

## Interaction milieux dilués rayonnement

### Travaux dirigés n°2. Résonance magnétique : approche classique

## 1 Première interprétation classique d'une expérience de résonance magnétique

On considère un moment magnétique  $\vec{\mathfrak{M}}$  que l'on plonge dans la superposition de champs magnétiques suivante. On superpose au champ magnétique permanent  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$  un champ magnétique d'amplitude plus petite  $\vec{B}_1$  uniforme, perpendiculaire à  $Oz$  et tournant à la vitesse angulaire  $\vec{\omega}_r$ . On définit un référentiel  $(R_1)$   $OXYz$  tournant avec la même vitesse angulaire que  $\vec{B}_1$  autour de l'axe  $Oz$ . On pose :  $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}_X$  avec  $B_1$  constant et faible devant  $B_0$ . On suppose qu'à l'instant  $t = 0$   $Ox$  et  $OZ$  sont confondus.

On pose :  $\vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0$  ;  $\vec{\omega}_1 = -\gamma \vec{B}_1$  ;  $\vec{\Delta\omega} = (\omega_r - \omega_0) \vec{u}_z$

1. Donner l'équation de  $\left(\frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt}\right)_{R_0}$ . En déduire celle de  $\left(\frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt}\right)_{R_1}$ .
2. Que peut-on dire du vecteur  $(\vec{\omega}_1 - \vec{\Delta\omega})$  dans le référentiel  $(R_1)$  ?
3. A  $t = 0$ , on suppose que  $\vec{\mathfrak{M}}_{t=0} = \mathfrak{M}' \vec{u}_z$ . Comment doit-on choisir  $\omega_r$  pour que  $\mathfrak{M}_z = \vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{u}_z$  oscille entre les deux valeurs opposées  $-\mathfrak{M}'$  et  $+\mathfrak{M}'$  ? Pourquoi parle-t-on alors de résonance ?

**On suppose que cette condition est réalisée dans toute la suite de la partie 1.**

4. Que vaut alors la période des oscillations de  $\mathfrak{M}_z$  ?
5. En déduire sans aucun calcul que, si l'on tient compte des phénomènes de relaxation (temps caractéristique noté  $\tau$ ), la norme  $B_1$  du champ tournant ne doit pas être trop faible, pour que  $\mathfrak{M}_z$  oscille entre deux valeurs sensiblement égales  $-\mathfrak{M}'$  et  $+\mathfrak{M}'$ , durant les premières pseudo-périodes.
6. Le champ  $\vec{B}_1$  est remplacé par un champ  $\vec{B}_2$  alternatif, de direction fixe dans  $(R_0)$  :  $\vec{B}_2 = 2B_1 \cos(\omega_r t) \vec{u}_x$  ; expliquer pourquoi, à la résonance, l'évolution de  $\vec{\mathfrak{M}}$  reste la même, sur une durée de l'ordre de la période déterminée à la question 4.

## 2 Prise en compte de la relaxation dans l'étude de la résonance magnétique : cas de la résonance magnétique nucléaire du noyau de $^{199}\text{Hg}$

Le moment magnétique  $\vec{\mathfrak{M}}$  désigne à présent la moyenne des moments magnétiques d'un ensemble d'atomes de moment cinétique moyen  $\vec{\sigma}$  (ce moment magnétique moyen est donc proportionnel au vecteur aimantation, supposé uniforme, de l'échantillon).

On a :  $\vec{\mathfrak{M}} = \gamma \vec{\sigma}$  ( $\gamma$  rapport gyromagnétique). On nomme  $\vec{\mathfrak{M}}_0 = \mathfrak{M}_0 \vec{u}_z$  la valeur de  $\vec{\mathfrak{M}}$  à l'équilibre thermique en présence du seul champ  $\vec{B}_0$ .

On suppose alors que la valeur de  $\left(\frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt}\right)_{R_0}$  est la somme de deux contributions :

- l'une, déjà étudiée, due aux champs magnétiques appliqués à partir de l'instant  $t = 0$ .
- l'autre, égale à  $\frac{\vec{\mathfrak{M}}_0 - \vec{\mathfrak{M}}}{\tau}$ , due aux phénomènes de relaxation (les temps de relaxation longitudinale et transversale sont ici égaux  $T_1 = T_2 = \tau$ ).

1. On s'intéresse désormais à l'évolution de  $N$  moments magnétiques par unité de volume. L'aimantation s'écrit alors :  $\vec{M} = N\vec{\mathfrak{M}}$ .

Etablir les équations de Bloch qui décrivent la vitesse d'évolution de  $\vec{M}$  dans le repère tournant avec  $\vec{B}_1$ ,  $OXYz$ .

2. On désigne par  $u$ ,  $v$  et  $w$ , les composantes cartésiennes de  $\vec{M}$  en régime permanent dans le repère  $OXYz$ .  $u$  est mesurée le long de  $\vec{B}_1$ ,  $v$  est perpendiculaire à  $\vec{B}_0$  et  $\vec{B}_1$ ,  $w$  est parallèle à  $\vec{B}_0$ . On rappelle que :

$$u = -M_0 \frac{(\omega_r - \omega_0) \omega_1}{(\omega_r - \omega_0)^2 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega_1^2}$$

$$v = -M_0 \frac{\omega_1 / \tau}{(\omega_r - \omega_0)^2 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega_1^2}$$

(a) Pour quelle valeur de  $\omega_r$  a-t-on  $u = v$  ?

(b) Calculer la largeur  $\Delta\omega_r$  à mi-hauteur de la courbe  $v(\omega_r)$  et l'écart  $\delta\omega_r$  entre les abscisses du minimum et du maximum de  $u(\omega_r)$ .

(c) Soient  $u_m$  et  $v_m$  les valeurs extrémales de  $|u|$  et de  $|v|$ . Calculer  $\frac{u_m}{v_m}$ .

(d) Exprimer  $\omega_1$  en fonction de  $\Delta\omega_r$  et de  $\tau$ .

3. La figure jointe est une courbe de RMN prise sur des noyaux de  $^{199}\text{Hg}$  très protégés des perturbations extérieures. On ne s'étonnera donc pas de la durée élevée de  $\tau$ . Le principe de détection est le phénomène d'induction électromagnétique qui engendre une fém induite dans une bobine. La quantité observée pour les composantes  $u$  et  $v$  (voies X et Y) est donc exprimée en mV. Les valeurs écrites sur la courbe sont en Hertz (unité de fréquence et non de pulsation, en particulier pour la valeur de  $\nu_0$  qui correspond à  $\omega_0$ ). Les échelles sont données, soit directement sur le graphe, soit exprimées dans le cartouche à côté du graphe.

(a) Identifier les deux courbes.

(b) Mesurer  $\Delta\omega_r$ ,  $\delta\omega_r$ ,  $\frac{u_m}{v_m}$ . En déduire  $\tau$ . Entre  $\Delta\omega_r$  et  $\delta\omega_r$ , quelle est la quantité déterminée avec la meilleure précision ?

(c) Déduire des mesures la valeur  $\omega_1$ . Est-on bien dans les conditions de résonance ?

(d) On donne  $B_0 = 8,708 \text{ G} = 8,70810^{-4} \text{ T}$ . Calculer le rapport gyromagnétique du noyau  $^{199}\text{Hg}$  et son facteur de Landé.

# 1 Première interprétation classique d'une expérience de résonance magnétique

$$1. \left( \frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} \right)_{R_0} = (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \wedge \vec{\mathfrak{M}}$$

$$\left( \frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} \right)_{R_1} = \left( \frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} \right)_{R_0} - \vec{\omega}_r \wedge \vec{\mathfrak{M}}$$

soit  $\left( \frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} \right)_{R_1} = (\vec{\omega}_1 - \vec{\Delta\omega}) \wedge \vec{\mathfrak{M}}$

2.  $(\vec{\omega}_1 - \vec{\Delta\omega})$  est un vecteur constant dans le référentiel  $(R_1)$ .

3. Dans  $(R_1)$ ,  $\vec{\mathfrak{M}}$  précesse autour de  $(\vec{\omega}_1 - \vec{\Delta\omega})$ . Pour que  $\mathfrak{M}_z$  oscille entre  $-\mathfrak{M}'$  et  $+\mathfrak{M}'$ , il faut que le vecteur-rotation soit perpendiculaire à l'axe  $Oz$ . Soit  $\vec{\Delta\omega} = \vec{0}$  ou  $\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_0 = -\gamma\vec{B}_0$ .

On parle de résonance car la présence du champ  $\vec{B}_1$ , pourtant d'amplitude négligeable, provoque une modification complète du moment magnétique. Cette situation est maximale pour une valeur donnée de  $\vec{\omega}_r$ .

4. La période des oscillations de  $\mathfrak{M}_z$  est :  $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\gamma B_1}$ .

5. Pour que des oscillations aient lieu avant la relaxation, il faut avoir  $T \ll \tau$ , soit  $B_1 \gg \frac{2\pi}{\gamma\tau}$ .

6. Le champ  $\vec{B}_2$  est la somme du champ  $\vec{B}_1$  et d'un champ de même amplitude tournant en sens inverse. Le champ tournant en sens inverse a sa résonance pour  $\vec{\omega}_r = -\vec{\omega}_0$  et donc a un effet négligeable pour la résonance correspondant au champ  $\vec{B}_1$ .

# 2 Prise en compte de la relaxation dans l'étude de la résonance magnétique : cas de la résonance magnétique nucléaire du noyau de $^{199}\text{Hg}$

1. Si  $M_0 = N \mathfrak{M}_0$  alors :

$$\frac{dM_X}{dt} = (\omega_r - \omega_0) M_Y - \frac{M_X}{\tau}$$

$$\frac{dM_Y}{dt} = -(\omega_r - \omega_0) M_X - \omega_1 M_Z - \frac{M_Y}{\tau}$$

$$\frac{dM_Z}{dt} = \omega_1 M_Y - \frac{M_Z - M_0}{\tau}$$

2. (a)  $\omega_r = \omega_0 + \frac{1}{\tau}$ .

(b)  $v$  a une forme Lorentzienne. La largeur à mi-hauteur est donnée par les deux valeurs de  $\omega$  telles que :  $v(\omega) = v_m/2 = v(\omega_0)/2$

$$\Delta\omega_r = 2\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega_1^2}$$

$\delta\omega_r$  est déterminée en cherchant les deux valeurs pour lesquelles la dérivée de  $u(\omega_r)$  s'annule.

$$\delta\omega_r = 2\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega_1^2} = \Delta\omega_r.$$

$$(c) \quad u_m = \left| u\left(\omega_0 \pm \frac{\delta\omega_r}{2}\right) \right| \text{ et } v_m = v(\omega_0)$$

$$\frac{u_m}{v_m} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + (\omega_1\tau)^2}$$

$$(d) \quad \omega_1^2 = \left(\frac{\Delta\omega_r}{2}\right)^2 - \frac{1}{\tau^2}$$

3. (a)  $u$  est antisymétrique et  $v$  est symétrique

(b) L'échelle en Hz est donnée par un trait :

$$\Delta\omega_r = 2\pi \times 2,75 \times 0,016 = 0,28 \text{ rad.s}^{-1}$$

On vérifie aisément que, dans les barres d'erreurs, on a bien  $\Delta\omega_r = \delta\omega_r$ . Au vu des courbes, la largeur à mi-hauteur est mesurée de façon nettement plus précise que la distance entre les extrema de  $u$ .

Le cartouche indique qu'il y a un facteur 2 entre les échelles de  $u$  ( $=X$ ) et de  $v$  ( $=Y$ ).

$$\frac{u_m}{v_m} = 1,26 \quad \text{soit } \tau = 17,7 \text{ s.}$$

$$(c) \quad \omega_1^2 = \left(\frac{\Delta\omega_r}{2}\right)^2 - \frac{1}{\tau^2} = 0,29 \implies \omega_1 = 0,13 \text{ rad.s}^{-1}$$

On a bien les conditions de résonance puisque  $\omega_1 \ll \omega_0 = 6,610 \cdot 10^3 \times 2\pi = 4,153 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$  (d'après la valeur indiquée sur la courbe) et, de plus,  $\frac{2\pi}{\omega_1} > \tau$

$$(d) \quad \gamma = \frac{\omega_0}{B_0} = 4,8 \cdot 10^7 \text{ C.kg}^{-1}$$

$$g = \frac{2m_p}{e}\gamma \approx 1 \text{ (il s'agit ici d'une résonance magnétique nucléaire)}$$

R71M

no: 3/11/81

Ampl: 30dB

stoeleur synchrone:

gain 20dB

no de temps 100 MG

chius RING 3

V = 6.610

Uspesage 199

registreur: 40

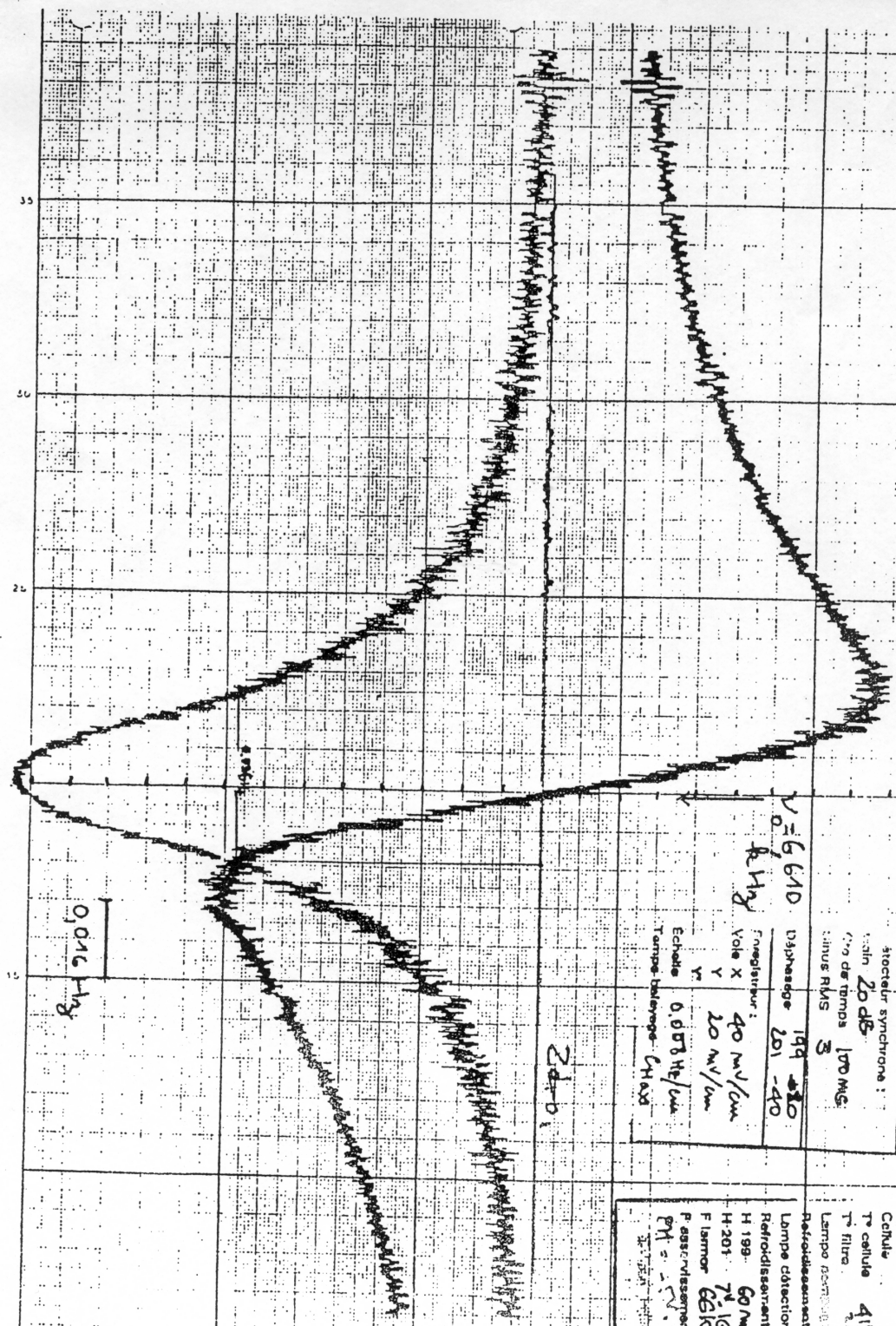
Vole X 40 mV/cm

Y 20 mV/cm

Echelle 0.0078 Hz/cm

Temps balayage 40 ms

24dB



M

Isotope 199

Cellule 415

T cellule 415

T filtre

Lampo 200000

Retrodissennat

Lampe detection 2.1

Retrodissennat

H 199 60 mV

H 201 7.16 dB

F lamor 6610

P assomissement 2440

PH 5

3.75

3.75

3.75

3.75

3.75

3.75

3.75

3.75

3.75

3.75

3.75

3.75

3.75

3.75

3.75

3.75