Université Pierre et Marie Curie
Master 1ère année

Précession de Larmor (point de vue quantique)

Correction sommaire

1- Les neutrons sont dans l'état de spin $|+\rangle$. L'appareil SG2 réalise donc une mesure de l'observable $S_u = \overrightarrow{S}.\overrightarrow{u}$.

1.a- $S_u = \sin\theta\ \cos\Phi\ S_x + \sin\theta\ \sin\Phi\ S_y + \cos\theta\ S_z$

La matrice de S_u est donc :

$$S_u = \sin\theta\ \cos\Phi\ \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta\ \sin\Phi\ \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta\ \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_u = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\ e^{-i\Phi} \\ \sin\theta\ e^{i\Phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Cherchons les valeurs propres de S_u.

$$\det(S_u - \lambda I) = (\frac{\hbar}{2}\cos\theta - \lambda)(-\frac{\hbar}{2}\cos\theta - \lambda) - \frac{\hbar^2}{4}\sin^2\theta = \lambda^2 - \frac{\hbar^2}{4}$$

Les valeurs propres sont les valeurs de λ qui annulent ce déterminant.

On a donc deux valeurs propres : $+\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$.

$$|\Omega_+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\ e^{-i\frac{\Phi}{2}}\ |+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\ e^{i\frac{\Phi}{2}}\ |-\rangle$$

$$|\Omega_-\rangle = \sin\frac{\theta}{2}\ e^{-i\frac{\Phi}{2}}\ |+\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\ e^{i\frac{\Phi}{2}}\ |-\rangle$$

On vérifie directement en effectuant les calculs que :

$$S_u\ |\Omega_+\rangle = +\frac{\hbar}{2}\,|\Omega_+\rangle$$

$$S_u\ |\Omega_-\rangle = -\frac{\hbar}{2}\,|\Omega_-\rangle$$

Les vecteurs donnés en énoncé sont donc bien vecteurs propres de l'opérateur S_u.

1.b- Par définition, on a :

$$P_+ = P\left(+\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{|\langle +|\ \Omega_+\rangle|^2}{\langle +|\ +\rangle} = \cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$P_- = P\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{|\langle +|\ \Omega_-\rangle|^2}{\langle +|\ +\rangle} = \sin^2\frac{\theta}{2}$$

On vérifie que : $P_+ + P_- = 1$

1.c- Par définition, on a :

$$\langle S_u\rangle =.\frac{\langle +|\,S_u\,|+\rangle}{\langle +|\ +\rangle} = \frac{\hbar}{2}\cos\theta$$

2- H = - $\gamma\ B\ S_z$

2.a- On pose ω_0 = -γB.

La matrice de H est :

$$H = - \gamma\ B\ \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma B\ \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & \gamma B\ \frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}$$

Elle est diagonale. Les valeurs propres et les vecteurs propres de H sont donc :

$|+\rangle$ associé à la valeur propre $-\gamma B\ \frac{\hbar}{2} = \frac{\hbar\omega_0}{2}$

$|-\rangle$ associé à la valeur propre $\gamma B\ \frac{\hbar}{2} = -\frac{\hbar\omega_0}{2}$

2.b- $|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|+\rangle + |-\rangle)$

2.b.i- $S_x = S_u$ avec $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\Phi = 0$. Les vecteurs propres de S_x sont donc :

$|\Omega_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|-\rangle$

$|\Omega_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|-\rangle$

$|\Psi(0)\rangle = |\Omega_+\rangle$ il s'agit donc de l'état propre associé à la valeur propre $\frac{\hbar}{2}$. La probabilité de mesurer $\frac{\hbar}{2}$ est donc 1.

2.b.ii- $|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}}\ |+\rangle + e^{i\frac{\omega_0 t}{2}}\ |-\rangle \right)$

2.c- $|\Omega_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\ e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}}\ |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\ e^{i\frac{\omega_0 t}{2}}\ |-\rangle = |\Psi(t)\rangle$

Quel que soit le temps t, la mesure de S_u a donc une probabilité de 1 d'obtenir la valeur $\frac{\hbar}{2}$. Le système a donc son spin en permanence orienté suivant l'axe définit par le vecteur tournant $\vec{u}$. Le spin précesse à la même vitesse angulaire que $\vec{u}$, c'est-à-dire ω_0 pulsation de Larmor.