Interaction milieux dilués rayonnement

Travaux dirigés n°3. Résonance magnétique quantique

On considère une particule de spin 1/2 plongée dans un champ magnétique statique $\overrightarrow{B}_0 = B_0 \, \overrightarrow{e}_z$.
Supposons maintenant qu'en plus du champ statique, on ajoute un champ perturbatif $\overrightarrow{B}_1(t)$ perpendiculaire à $\overrightarrow{B}_0$, de module constant, et tournant autour de $\overrightarrow{B}_0$ à la vitesse angulaire ω.
On pose : $\omega_0 = -\gamma \, B_0$ et $\omega_1 = -\gamma \, B_1$.

1. Donner l'expression de l'hamiltonien du système et en déduire sa matrice représentative dans la base $\{|+\rangle \, , \, |-\rangle\}$.
2. Le vecteur d'état du système peut s'écrire sous la forme :

$$|\varphi(t)\rangle = a(t) \, |+\rangle + b(t) \, |-\rangle$$

   A partir de l'équation d'évolution (de Schrödinger), établir les équations différentielles auxquelles satisfont $a(t)$ et $b(t)$.
3. On pose : $\alpha(t) = e^{i\omega t/2} \, a(t)$ et $\beta(t) = e^{-i\omega t/2} \, b(t)$. Ecrire avec ces nouvelles variables un nouveau système d'équations différentielles.
   Quel est l'avantage d'un tel changement de variables ?
4. Résoudre ces équations dans le cas général. On posera : $\Omega = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2}$.
5. On suppose pour toute la suite que, à $t = 0$: $|\varphi(0)\rangle = |+\rangle$. Calculer $|\varphi(t)\rangle$.
6. Calculer la probabilité $\mathcal{P}_{\pm}$ de trouver lors d'une mesure à l'instant t le système dans l'état $|-\rangle$.

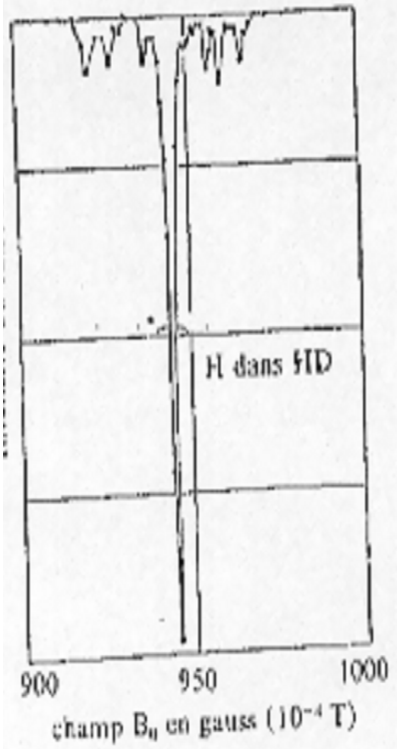
1. $H_s = -\overrightarrow{\mu} \cdot \overrightarrow{B} = \omega_0\, S_z + \omega_1\, \cos\omega t \cdot S_x + \omega_1\, \sin\omega t \cdot S_y$
   Soit : $H_s = \dfrac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}$

2. On a $i\hbar \dfrac{\mathrm{d}\,|\varphi\rangle}{\mathrm{d}t} = H_s\, |\varphi\rangle$ avec $|\varphi(t)\rangle = a(t)\ \ |+\rangle + b(t)\ \ |-\rangle$
   Ce qui donne :
$$i\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_0}{2}\, a + \frac{\omega_1}{2} e^{-i\omega t}\, b\ , \quad i\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = \frac{-\omega_0}{2}\, b + \frac{\omega_1}{2} e^{+i\omega t}\, a$$

3. pose : $\alpha(t) = e^{i\omega t/2}\ a(t)$ et $\beta(t) = e^{-i\omega t/2}\ b(t)$.
$$i\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_0 - \omega}{2}\, \alpha + \frac{\omega_1}{2}\, \beta\ , \quad i\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega - \omega_0}{2}\, \beta + \frac{\omega_1}{2}\, \alpha$$
   Ce changement de variables permet d'avoir des équations dont les coefficients sont indépendants du temps. Il correspond en classique à un changement de référentiel via une rotation dépendant du temps (analogue au changement de référentiel pour la résonance classique).
   Les solutions sont :
$$\alpha = A\, \omega_1\, e^{-i\Omega t/2} + B\, \omega_1\, e^{i\Omega t/2}$$
$$\beta = A\ (\delta + \Omega)\ e^{-i\Omega t/2} + B\ (\delta - \Omega)\ e^{i\Omega t/2}$$
   avec $\delta = \omega - \omega_0\ ,\quad \Omega = \sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}$

4. Avec la condition initiale, on a : $A = \dfrac{\Omega - \delta}{2\,\omega_1\,\Omega}\ ,\quad B = \dfrac{\Omega + \delta}{2\,\omega_1\,\Omega}$
   $\alpha = \cos(\Omega t/2) + i\dfrac{\delta}{\Omega}\sin(\Omega t/2)\ \ ,\quad \beta = -\, i\dfrac{\omega_1}{\Omega}\ \sin(\Omega t/2)$
   Soit encore :
   $|\psi(t)\rangle = \left[\cos(\Omega t/2) + i\dfrac{\delta}{\Omega}\sin(\Omega t/2)\right]\ e^{-i\omega t/2}\ |+\rangle\ -\ i\dfrac{\omega_1}{\Omega}\ \sin(\Omega t/2)\ e^{i\omega t/2}\ |-\rangle$

5. Soient $\mathcal{P}_{++}$ la probabilité de trouver le système à l'instant t dans l'état $|+\rangle$ et $\mathcal{P}_{\pm}$ la probabilité pour que le système soit passé de l'état $|+\rangle$ à l'instant $t = 0$ à l'état $|-\rangle$, à l'instant t
$$\mathcal{P}_{++} = |\alpha(t)|^2 = \cos^2(\Omega t/2) + \left(\frac{\delta}{\Omega}\right)^2 \sin^2(\Omega t/2)$$
$$\mathcal{P}_{\pm} = |\beta(t)|^2 = \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2\ \sin^2(\Omega t/2)$$



Rabi opérait sur un faisceau de molécules HD à
pression ($p < 5.10^{-4}$ mm Hg) et basse temp
$T = 78°K$. Le champ tournant était
$B_1 = 10^{-4}T$, $\nu = 4$ Mhz, et on faisait varier le
B_0. La courbe de résonance du proton est mont
contre.