d'onde

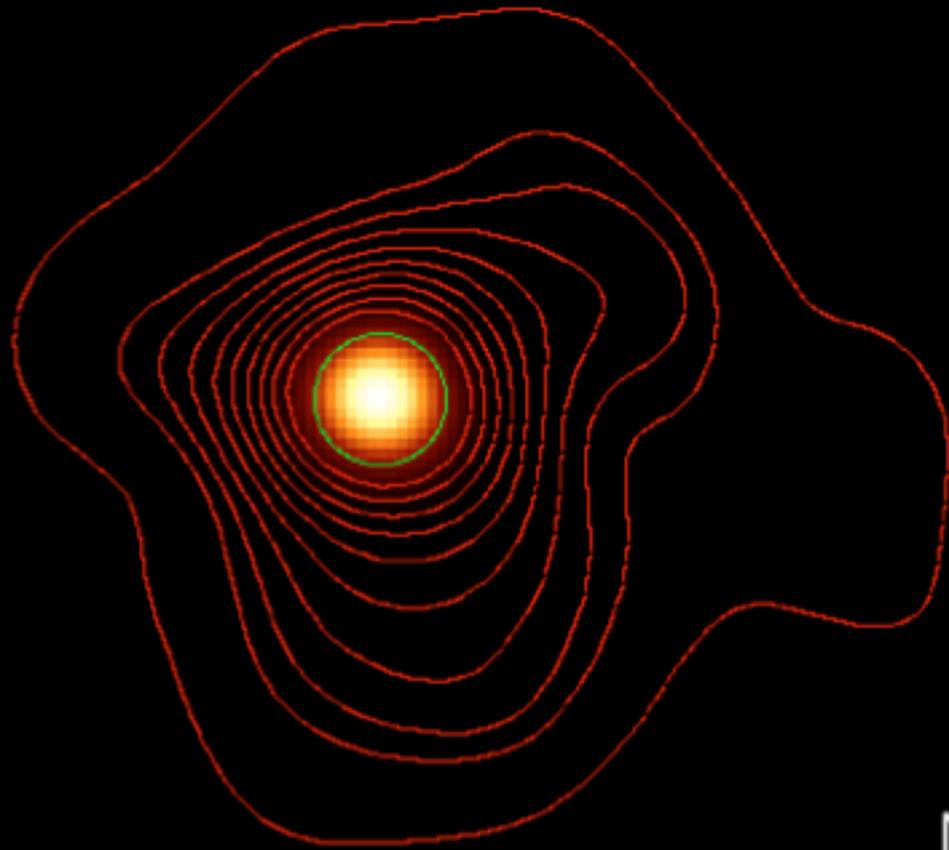


Kervella et al. 2009, A&A, 504, 115

Optique adaptative VLT/NACO
 $\lambda=1.2 \mu\text{m}$, $\Delta t=7.2 \text{ ms}$, champ=0.8''

Betelgeuse
L-R deconvolved

1.04 μm



100 mas

E N

Kervella et al. 2009, A&A, 504, 115

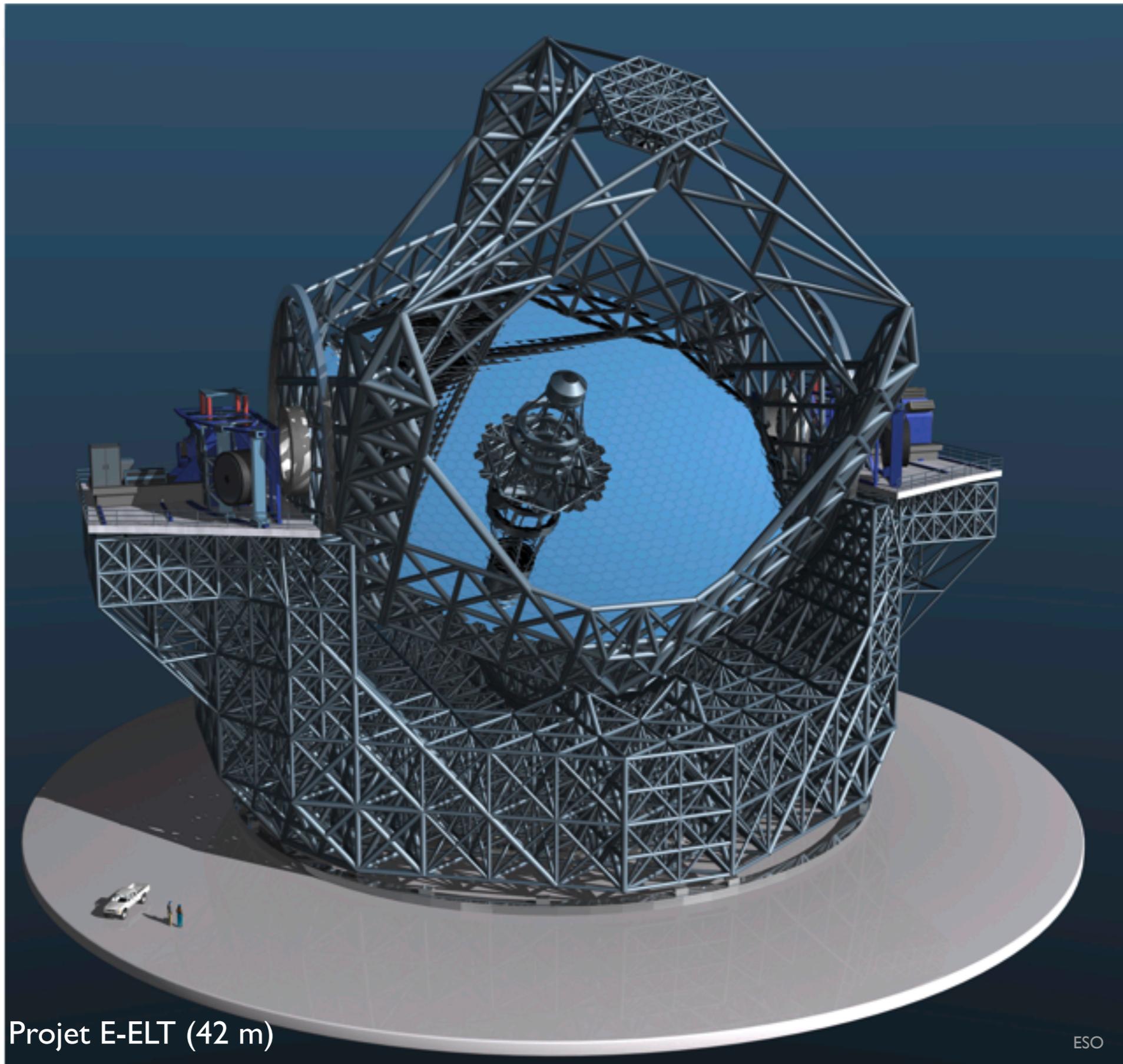
Le Centre Galactique



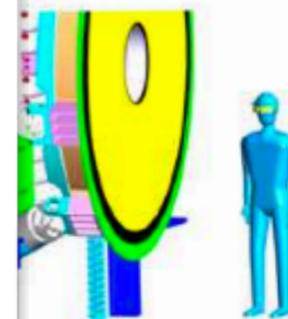
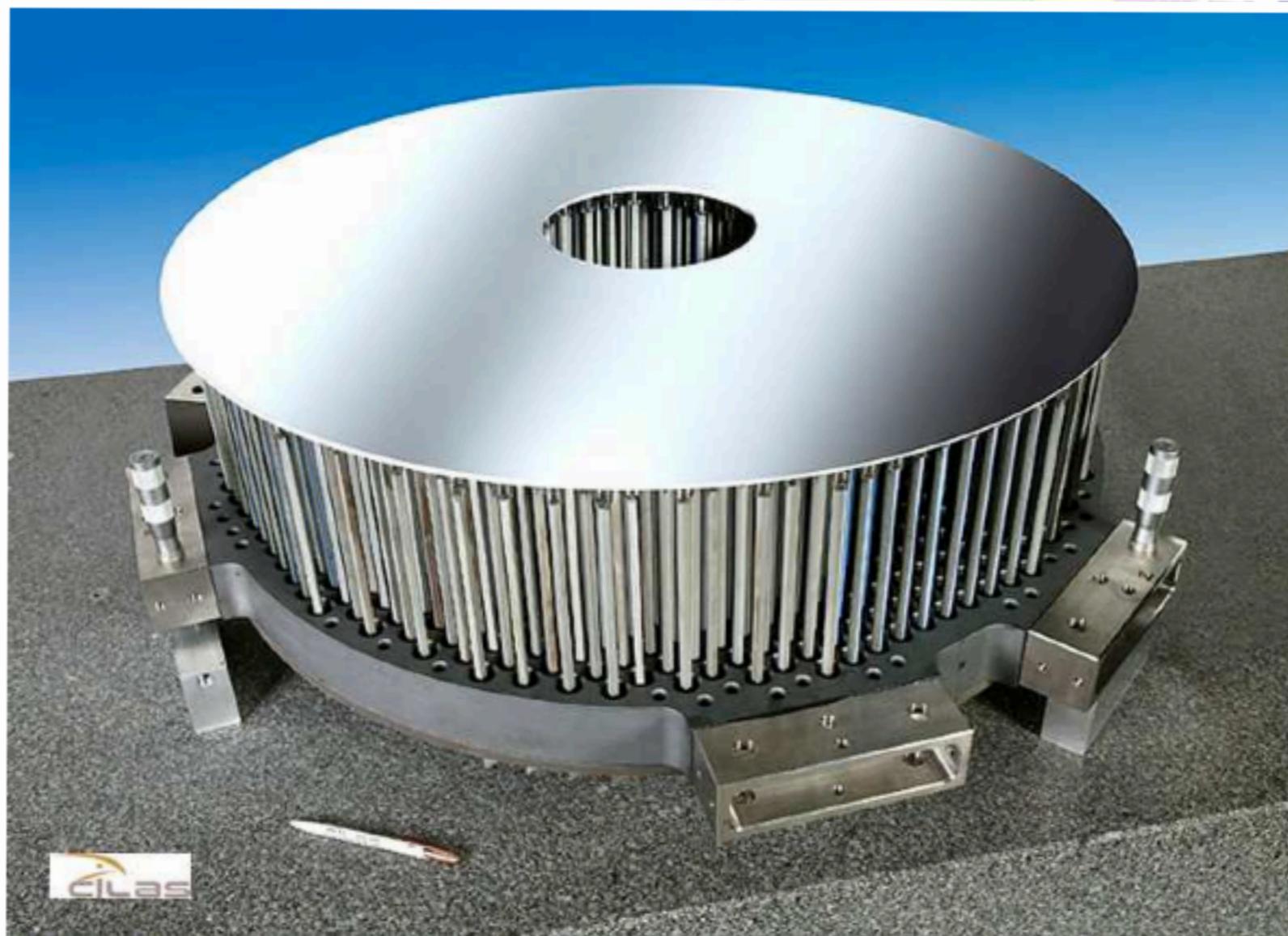
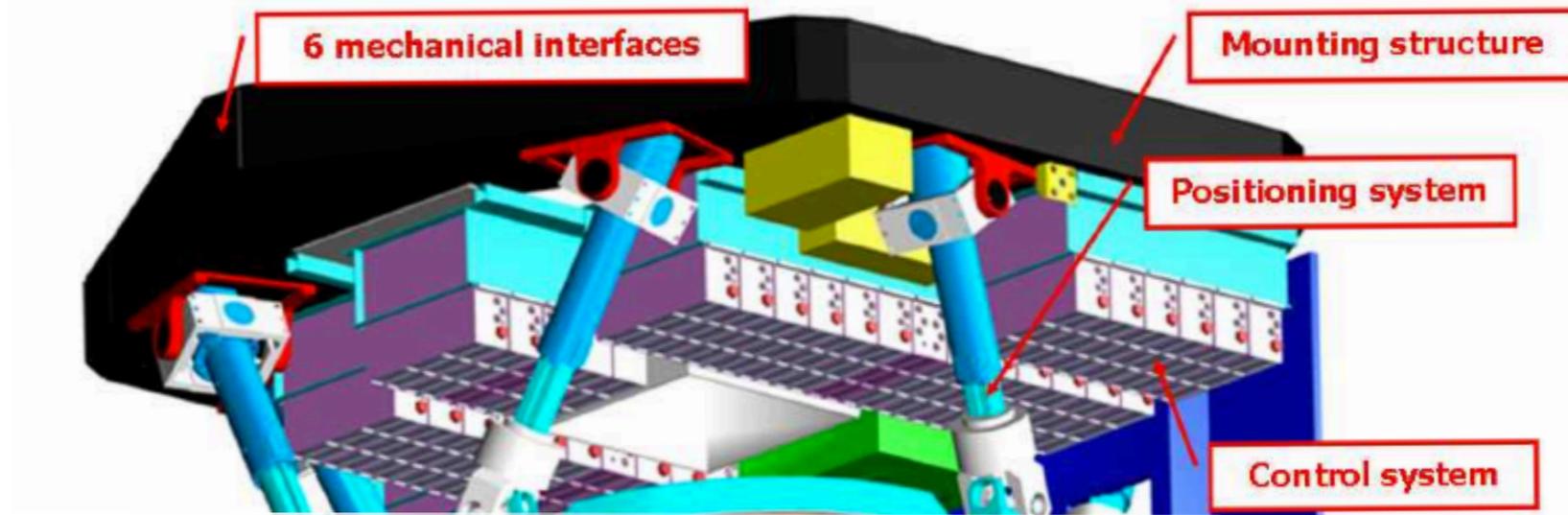
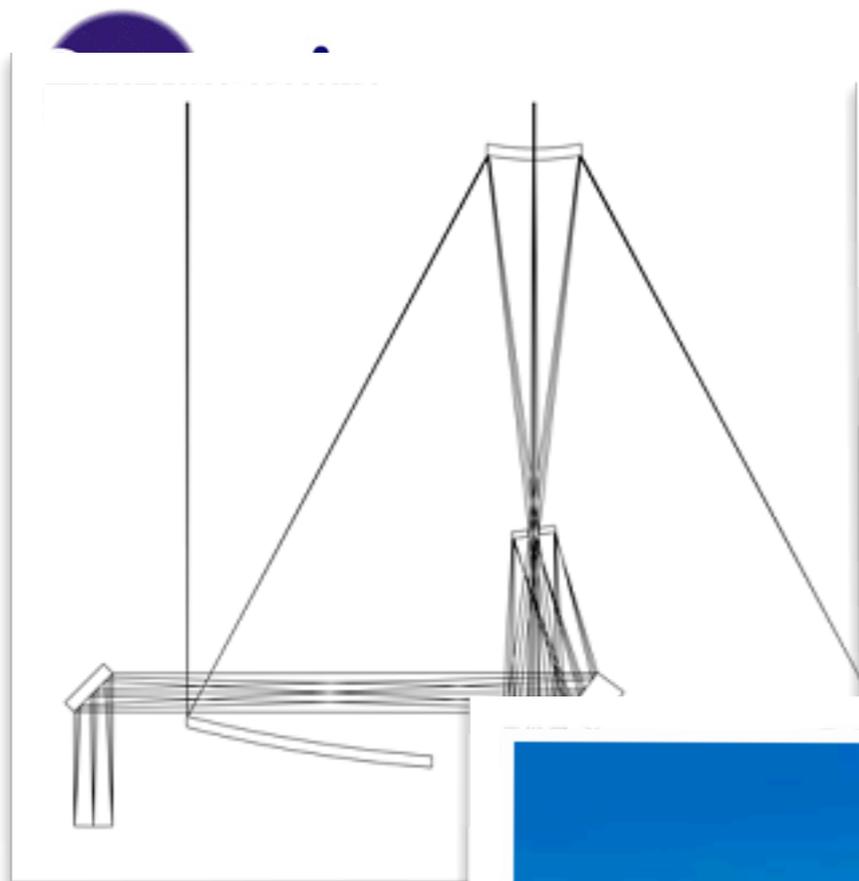


OA pour l'E-ELT

- De nombreux projets d'instruments...
- Une optique adaptative commune
- La plupart des instruments contiennent une optique adaptative supplémentaire
- Exemples d'EAGLE (orienté cosmologie observationnelle, multi-IFU) et EPICS (orienté exoplanètes, coronographie, imagerie différentielle, IFU)

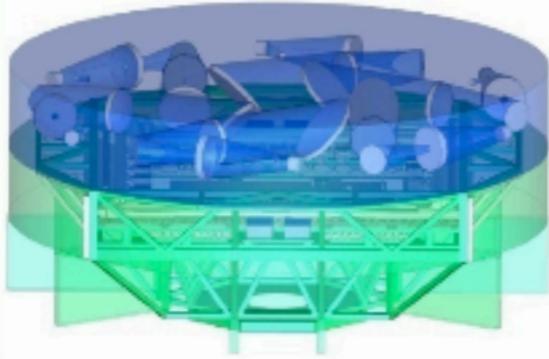


Projet E-ELT (42 m)

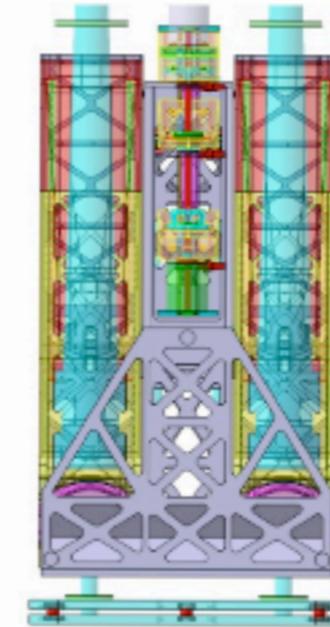
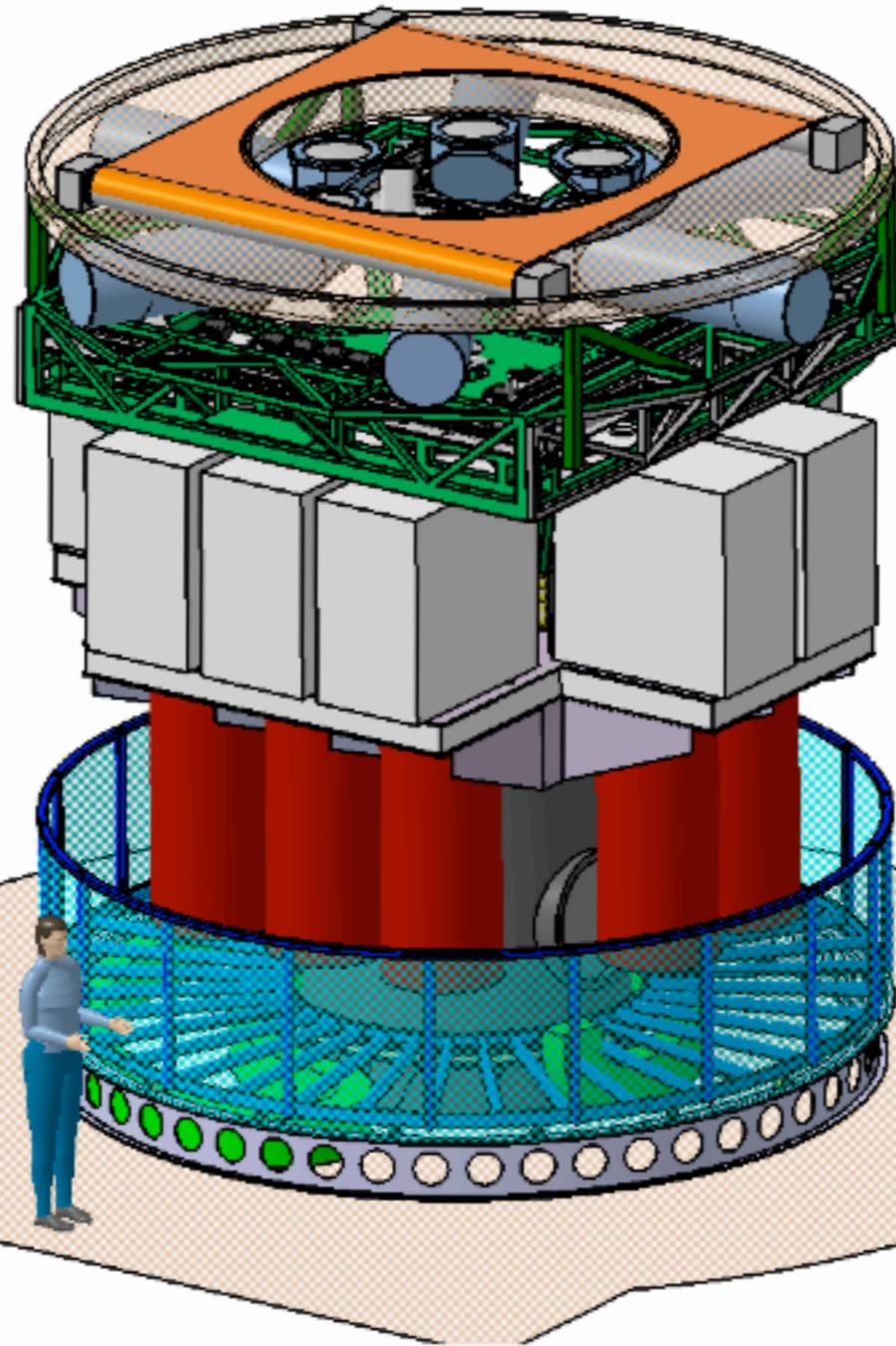
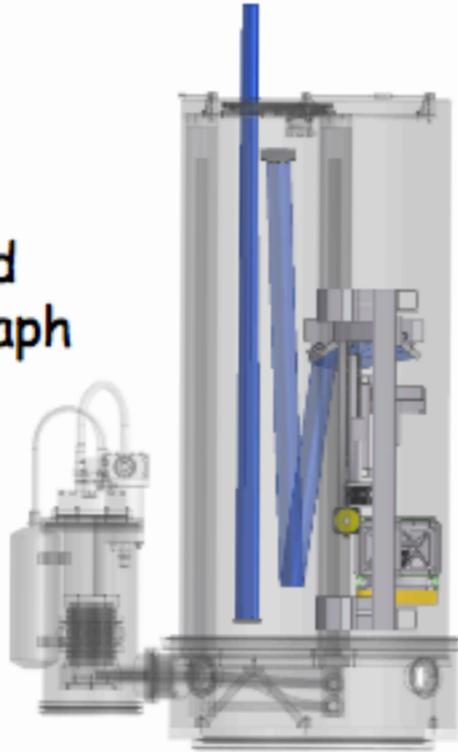


Concept EAGLE

LGS and
positioning
system

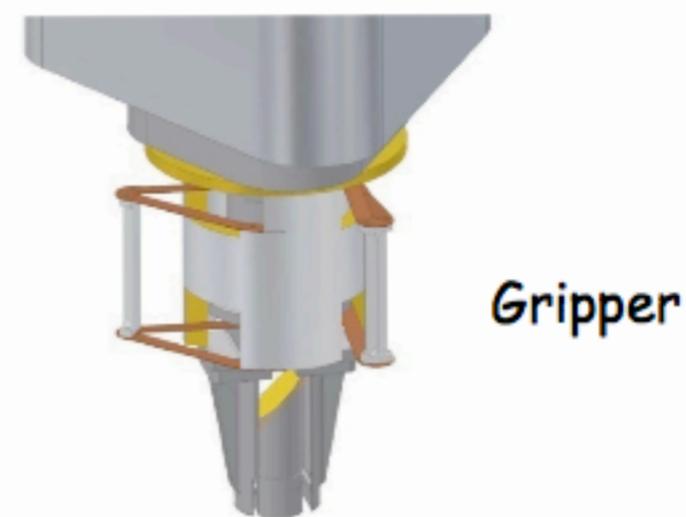
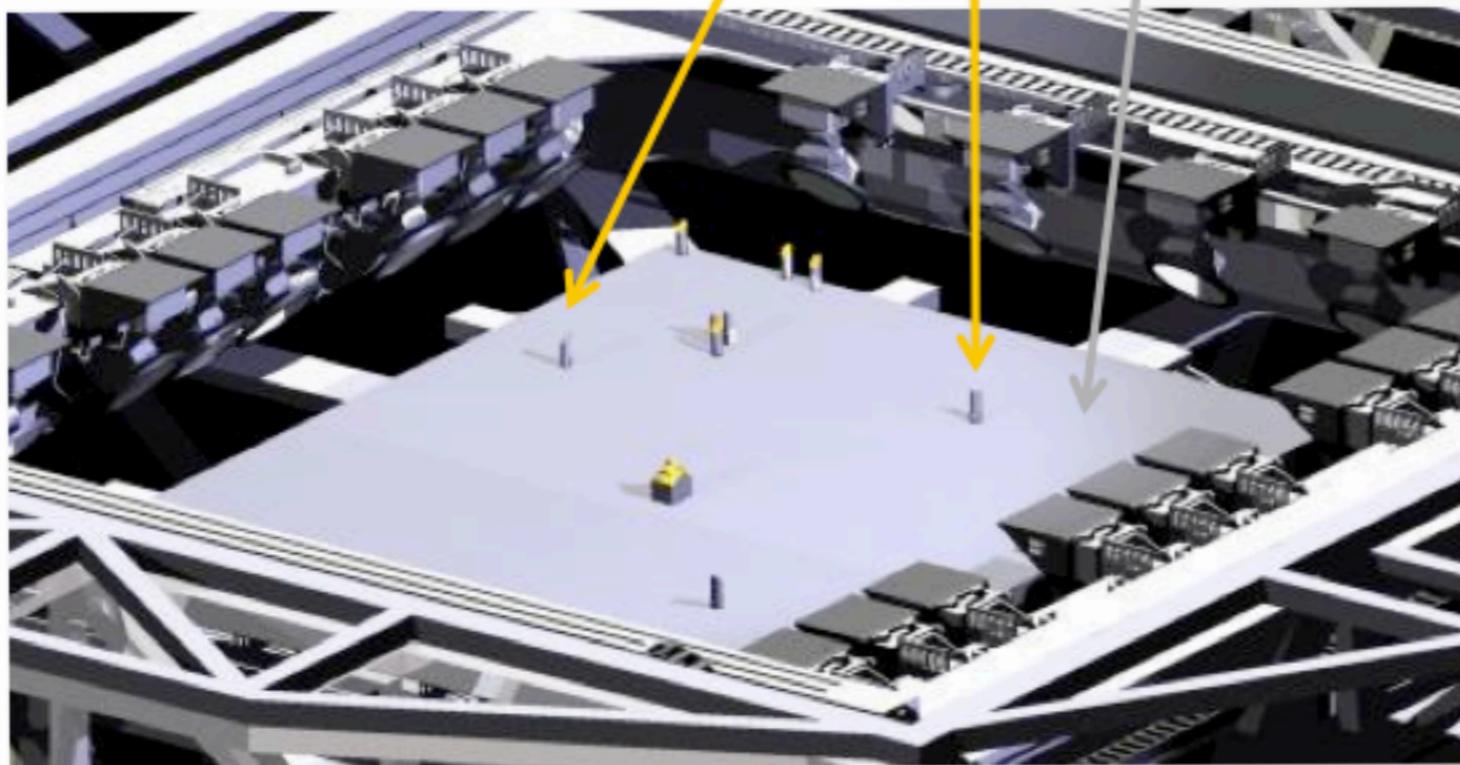
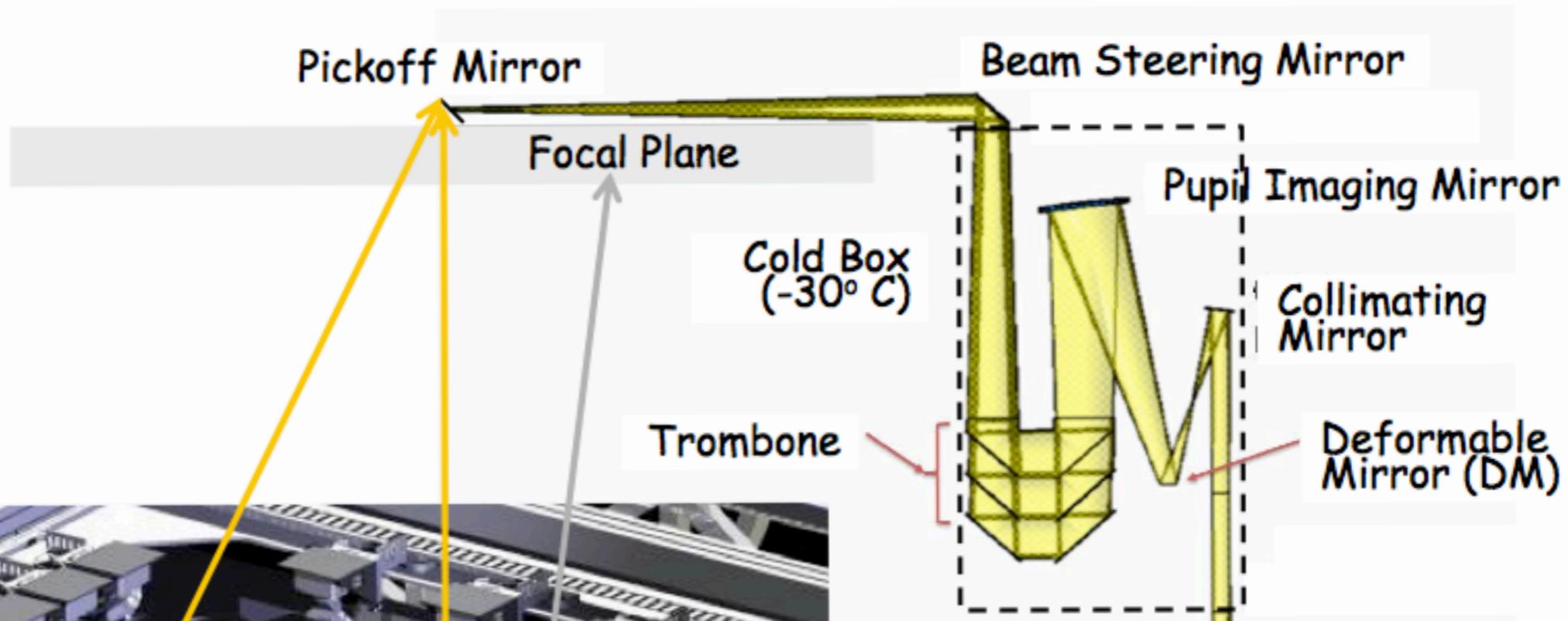


IFU and
spectrograph
system

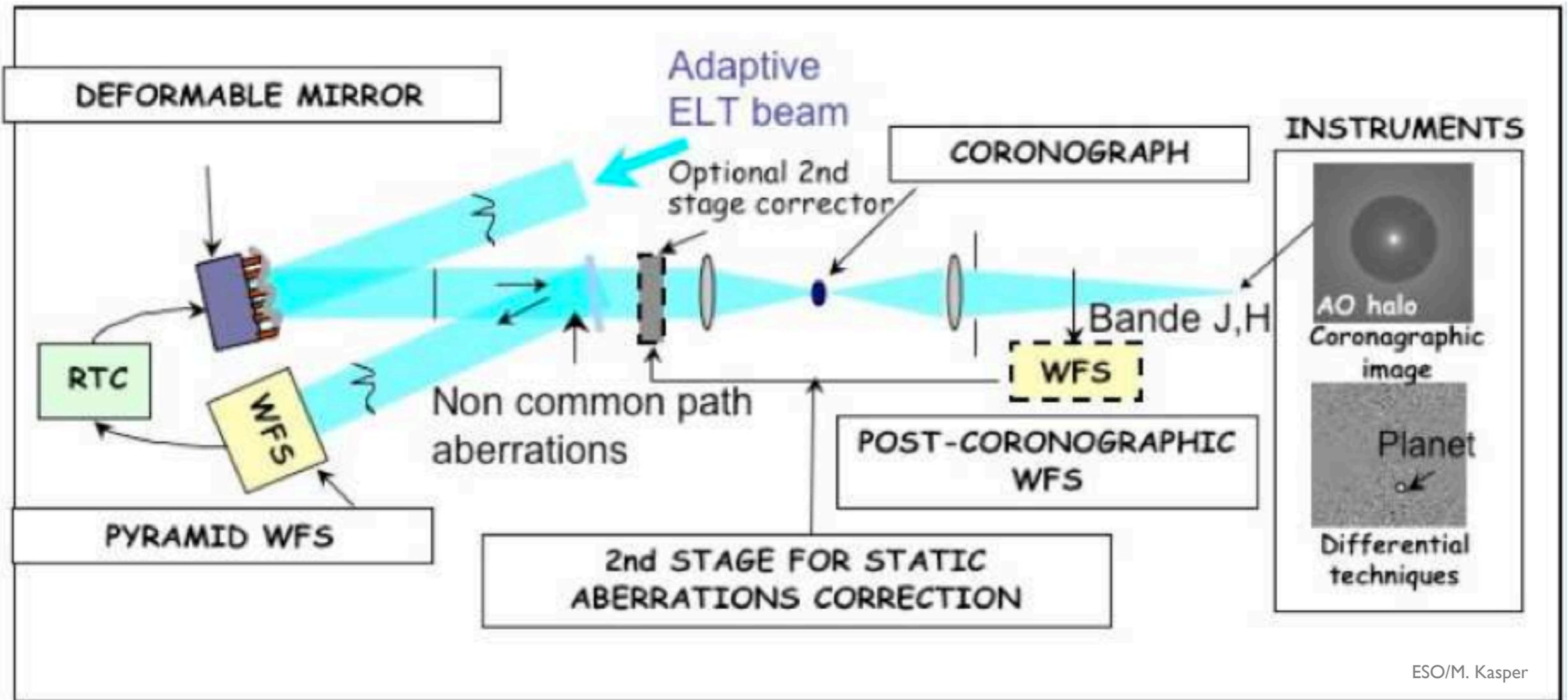


Target re-
imaging and
magnification
system

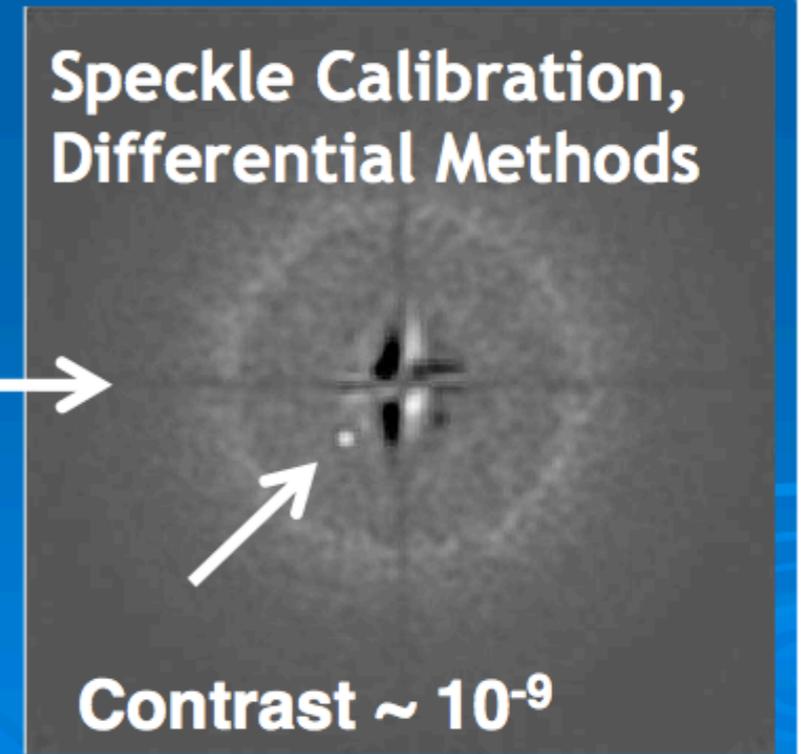
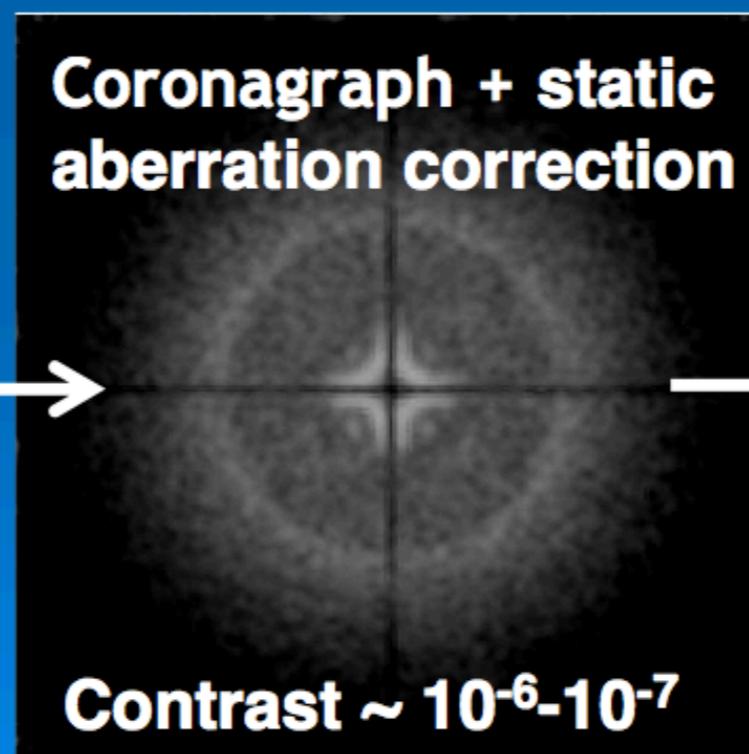
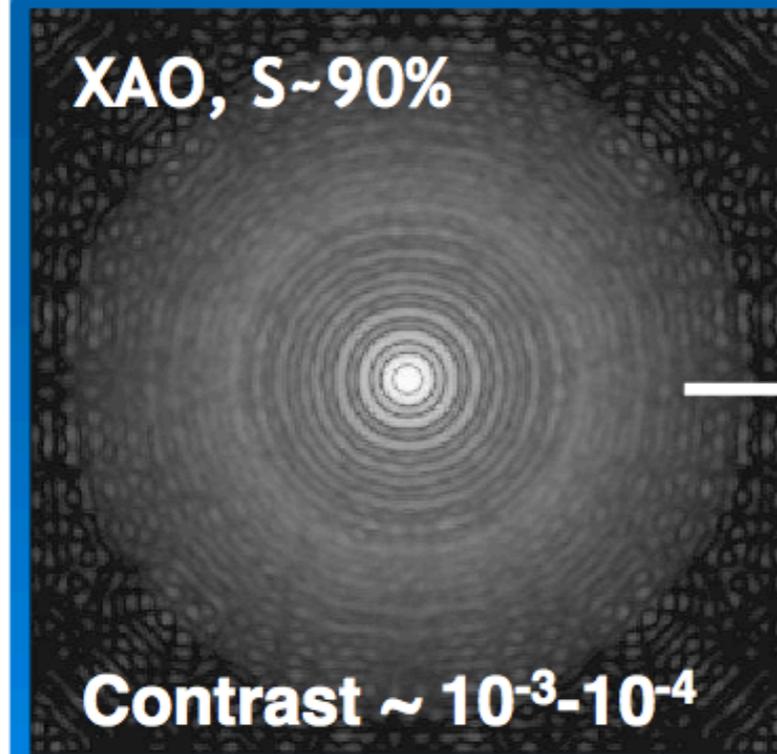
Instrument Core System

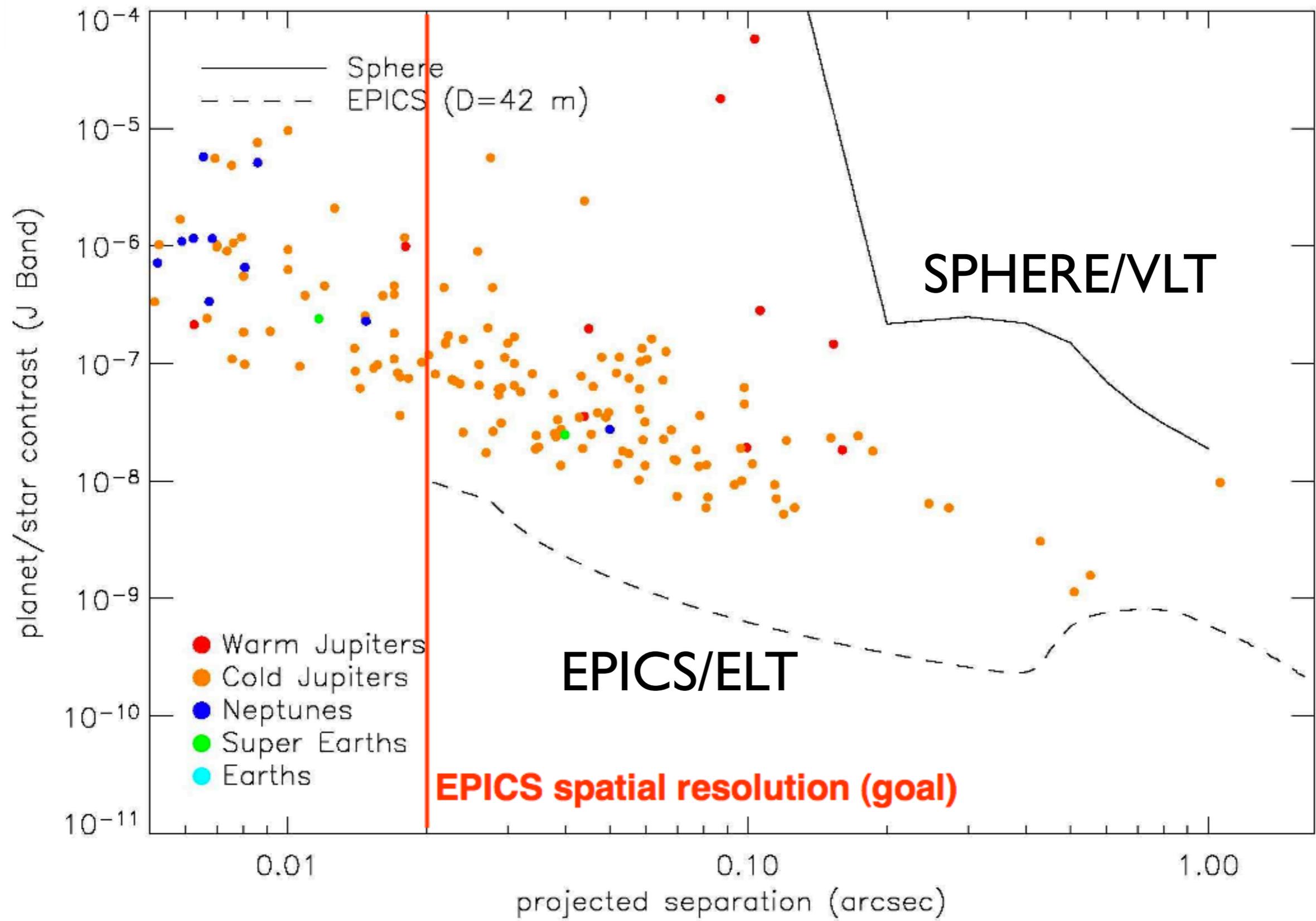


Concept EPICS



Très haut contraste





Exercice: résolution et optique adaptative

1. Quelle est le diamètre angulaire en secondes d'angle d'une pièce de 1 euro (16mm) placée à une distance de 5 km ?
2. Calculer la taille d'un télescope permettant de résoudre cette dimension angulaire aux longueurs d'onde visible (600 nm)
3. Est-ce que ce télescope peut atteindre cette résolution angulaire sur une source astronomique depuis le sol ?
4. Considérant un paramètre de Fried de 10cm, quelle est la résolution maximale accessible par ce télescope sur le ciel en longue pose ?
5. Décrire l'image formée par le télescope de la taille calculée en 2) avec la turbulence de la question 4).

Solution: résolution et OA

1. La taille angulaire en secondes d'angle est obtenue par la conversion de la taille angulaire en radians: $\theta = 1,6 \cdot 10^{-2} / 5 \cdot 10^3 = 3,2 \cdot 10^{-6}$ rad ce qui donne $\theta = 3,2 \cdot 10^{-6} / 4,848 \cdot 10^{-6} = 0,66$ arcsec. Noter la relation souvent utile $1'' = 4,848 \cdot 10^{-6}$ rad.
2. La résolution est donnée par $\theta = 1,22 \lambda / D$, donc on peut calculer directement $D = 1,22 \lambda / \theta$ ce qui donne numériquement le diamètre suivant: $D = 1,22 \cdot 6 \cdot 10^{-7} / 3,2 \cdot 10^{-6} = 22,8$ cm (attention à considérer les angles en radians !)
3. Typiquement, la turbulence limite la résolution angulaire des télescopes opérant dans le visible à environ 1 seconde d'angle. Il ne sera donc pas possible d'obtenir cette résolution sans OA avec un télescope de ~ 20 cm.
4. Pour un paramètre de Fried de 10 cm, on sera limité par la turbulence à une résolution angulaire de l'ordre de $(22,8 / 10) * 0,66 = 1,5$ arcsec.
5. On aura formation d'environ 4 « speckles », ou tavelures, en déplacement rapide au plan focal de l'instrument, sur une extension de l'ordre de deux fois la diffraction du télescope.

Exercice: OA avec le VLT

- a. Rappeler brièvement (deux phrases au maximum) l'utilité de l'optique adaptative en astronomie.
- b. Qu'est-ce que le paramètre de Fried r_0 ? Pour une turbulence atmosphérique forte, est-il faible ou élevé ?
- c. Dans un bon site astronomique, on a typiquement $r_0 = 10$ cm à une longueur d'onde $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$. La force de la turbulence dépend de λ , et le paramètre de Fried varie en fonction de la longueur d'onde selon $r_0 \propto \lambda^{6/5}$. A partir de cette relation, calculer la longueur d'onde λ_1 à laquelle la résolution angulaire d'un télescope de 8 m de diamètre du VLT devient limitée par la diffraction (en l'absence d'OA).
- d. L'OA actuelle du VLT (instrument NACO) permet d'atteindre un rapport de Strehl S d'environ 60% à $\lambda = 2.2 \mu\text{m}$ sur des étoiles brillantes. En observant à une longueur d'onde $\lambda = 4.5 \mu\text{m}$ avec cet instrument, S sera-t-il plus ou moins élevé qu'à $2.2 \mu\text{m}$? Justifier votre réponse.

Solution: OA avec le VLT

- a) Une OA permet de corriger les variations aléatoires de phase introduites sur un front d'onde par la traversée d'un milieu inhomogène comme l'atmosphère, et donc de reconstituer l'image limitée par la diffraction. Elle augmente ainsi le pouvoir de résolution d'un télescope dont la taille est plus grande que r_0 .
- b) Le paramètre de Fried correspond à la taille typique des cellules perturbant la propagation de la lumière dans l'atmosphère. Il correspond par convention au diamètre du disque sur lequel la variance de la phase vaut 1 rad^2 . Il s'agit aussi de la taille maximum d'un télescope sans OA dont la qualité d'image sera limitée par la diffraction. Pour une turbulence forte, r_0 est petit.
- c) On a $r_0(\lambda_0 = 0.6 \text{ } \mu\text{m}) = 0.1 \text{ m}$, soit $D/r_0 = 80$ en visible pour $D=8\text{m}$. On cherche λ_1 telle que $D/r_0 = 1$, donc $\lambda_1/\lambda_0 = 805/6 = 38$, soit $\lambda_1 = 23 \text{ } \mu\text{m}$.
- d) Lorsque λ augmente, r_0 augmente également (voir la question précédente), et donc le rapport de Strehl sera plus élevé (on se rapproche du cas de la diffraction simple).

Prochain cours

- Cohérence
- Interférométrie
- Révisions

