

# DM - INTERACTION MILIEUX DILUÉS RAYONNEMENT

*À rendre pour le 15/03/2013*

## 1 Transitions et règles de sélection pour les atomes hydrogéoïdes (8 points)

Rappelons quelques relations entre l'opérateur des harmoniques sphériques  $Y_{LM}$  et les composantes de l'opérateur position  $R = (xyz)$  :

$$\begin{cases} rY_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}z \\ rY_{1\pm 1} &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x \pm iy). \end{cases} \quad (1)$$

D'autre part, on sait que  $\langle Y_{lm}|Y_{LM}|Y_{l'm'}\rangle$  est non nul si et seulement si :

$$\begin{cases} m = M + m' \\ l + L + l' \text{ pair} \\ |L - l'| \leq l \leq |L + l'| \end{cases} \quad (2)$$

- (3 points) Dédurre des relations ci-dessus les règles de sélection sur  $l$  et  $m$  des transitions dipolaires électriques entre niveaux hydrogéoïdes.
- (1 point) On va maintenant étudier la transition  $2p \rightarrow 1s$  de l'atome d'hydrogène en présence d'un champ magnétique faible  $\vec{B}$ , dirigé suivant l'axe  $z$ . Pour faciliter l'étude en champ magnétique faible, il est judicieux de se placer dans la base  $\{s, l, j, m_j\}$  avec  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ . Donner l'expression de l'Hamiltonien d'interaction avec ce champ magnétique.
- (3 points) Le théorème de Wigner-Eckart indique que les éléments de matrice de  $g_j \vec{j}$  et de  $g_l \vec{l} + g_s \vec{s}$  sont identiques au sein du même sous espace  $\{s, l, j\}$ ,  $j$ ,  $l$ , et  $s$  étant les nombres quantiques associés aux valeurs propres de  $J$ ,  $L$  et  $S$ . À partir des éléments de matrice diagonaux de  $g_j \vec{j}^2$  en déduire la valeur du facteur de Landé  $g_j$  en fonction des facteurs  $g_s$ ,  $g_l$ ,  $l$  et  $j$ . En déduire la valeur du facteur de Landé  $g_j$  pour le niveau  $2p$  sachant que  $g_s = 2$  et  $g_l = 1$ .
- (2 points) Calculer les niveaux d'énergie en champ magnétique faible. Les représenter sur un diagramme.

## 2 L'effet Aharonov-Bohm (12 points)

L'effet Aharonov-Bohm est un phénomène quantique découvert en 1959 par D. Bohm et Y. Aharonov. Cet effet est une conséquence de l'interaction d'un faisceau d'électrons avec un champ magnétique.

Dans le dispositif expérimental schématisé sur la figure 1, un faisceau cohérent d'électrons part de  $x_0$ , puis est séparé en deux, et se recombine dans la région d'interférences  $X$ . L'onde quantique des électrons n'est présente que sur la zone grisée. L'expérience est similaire à celle des doubles fentes d'Young en optique, sauf que le disque orange contient un champ magnétique  $\vec{B}$  perpendiculaire à la figure. Le champ  $\vec{B}$  est nul partout ailleurs, en particulier le long des trajectoires ( $D_1$  et  $D_2$ ) des faisceaux.

- (1 point) Rappeler les expressions des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à partir du potentiel électrique  $V$  et du potentiel vecteur  $\vec{A}$ . En mécanique classique, une particule de charge  $q$  ne subit l'influence d'un champ électromagnétique qu'à travers les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Donner l'expression de la force de Lorentz que cette particule subit alors.
- (1 point) En mécanique quantique, rappeler l'expression de l'Hamiltonien pour une particule chargée dans un champ électromagnétique.

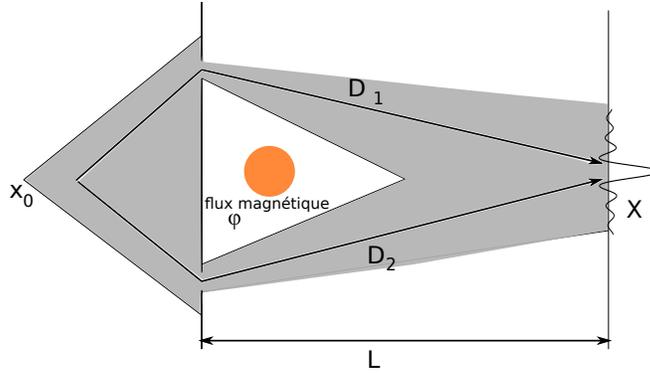


FIGURE 1 – Schéma du dispositif expérimental pour l'observation de l'effet Aharonov-Bohm.

3. (1 point) Quelle relation y a-t'il entre  $\vec{A}$  sur le trajet des électrons et le flux magnétique  $\varphi = \int_{\text{disque}} \vec{B} \cdot d^2\vec{s}$ ? Déduire que  $\vec{A}$  est forcément non nul le long de la trajectoire des électrons et ce même si  $\vec{B} = 0$ .
4. (1 point) Donner une expression possible pour  $\vec{A}$  dans la région où  $\vec{B} = 0$  en fonction du flux magnétique  $\varphi$ .
5. (1 point) Sur la figure 1, on note  $\psi_1(x)$  l'amplitude de la fonction d'onde de l'électron en un point  $x$  du chemin 1. Donner l'équation satisfaite par  $\psi_1$ .
6. (1 point) Le domaine du chemin 1, noté  $D_1$  est un domaine contractible. Or

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = 0 \quad (3)$$

on en déduit donc que

$$\vec{A} = \text{grad} \chi, \quad (4)$$

où  $\chi(x)$  est fonction de  $x \in D_1$ . Si  $x_0 \in D_1$  est un point de référence et  $x \in D_1$ , montrer que

$$\chi(x) = \chi(x_0) + \int_{x_0}^x \vec{A}(x') \cdot d\vec{l} \quad (5)$$

où l'intégrale se fait le long de n'importe quel chemin inclus dans  $D_1$ .

7. (3 points) Supposons que  $\psi_0$  est solution de l'équation de Schrödinger en absence de champ magnétique ( $\vec{A} = 0$ ), et supposons que  $\psi_1(x_0) = \psi_0(x_0)$ . Montrer alors que dans la région  $D_1$ ,

$$\psi_1(x) = \exp\left(ie \frac{\chi(x) - \chi(x_0)}{\hbar}\right) \psi_0(x) \quad (6)$$

*Aide : On pourra commencer par montrer que*

$$(\vec{p} - e\vec{A}) \psi_1 = \exp\left(ie \frac{\chi(x) - \chi(x_0)}{\hbar}\right) (\vec{p}\psi_0) \quad (7)$$

8. (1 point) On note  $\psi_2(x)$  l'amplitude de la fonction d'onde sur le chemin 2 et on suppose une fois de plus que  $\psi_2(x_0) = \psi_1(x_0) = \psi_0(x_0)$ . Comment s'exprime l'amplitude  $\psi(X)$  de l'onde au point  $X$  ?
9. (2 points) Des questions précédentes, déduire la densité de probabilité de présence  $I$  de l'électron au point  $X$  en fonction de  $\varphi$ . Comparer le cas classique au cas quantique. Que pouvez vous en conclure ?
10. *Bonus* : Pouvez-vous imaginer une application de ce phénomène ?

## Annexe - Rappel des Formules de calcul différentiel

Soit un domaine  $\mathcal{D}$  de l'espace contractible, les formules standards du calcul différentiel sont

$$\vec{\text{grad}}f = 0 \Rightarrow f = cste$$

$$\vec{\text{rot}}\vec{u} = 0 \Rightarrow \exists f, tq \vec{u} = \vec{\text{grad}}f$$

$$\text{div}\vec{v} = 0 \Rightarrow \exists \vec{u}, tq \vec{v} = \vec{\text{rot}}\vec{u}$$

Formules de Stokes :

- Si  $\gamma$  est un chemin d'extrémité  $a$  et  $b$  et  $f$  est une fonction alors

$$\int_{\gamma} \vec{\text{grad}}f \cdot d\vec{l} = f(b) - f(a)$$

- Si  $S$  est une surface dont le bord est une courbe  $\gamma$  et  $\vec{u}$  un champ de vecteur alors

$$\int_S \vec{\text{rot}}\vec{u} \cdot d^2\vec{s} = \int_{\gamma=\partial S} \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

- Si  $V$  est un volume dont le bord est la surface  $S$  et  $\vec{v}$  un champ de vecteur alors

$$\int_V \text{div}\vec{v} \cdot d^3x = \int_{S=\partial V} \vec{v} \cdot d^2\vec{s}$$

- On a aussi

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}f) = 0$$

et

$$\text{div}(\vec{\text{rot}}\vec{u}) = 0$$

## 1 Transitions et règles de sélection pour les atomes hydrogénéoïdes (8 points)

Rappelons quelques relations entre l'opérateur des harmoniques sphériques  $Y_{LM}$  et les composantes de l'opérateur position  $R = (x y z)$  :

$$\begin{cases} rY_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}z \\ rY_{1\pm 1} &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x \pm iy). \end{cases} \quad (1)$$

D'autre part, on sait que  $\langle Y_{lm}|Y_{LM}|Y_{l'm'}\rangle$  est non nul si et seulement si :

$$\begin{cases} m = M + m' \\ l + L + l' \text{ pair} \\ |L - l'| \leq l \leq |L + l'| \end{cases} \quad (2)$$

- (3 points) Dédurre des relations ci-dessus les règles de sélection sur  $l$  et  $m$  des transitions dipolaires électriques entre niveaux hydrogénéoïdes.

**Solution:** Prenons un moment dipolaire orienté suivant  $z$ . On aura alors une transition si

$$eE\langle n, l, m | \hat{z} | n', l', m' \rangle \neq 0.$$

Or, on peut montrer que la fonction d'onde de l'atome en coordonnées sphériques se décompose en deux fonctions :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \langle r, \theta, \varphi | n, l, m \rangle = f_{nl}(\vec{r})Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

De plus, d'après les relations de l'énoncé on a :

$$\hat{z} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\hat{r}Y_{10}.$$

On peut donc réécrire la règle de sélection comme

$$\begin{aligned} \langle n, l, m | \hat{z} | n', l', m' \rangle &= \langle f_{nl} | \langle Y_{lm} | \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\hat{r}Y_{10} | f_{n'l'} \rangle | Y_{l'm'} \rangle \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \langle f_{nl} | \hat{r} | f_{n'l'} \rangle \langle Y_{lm} | Y_{10} | Y_{l'm'} \rangle. \end{aligned}$$

Pour que la transition est lieu, il faut que le terme encadré en rouge soit non nul. D'après les relations de l'énoncé, on déduit les règles de sélection suivantes :

$$\begin{cases} m &= m' \\ l' &= l \pm 1 \end{cases}$$

Pour le cas d'un champ électrique aligné suivant l'axe  $x$  ou  $y$ , il faut remarquer que

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{\hat{r}}{2}(Y_{1,-1} - Y_{11}) \\ \hat{y} &= -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{\hat{r}}{2i}(Y_{1,-1} + Y_{11}). \end{aligned}$$

De sorte que l'on déduit les règles de sélection suivantes :

$$\begin{cases} m &= m' \pm 1 \\ l' &= l \pm 1 \end{cases}$$

2. (1 point) On va maintenant étudier la transition  $2p \rightarrow 1s$  de l'atome d'hydrogène en présence d'un champ magnétique faible  $\vec{B}$ , dirigé suivant l'axe  $z$ . Pour faciliter l'étude en champ magnétique faible, il est judicieux de se placer dans la base  $\{s, l, j, m_j\}$  avec  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ . Donner l'expression de l'Hamiltonien d'interaction avec ce champ magnétique.

**Solution:**

$$H_Z = -\frac{\mu_B}{\hbar} g_j \vec{j} \cdot \vec{B}$$

où  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$  est le magnéton de Bohr.

3. (3 points) Le théorème de Wigner-Eckart indique que les éléments de matrice de  $g_j \vec{j}$  et de  $g_l \vec{l} + g_s \vec{s}$  sont identiques au sein du même sous espace  $\{s, l, j\}$ ,  $j$ ,  $l$ , et  $s$  étant les nombres quantiques associés aux valeurs propres de  $J$ ,  $L$  et  $S$ . À partir des éléments de matrice diagonaux de  $g_j \vec{j}^2$  en déduire la valeur du facteur de Landé  $g_j$  en fonction des facteurs  $g_s$ ,  $g_l$ ,  $l$  et  $j$ . En déduire la valeur du facteur de Landé  $g_j$  pour le niveau  $2p$  sachant que  $g_s = 2$  et  $g_l = 1$ .

**Solution:**

$$\begin{aligned} \langle s, l, j, m_j | g_j \vec{j}^2 | s, l, j, m_j \rangle &= \hbar^2 g_j j(j+1) \\ &= \langle s, l, j, m_j | (g_j \vec{j}) \vec{j} | s, l, j, m_j \rangle \\ &= \langle s, l, j, m_j | (g_s \vec{s} + g_l \vec{l}) (\vec{l} + \vec{s}) | s, l, j, m_j \rangle \\ &= \langle s, l, j, m_j | g_s \vec{s}^2 + g_l \vec{l}^2 + \vec{l} \cdot \vec{s} (g_s + g_l) | s, l, j, m_j \rangle. \end{aligned}$$

Or

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}(j^2 - s^2 - l^2)$$

d'où

$$\begin{aligned} g_j(j+1)j &= g_s s(s+1) + g_l(l+1)l + \frac{1}{2}(g_s + g_l)(j(j+1) - s(s+1) - l(l+1)) \\ &= \frac{1}{2}(g_s s(s+1) + g_l l(l+1) + (g_s + g_l)j(j+1) - g_l s(s+1) - g_s l(l+1)). \end{aligned}$$

On obtient alors

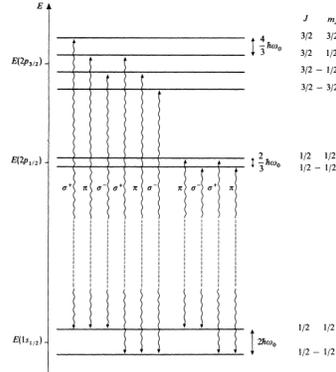
$$g_j = \frac{1}{2}(g_s + g_l) + \frac{g_s - g_l}{2j(j+1)} [s(s+1) - l(l+1)].$$

Dans le cas du niveau  $2p$ , on a  $l = 1$  et  $s = \frac{1}{2}$ ,  $j$  peut donc prendre la valeur  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{3}{2}$  et on trouve les facteurs de Landé correspondants :

$$\begin{aligned} g_{1/2} &= \frac{2}{3} \\ g_{3/2} &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

4. (2 points) Calculer les niveaux d'énergie en champ magnétique faible. Les représenter sur un diagramme.

**Solution:** Pour le niveau  $1s_{1/2}$  on a  $l = 0, S = \pm \frac{1}{2}, m_j = \pm \frac{1}{2}$ .  
 Pour le niveau  $2s_{1/2}$  on a  $l = 1, S = \pm \frac{1}{2}, m_j = \pm \frac{1}{2}$ .  
 Pour le niveau  $2s_{3/2}$  on a  $l = 1, S = \pm \frac{1}{2}, m_j = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ .



## 2 L'effet Aharonov-Bohm (12 points)

L'effet Aharonov-Bohm est un phénomène quantique découvert en 1959 par D. Bohm et Y. Aharonov. Cet effet est une conséquence de l'interaction d'un faisceau d'électrons avec un champ magnétique.

Dans le dispositif expérimental schématisé sur la figure 1, un faisceau cohérent d'électrons part de  $x_0$ , puis est séparé en deux, et se recombine dans la région d'interférences  $X$ . L'onde quantique des électrons n'est présente que sur la zone grisée. L'expérience est similaire à celle des doubles fentes d'Young en optique, sauf que le disque orange contient un champ magnétique  $\vec{B}$  perpendiculaire à la figure. Le champ  $\vec{B}$  est nul partout ailleurs, en particulier le long des trajectoires ( $D_1$  et  $D_2$ ) des faisceaux.

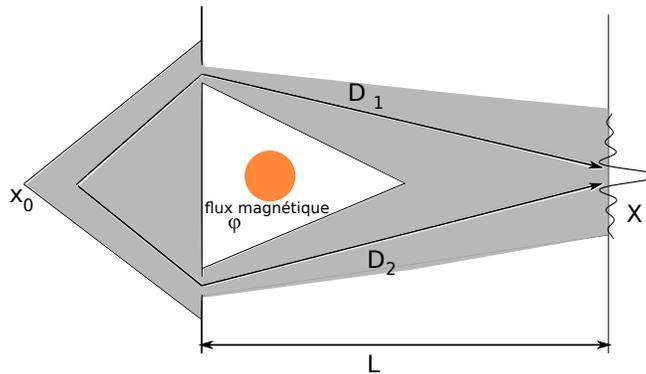


FIGURE 1 – Schéma du dispositif expérimental pour l'observation de l'effet Aharonov-Bohm.

1. (1 point) Rappeler les expressions des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à partir du potentiel électrique  $V$  et du potentiel vecteur  $\vec{A}$ . En mécanique classique, une particule de charge  $q$  ne subit l'influence d'un champ

électromagnétique qu'à travers les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Donner l'expression de la force de Lorentz que cette particule subit alors.

**Solution:** En mécanique classique, les champs électrique et magnétique s'écrivent

$$\begin{cases} \vec{E} &= -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \text{rot}\vec{A}. \end{cases}$$

L'expression de la force de Lorentz que subit une particule chargée dans un champ électromagnétique quant à elle est donnée par

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

2. (1 point) En mécanique quantique, rappeler l'expression de l'Hamiltonien pour une particule chargée dans un champ électromagnétique.

**Solution:** Le Hamiltonien d'interaction électromagnétique s'écrit

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - q\vec{A} \right)^2 + qV$$

avec  $\vec{p}$  l'opérateur quantité de mouvement.

3. (1 point) Quelle relation y a-t'il entre  $\vec{A}$  sur le trajet des électrons et le flux magnétique  $\varphi = \int_{\text{disque}} \vec{B} \cdot d^2\vec{s}$ ? Dédurre que  $\vec{A}$  est forcément non nul le long de la trajectoire des électrons et ce même si  $\vec{B} = 0$ .

**Solution:**

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$$

D'après le théorème de Stokes

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_{\text{disque}} \vec{B} \cdot d^2\vec{s} = B\pi r^2 \neq 0 \\ &= \int |\text{rot}\vec{A}| d^2\vec{s} \\ &= \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

où  $d\vec{l}$  est un élément de distance sur la surface délimitée par les deux rayons (théorème de Stokes). Comme le flux est non nul cela signifie que  $\vec{A}$  ne peut pas être nul partout. NB : L'intégrale sur  $\vec{A}$  se fait sur la boucle fermée qui part de  $x_0$  vers  $x$  par le chemin  $D_1$  et revient par le chemin  $D_2$ .

4. (1 point) Donner une expression possible pour  $\vec{A}$  dans la région où  $\vec{B} = 0$  en fonction du flux magnétique  $\varphi$ .

**Solution:** D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \varphi &= \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{D_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} - \int_{D_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

En coordonnées polaires, on peut supposer  $\vec{A}(r, \theta) = A\vec{u}_\theta$  par symétrie. En intégrant sur les chemins  $D_1$  et  $D_2$  on trouve  $\vec{A} = \frac{\varphi}{2\pi r}\vec{u}_\theta$ .

5. (1 point) Sur la figure 1, on note  $\psi_1(x)$  l'amplitude de la fonction d'onde de l'électron en un point  $x$  du chemin 1. Donner l'équation satisfaite par  $\psi_1$ .

**Solution:**  $\psi_1$  est la solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$\frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 \psi_1 + eV\psi_1 = E\psi_1$$

6. (1 point) Le domaine du chemin 1, noté  $D_1$  est un domaine contractible. Or

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = 0 \tag{3}$$

on en déduit donc que

$$\vec{A} = \text{grad}\chi, \tag{4}$$

où  $\chi(x)$  est fonction de  $x \in D_1$ . Si  $x_0 \in D_1$  est un point de référence et  $x \in D_1$ , montrer que

$$\chi(x) = \chi(x_0) + \int_{x_0}^x \vec{A}(x') \cdot d\vec{l} \tag{5}$$

où l'intégrale se fait le long de n'importe quel chemin inclus dans  $D_1$ .

**Solution:**

$$\vec{A} = \text{grad}\chi.$$

On peut donc écrire

$$\int_{x_0}^x \text{grad}\chi d\vec{l} = \chi(x) - \chi(x_0)$$

d'où

$$\int_{x_0}^x \vec{A} \cdot d\vec{l} = \chi(x) - \chi(x_0)$$

7. (3 points) Supposons que  $\psi_0$  est solution de l'équation de Schrödinger en absence de champ magnétique ( $\vec{A} = 0$ ), et supposons que  $\psi_1(x_0) = \psi_0(x_0)$ . Montrer alors que dans la région  $D_1$ ,

$$\psi_1(x) = \exp\left(ie\frac{\chi(x) - \chi(x_0)}{\hbar}\right) \psi_0(x) \tag{6}$$

*Aide : On pourra commencer par montrer que*

$$(\vec{p} - e\vec{A}) \psi_1 = \exp\left(ie\frac{\chi(x) - \chi(x_0)}{\hbar}\right) (\vec{p}\psi_0) \tag{7}$$

**Solution:** On rappelle que l'opérateur de quantité de mouvement s'exprime comme

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}.$$

Considérons maintenant une fonction  $\Psi(x)$  telle que

$$\Psi(x) = \exp\left(ie\frac{\chi(x) - \chi(x_0)}{\hbar}\right)\psi_0(x).$$

Si on applique l'opérateur  $\vec{p}$  à cette fonction on obtient

$$\begin{aligned}\vec{p}\Psi(x) &= \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\left[\exp\left(ie\frac{\chi(x) - \chi(x_0)}{\hbar}\right)\right]\psi_0(x) \\ &= \frac{\hbar}{i}\left(\frac{ie}{\hbar}\vec{\nabla}\chi\right)\Psi(x) + \exp\left(ie\frac{\chi(x) - \chi(x_0)}{\hbar}\right)\vec{p}\psi_0(x).\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que

$$(\vec{p} - e\vec{A})\Psi(x) = \exp\left(ie\frac{\chi(x) - \chi(x_0)}{\hbar}\right)\vec{p}\psi_0(x)$$

En prenant le carré de l'opérateur  $\vec{p} - e\vec{A}$ , on trouve

$$(\vec{p} - e\vec{A})^2\Psi(x) = \exp\left(ie\frac{\chi(x) - \chi(x_0)}{\hbar}\right)\vec{p}^2\psi_0(x)$$

Or, on sait que  $\psi_0(x)$  est solution de l'équation de Schrödinger stationnaire en l'absence de champ magnétique

$$\frac{\vec{p}^2}{2m}\psi_0(x) = (E - eV)\psi_0(x)$$

d'où

$$\begin{aligned}(\vec{p} - e\vec{A})^2\Psi(x) &= (E - eV)\exp\left(ie\frac{\chi(x) - \chi(x_0)}{\hbar}\right)\psi_0(x) \\ &= (E - eV)\Psi(x).\end{aligned}$$

$\Psi(x)$  est donc la solution de l'équation de Schrödinger stationnaire en présence du champ magnétique donc  $\Psi(x) = \psi_1(x)$ . cqfd.

8. (1 point) On note  $\psi_2(x)$  l'amplitude de la fonction d'onde sur le chemin 2 et on suppose une fois de plus que  $\psi_2(x_0) = \psi_1(x_0) = \psi_0(x_0)$ . Comment s'exprime l'amplitude  $\psi(X)$  de l'onde au point  $X$  ?

**Solution:** L'amplitude de l'onde dans la zone d'interférence, s'écrit simplement comme la somme des amplitudes le long des deux chemins :

$$\psi(X) = \psi_1(X) + \psi_2(X)$$

9. (2 points) Des questions précédentes, déduire la densité de probabilité de présence  $I$  de l'électron au point  $X$  en fonction de  $\varphi$ . Comparer le cas classique au cas quantique. Que pouvez vous en conclure ?

**Solution:** D'après la question précédente

$$\begin{aligned}\psi(X) &= \psi_1(X) + \psi_2(X) \\ &= \left\{ \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \int_{\gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{l}\right) + \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \int_{\gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{l}\right) \right\} \psi_0(X) \\ &= \psi_0 \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \int_{\gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{l}\right) \left[ 1 + \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \int_{\gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} - \frac{ie}{\hbar} \int_{\gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{l}\right) \right] \\ &= \psi_0 \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \int_{\gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{l}\right) \left[ 1 + \exp\left(\frac{ie\varphi}{\hbar}\right) \right]\end{aligned}$$

On en déduit la densité de probabilité

$$\begin{aligned}I &= |\psi(X)|^2 \\ &= |\psi_0|^2 \left(1 + e^{\frac{ie\varphi}{\hbar}}\right)^2 \\ &= 2|\psi_0|^2 \left[1 + \cos\left(\frac{e\varphi}{\hbar}\right)\right].\end{aligned}$$

On obtient une figure d'interférence, la densité de probabilité de présence oscille entre 0 et 1.

10. *Bonus* : Pouvez-vous imaginer une application de ce phénomène ?

**Solution:** Ce phénomène s'observe dans certaines structures semi-conductrices. Les interférences observées permettent de détecter de petites variations de champ magnétique.

## Annexe - Rappel des Formules de calcul différentiel

Soit un domaine  $\mathcal{D}$  de l'espace contractible, les formules standards du calcul différentiel sont

$$\vec{\text{grad}}f = 0 \Rightarrow f = cste$$

$$\vec{\text{rot}}\vec{u} = 0 \Rightarrow \exists f, tq \vec{u} = \vec{\text{grad}}f$$

$$\text{div}\vec{v} = 0 \Rightarrow \exists \vec{u}, tq \vec{v} = \vec{\text{rot}}\vec{u}$$

Formules de Stokes :

- Si  $\gamma$  est un chemin d'extrémité  $a$  et  $b$  et  $f$  est une fonction alors

$$\int_{\gamma} \vec{\text{grad}}f \cdot d\vec{l} = f(b) - f(a)$$

- Si  $S$  est une surface dont le bord est une courbe  $\gamma$  et  $\vec{u}$  un champ de vecteur alors

$$\int_S \vec{\text{rot}}\vec{u} \cdot d^2\vec{s} = \int_{\gamma=\partial S} \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

- Si  $V$  est un volume dont le bord est la surface  $S$  et  $\vec{v}$  un champ de vecteur alors

$$\int_V \text{div}\vec{v} \cdot d^3x = \int_{S=\partial V} \vec{v} \cdot d^2\vec{s}$$

- On a aussi

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}f) = 0$$

et

$$\text{div}(\vec{\text{rot}}\vec{u}) = 0$$