Master de sciences et technologie

Interaction matière-rayonnement

Effet d'une onde électromagnétique sur un atome à deux niveaux

Introduction

On considère un système atomique dont l'espace des états est le produit d'un espace de positions, $\mathcal{E}_p$ par un espace de spin, $\mathcal{E}_s$.

On admet que l'opérateur moment dipolaire électrique, $\vec{D}$, est un opérateur vectoriel. Ses composantes satisfont donc les relations suivantes

$$\begin{array}{lll} [J_x, D_x] = 0, & [J_x, D_y] = i\hbar D_z, & [J_x, D_z] = -i\hbar D_y \\ [J_y, D_x] = -i\hbar D_z, & [J_y, D_y] = 0, & [J_y, D_z] = i\hbar D_x \\ [J_z, D_x] = i\hbar D_y, & [J_z, D_y] = -i\hbar D_x, & [J_z, D_z] = 0 \end{array} \tag{1}$$

$\vec{J}$ est le moment cinétique total : $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ où $\vec{L}$ est le moment orbital qui agit sur $\mathcal{E}_p$ tandis que $\vec{S}$ est l'opérateur de spin qui agit sur $\mathcal{E}_s$.

On admet en outre que D_k, composante quelconque de $\vec{D}$, agit sur $\mathcal{E}_p$, seulement. Ceci implique les relations $[D_k, S_j] = 0$ où S_j est une composante quelconque du spin $\vec{S}$.

L'hamiltonien du système est H_0. La base composée est une base orthonormée de l'espace des états, dont les vecteurs notés $|n, \ell, s, m_\ell, m_s\rangle = \left|\psi_{n,\ell,m_\ell}\right\rangle \left|\psi_{s,m_s}\right\rangle$ satisfont les relations

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 |n, \ell, s, m_\ell, m_s\rangle = E^0_{n,\ell} |n, \ell, s, m_\ell, m_s\rangle & \\ \vec{L}^2 |n, \ell, s, m_\ell, m_s\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1) |n, \ell, s, m_\ell, m_s\rangle, & L_z |n, \ell, s, m_\ell, m_s\rangle = m_\ell \hbar |n, \ell, s, m_\ell, m_s\rangle \\ \vec{S}^2 |n, \ell, s, m_\ell, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1) |n, \ell, s, m_\ell, m_s\rangle, & S_z |n, \ell, s, m_\ell, m_s\rangle = m_s \hbar |n, \ell, s, m_\ell, m_s\rangle \end{array}\right\} \tag{2}$$

Enfin, on suppose les relations :

$$\langle n', \ell, s, m_\ell, m_s| D_z |n, \ell, s, m_\ell, m_s\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle n, \ell, s, m_\ell, m_s| \vec{D} |n, \ell, s, m_\ell, m_s\rangle = \vec{0} \tag{3}$$

De telles relations sont satisfaites, par exemple, par les atomes alcalins.

1- Règles de sélection

Pour mémoire : La base standard est notée $\{|\tau, j, m_j\rangle\}$; les vecteurs de cette base satisfont les relations

$$\vec{J}^2 |\tau, j, m_j\rangle = \hbar^2 j(j+1) |\tau, j, m_j\rangle \quad \text{et} \quad J_z |\tau, j, m_j\rangle = m_j \hbar |\tau, j, m_j\rangle \quad \text{avec} \quad m_j \in [-j, -j+1, ..., j-1, j]$$

On rappelle que les relations (1) qui définissent un opérateur vectoriel conduisent aux règles de sélections :

$$\begin{array}{rcl} \left\langle \tau', j', m'_j \right| \vec{D} |\tau, j, m_j\rangle & = & 0 \text{ si les conditions suivantes ne sont pas satisfaites :} \\ \left(j'\right. & = & \left. j \pm 1 \text{ ou } j' = j \neq 0\right) \;\; \textbf{et} \;\; \left(m'_j = m_j \pm 1 \text{ ou } m'_j = m_j\right) \end{array}$$

Dans la suite, nous nous intéressons aux règles de sélection sur s, m_s, ℓ, m_ℓ, concernant les systèmes atomiques considérés dont les propriétés sont données en introduction. Nous n'utiliserons pas la base standard ; ci-dessous, $|a\rangle$ et $|b\rangle$ désignent deux vecteurs de la base composée.

1-a. Démontrer les règles de sélections suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \langle b| D_k |a\rangle & = & 0 \;\text{ si les conditions suivantes ne sont pas satisfaites} \\ & & \left\{ s_b = s_a \quad \text{et} \quad m^b_s = m^a_s \right. \end{array}$$

où s_b, m^b_s, s_a et m^a_s sont les valeurs de s et m_s pour les états $|b\rangle$ et $|a\rangle$ respectivement.

1-b. En substituant $\vec{L}$ à $\vec{J}$, établir les relations de commutations semblables aux relations (1) ci-dessus. En déduire sans démonstration les règles de sélection concernant ℓ et m_ℓ.

1-c. On considère l'opérateur $H_1 = -\vec{E}(t) \cdot \vec{D}$ où $\vec{E}(t)$ est un champ électrique qui est polarisé linéairement de telle sorte que $E_x = E_y = 0$, et qui, à l'approximation dipolaire, ne dépend que du temps t.

Démontrer les règles de sélection suivantes

$$\begin{aligned} \langle b| H_1 |a\rangle &= 0 \text{ si les conditions suivantes ne sont pas satisfaites} \\ m_\ell^b &= m_\ell^a \text{ et } \ell_b = \ell_a \pm 1 \end{aligned}$$

où ℓ_b, m_ℓ^b, ℓ_a et m_ℓ^a sont les valeurs de ℓ et m pour les états $|b\rangle$ et $|a\rangle$ respectivement.

2- Oscillations de Rabi

Un atome à deux niveaux est soumis au champ électrique, $\vec{E}$, d'une onde électromagnétique sinusoïdale, polarisée linéairement :

$$E_x = E_y = 0 \quad \text{et} \quad E_z = E_0 \sin(\omega t)$$

La pulsation de résonance est notée ω_0; elle est définie par la relation $\hbar\omega_0 = \mathcal{E}_b - \mathcal{E}_a$ où $\mathcal{E}_b - \mathcal{E}_a$ est la différence d'énergie entre les deux niveaux (en l'absence de la perturbation électromagnétique).

A l'instant initial ($t = 0$), le système est dans l'état $|a\rangle$. A l'approximation du champ tournant, on démontre que la probabilité pour que le système soit observé dans l'état $|b\rangle$, à l'instant t, est

$$P_{a\to b} = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2}$$

avec $\Omega = \sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}$ où le "***désaccord***" est $\delta = \omega - \omega_0$, tandis que $\omega_1 = \left| \dfrac{E_0 \ \langle b| D_z |a\rangle}{\hbar} \right|$ est la "***pulsation de Rabi***".

2-a. Calculer l'ordre de grandeur de ω_1 pour une onde électromagnétique quasi plane, issue d'un laser, caractérisée par une intensité de l'ordre de $10^{-4}\,\mathrm{W\,mm^{-2}}$. L'élément de matrice $|\langle b| D_z |a\rangle|$ sera pris de l'ordre de $3 \cdot 10^{-30} SI$.

2-b. Déterminer la période des oscillations de Rabi et l'ordre de grandeur du maximum de $P_{a\to b}$ à résonance et pour $|\delta| = 10^9\,\mathrm{s^{-1}}$.

3- Polarisabilité

On considère le système précédent (cf. §2 ci-dessus). L'onde électromagnétique provoque un perturbation de l'état atomique ; celui-ci est décrit, à l'instant t, par le ket $|\psi\rangle = C_a(t)|a\rangle + C_b(t)|b\rangle$.

Le champ électrique E_0 est assez petit pour que l'hamiltonien d'interaction $H_1 = -E_z(t) \cdot D_z$ soit considéré comme une perturbation. Au premier ordre de la théorie des perturbations, en régime permanent, on trouve

$$C_a = e^{-iE_a t/\hbar}, \quad C_b = -\frac{E_0 \ \langle b| D_z |a\rangle}{2\hbar} e^{-iE_a t/\hbar} \times \frac{ie^{-i\omega t}}{\delta + i\Gamma}$$

Les notations sont celles du paragraphe 2-. La quantité $\Gamma = \dfrac{1}{\tau}$ est une quantité réelle où τ représente un temps de relaxation phénoménologique.

On pose $\vec{d} = \dfrac{\langle\psi| \vec{D} |\psi\rangle}{\langle\psi |\psi\rangle}$; c'est la moyenne sur l'état quantique du moment dipolaire électrique induit par le champ électrique considéré.

3-a. Si le champ électrique modifie le système atomique, la quantité $\langle b| D_z |a\rangle$ est non nulle. Montrer que dans ces conditions $d_x = d_y = 0$ et que, par conséquent, $\vec{d}$ est parallèle à $\vec{E}$.

3-b. On démontre alors la relation

$$d_z = \mathrm{Re}\left[-\frac{E_0 \ |\langle b| D_z |a\rangle|^2}{\hbar} \times \frac{ie^{-i\omega t}}{\delta + i\Gamma} \right]$$

On pose $\alpha^c = -\dfrac{|\langle b| D_z |a\rangle|^2}{\hbar(\delta + i\Gamma)}$ et $\vec{E}^c = \left(0, 0, iE_0 e^{-i\omega t}\right)$.

On définit un moment dipolaire complexe $\vec{d}^c = \alpha^c \cdot \vec{E}^c$. On vérifie alors que les grandeurs physiques $\vec{E}$ et $\vec{d}$, introduites précédemment, sont les parties réelle de $\vec{E}^c$ et $\vec{d}^c$.

α^c est la "***polarisabilité***" (complexe) du système atomique dans l'état $|a\rangle$.

Calculer l'ordre de grandeur de $|\alpha^c|$ à résonance et hors résonance, pour $|\delta| \sim 10^{10}\,\mathrm{s^{-1}}$.

On prendra $\Gamma \sim 10^8\,\mathrm{s^{-1}}$.

3-c. Calculer la moyenne temporelle $\left\langle \vec{E}\cdot\vec{d}\right\rangle$ de $\vec{E}\cdot\vec{d}$.

4- Miroir à atomes

Rappels : Un système atomique immergé dans un champ électrique $\vec{E}$ présente une énergie potentielle V. On donne à $\vec{E}$ la variation $d\vec{E}$. L'énergie varie alors : $dV = -\vec{d}\cdot d\vec{E}$. La quantité $\vec{d}$ qui apparaît dans l'expression de dV est par définition le moment dipolaire du système atomique[1]. Si $\vec{d}$ caractérise le système atomique seul et est indépendant de $\vec{E}$, on trouve alors $V = -\vec{d}\cdot\vec{E}$ (ici on tient compte du fait que $V = 0$ lorsque $\vec{E} = \vec{0}$). Par contre si $\vec{d}$ est un dipôle induit par la présence de $\vec{E}$, il dépend de $\vec{E}$ et caractérise la réponse du système atomique à la présence de $\vec{E}$.

Posons $\vec{E} = \lambda\vec{e}$ où $\vec{e}$ est donné une fois pour toutes. Dans le cas qui nous concerne la réponse est linéaire. Le moment dipolaire satisfait la relation $\vec{d}_{(\lambda\vec{e})} = \lambda\ \vec{d}_{(\vec{e})}$.

Donnons à λ la petite variation $d\lambda$. Il vient $dV = -\lambda\vec{d}_{(\vec{e})}\cdot d\lambda\vec{e}$. L'énergie est une fonction de λ et en intégrant on obtient $V(\lambda) = -\dfrac{\lambda^2}{2}\vec{d}_{(\vec{e})}\cdot\vec{e}$ (ici encore, on tient compte du fait que $V = 0$ lorsque $\vec{E} = \vec{0}$). En introduisant $\vec{E}$, il vient $V = -\dfrac{1}{2}\lambda\vec{d}_{(\vec{e})}\cdot\lambda\vec{e} = -\dfrac{1}{2}\vec{d}_{(\vec{E})}\cdot\vec{E}$, ce que l'on note plus simplement $V = -\dfrac{1}{2}\vec{d}\cdot\vec{E}$.

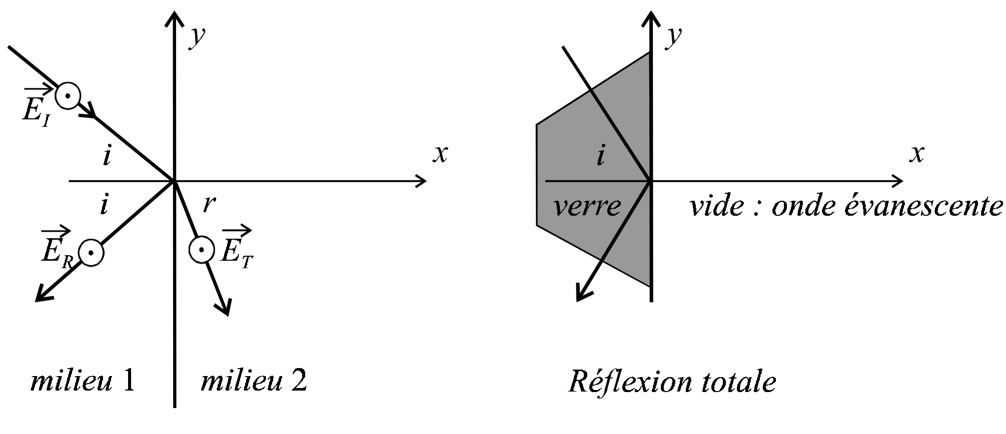
Lorsque $\vec{E}$ dépend du temps, on remplace $\vec{d}\cdot\vec{E}$ par sa moyenne temporelle $\left\langle \vec{d}\cdot\vec{E}\right\rangle$.

4-a. Donner l'expression de V déduite de la question 3-c.

4-b. On suppose que E_0 dépend de la position, $\vec{r}$. Dans ces conditions $V = V(\vec{r})$. On interprète $-\vec{\nabla}V$ comme une force agissant sur l'atome.

Préciser les conditions dans lesquelles cette force est dirigée suivant les valeurs croissantes de $|E_0|$ et suivant les valeurs décroissantes.

4-c. On considère la réflexion d'une onde électromagnétique polarisée suivant l'axe Oz, perpendiculaire au plan de la figure.



Dans le cas considéré, sous sa forme complexe l'onde transmise s'écrit

$$E_x = E_y = 0, \qquad E_z = E_T\ e^{-i(\omega t - k^x x - k^y y)} \text{ où } E_T \text{ est une constante.}$$

Donner l'expression de k^x et k^y en fonction de la vitesse de la lumière dans le milieu 2, de la pulsation ω, et de l'angle de réfraction r.

Exprimer $\sin r$ et $\cos r$ en fonction de i et de l'indice $n = n_1/n_2 > 1$ (indice du milieu 1 par rapport au milieu 2)

4-d. Dans le cas de la réflexion totale $n\sin i > 1$ avec $n = n_1/n_2 > 1$, ceci n'est possible que si $\cos^2 r = 1 - n^2\sin^2 i$ est négatif et par conséquent si $\cos r$ est un imaginaire pure. Dans ces conditions, $k^x = i\kappa$

Donner l'expression de κ et celle de $|E_0|$, amplitude du champ électrique en fonction de x.

A quelle condition peut-on réaliser un miroir à atome ?

En utilisant les ordres de grandeurs donnés précédemment, déterminer l'ordre de grandeur de la vitesse maximale autorisée pour un atome dont le nombre de masse est de l'ordre de 100.

[1] On peut considérer que V est une fonction des composante, E_k, de $\vec{E}$. Le dipôle admet pour composantes $d_k = -\dfrac{\partial V}{\partial E_k}$.

Master de sciences et technologie

Interaction matière-rayonnement

Effet d'une onde électromagnétique sur un atome à deux niveaux

(corrigé)

1- Règles de sélection

1-a. Formons $\langle b| D_k\vec{S}^2 |a\rangle = \hbar^2 s_a (s_a+1) \langle b| D_k |a\rangle$. La relation $\left[D_k, \vec{S}^2\right] = 0$ implique $\langle b| D_k\vec{S}^2 |a\rangle = \langle b| \vec{S}^2 D_k |a\rangle = \hbar^2 s_b (s_b+1) \langle b| D_k |a\rangle$. On en déduit $\hbar^2 (s_a(s_a+1) - s_b(s_b+1)) \langle b| D_k |a\rangle = 0$ d'où

$$\hbar^2 (s_a - s_b)(s_a + s_b + 1) \langle b| D_k |a\rangle = 0$$

Les relations $s_a \geq 0$ et $s_b \geq 0$ impliquent $(s_a + s_b + 1) > 0$. On en déduit

$$(s_a - s_b) \langle b| D_k |a\rangle = 0$$

Ainsi pour $s_a \neq s_b$, l'élément de matrice $\langle b| D_k |a\rangle$ est nécessairement nul.

De même nous formons $\langle b| D_k S_z |a\rangle = \hbar m_s^a \langle b| D_k |a\rangle$. Nous utilisons la relation $[D_k, S_z] = 0$ pour démontrer l'égalité $\hbar \left(m_s^a - m_s^b\right) \langle b| D_k |a\rangle = 0$. On en déduit

$$\left(m_s^a - m_s^b\right) \langle b| D_k |a\rangle = 0$$

Ainsi pour $m_s^a \neq m_s^b$, l'élément de matrice $\langle b| D_k |a\rangle$ est nécessairement nul.

1-b. La relation $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ainsi que les relations $\left[D_k, \vec{S}\right] = \vec{0}$, impliquent

$$\begin{array}{lll} [L_x, D_x] = 0, & [L_x, D_y] = i\hbar D_z, & [L_x, D_z] = -i\hbar D_y \\ [L_y, D_x] = -i\hbar D_z, & [L_y, D_y] = 0, & [L_y, D_z] = i\hbar D_x \\ [L_z, D_x] = i\hbar D_y, & [L_z, D_y] = -i\hbar D_x, & [L_z, D_z] = 0 \end{array}$$

En effectuant les substitutions

$$\begin{array}{ll} \vec{J} \to \vec{L} & j \to \ell = (\ell_a \text{ ou } \ell_b) \\ J_z \to L_z & m_j \to m_\ell = \left(m_\ell^a \text{ ou } m_\ell^b\right) \end{array}$$

on en déduit

$$\boxed{\begin{array}{c} \langle b| \vec{D} |a\rangle = \vec{0} \text{ si les conditions suivantes ne sont pas satisfaites} \\ \left\{\ell_b = \ell_a \pm 1 \text{ ou } \ell_b = \ell_a \neq 0 \text{ et } m_\ell^b = m_\ell^a \pm 1 \text{ ou } m_\ell^b = m_\ell^a \right. \end{array}}$$

1-c. La relation $[D_z, L_z] = 0$ implique $[H_1, L_z] = 0$ car $H_1 = -E_z D_z$. Formons $\langle b| H_1 L_z |a\rangle = \hbar m_\ell^a \langle b| H_1 |a\rangle$, utilisons la relation de commutation : $\langle b| H_1 L_z |a\rangle = \langle b| L_z H_1 |a\rangle = \hbar m_\ell^b \langle b| H_1 |a\rangle$. On en déduit

$$\left(m_\ell^a - m_\ell^b\right) \langle b| H_1 |a\rangle = 0$$

Ainsi pour $m_\ell^a \neq m_\ell^b$, l'élément de matrice $\langle b| H_1 |a\rangle$ est nécessairement nul.

La relation $\langle n', \ell, s, m_\ell, m_s| D_z |n, \ell, s, m_\ell, m_s\rangle = 0$ implique $\langle n', \ell, s, m_\ell, m_s| H_1 |n, \ell, s, m_\ell, m_s\rangle = 0$. Par conséquent, pour que $\langle b| H_1 |a\rangle$ soit non nul, conjointement avec les conditions déjà démontrées, $m_s^a = m_s^b$, $s_a = s_b$, $m_\ell^a = m_\ell^b$ et $\left(\ell_b = \ell_a \pm 1 \text{ ou } \ell_b = \ell_a \neq 0\right)$, il faut que soit satisfaite la condition $\ell_b \neq \ell_a$ soit encore $\ell_b = \ell_a \pm 1$.

En résumé, les règles de sélections sont les suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \langle b| H_1 |a\rangle \neq 0 \text{ seulement si, le cas échéant, les conditions suivantes sont satisfaites} \\ \text{1-} & \ell_b = \ell_a \pm 1 \text{ et } m_\ell^b = m_\ell^a \\ \text{2-} & s_b = s_a \text{ et } m_s^b = m_s^a \end{array}}$$

2- Oscillations de Rabi

2-a. La densité d'énergie moyenne de l'onde est $U = \frac{\varepsilon_0}{2}\left\langle \vec{E}^2\right\rangle + \frac{1}{2\mu_0}\left\langle \vec{B}^2\right\rangle$, avec $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$. Les moyennes $\langle ... \rangle$ sont des moyennes temporelles. Dans une onde plane $\left\|\vec{E}\right\| = c\left\|\vec{B}\right\|$. Ici $\left\langle \vec{E}^2\right\rangle = \frac{1}{2}E_0^2$, on en déduit

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2 \text{ avec } cU = I = 10^{-4}\,\mathrm{W\,mm^{-2}} \text{ et } \varepsilon_0 \simeq 8,85\times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$$

On en déduit $U = 3,3\times 10^{-7}\,\mathrm{J\,m^{-3}}$ et $E_0 \simeq 274\,\mathrm{V\,m^{-1}} \sim 300\,\mathrm{V\,m^{-1}}$.
$\omega_1 = \left|\frac{E_0\ \langle b|\, D_z\,|a\rangle}{\hbar}\right| \sim \frac{300\times 3\cdot 10^{-30}}{10^{-34}} \sim 10^7\,\mathrm{s^{-1}}$.

$$\boxed{\omega_1 \sim 10^7\,\mathrm{s^{-1}}}$$

2-b. $P_{a\to b} = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega t}{2}$ avec $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ et $\Omega = \sqrt{\delta^2+\omega_1^2}$

- A résonance et plus généralement pour $|\delta| << \omega_1$
  $\Omega \simeq \omega_1 \Rightarrow T \sim \frac{2\pi}{10^7} \sim \boxed{6\times 10^{-7}\,\mathrm{s} \sim T}$ et $\boxed{P_{\max} \sim 1}$
- Hors résonance et plus généralement pour $|\delta| >> \omega_1$
  $\Omega \simeq |\delta| \Rightarrow T \sim \frac{2\pi}{10^9} \sim \boxed{6\times 10^{-9}\,\mathrm{s} \sim T}$ et $\boxed{P_{\max} \sim \left(\frac{\omega_1}{|\delta|}\right)^2 \sim 10^{-4} << 1}$

3- Polarisabilité

3-a. $\vec{D}$ étant un opérateur vectoriel, il vient $[L_z, D_x] = i\hbar D_y$. On en déduit $\langle a|\, L_z D_x - D_x L_z\,|b\rangle = i\hbar\,\langle a|\, D_y\,|b\rangle = \hbar\left(m_\ell^a - m_\ell^b\right)\langle a|\, D_x\,|b\rangle$. La règle de sélection $m_\ell^a = m_\ell^b$ implique donc $\langle a|\, D_y\,|b\rangle = 0$. De même on démontre $\langle a|\, D_x\,|b\rangle = 0$. Ces relations ainsi que les relations $\langle p|\, \vec{D}\,|p\rangle = 0$ pour $|p\rangle = |b\rangle$ ou $|a\rangle$ impliquent $\boxed{d_x = d_y = 0}$.

3-b. $\alpha^c = -\frac{\left|\langle b|\, D_z\,|a\rangle\right|^2}{\hbar(\delta + i\Gamma)}$.

A résonance $\delta = 0$ où plus généralement $|\delta| << \Gamma)$ il vient $|\alpha^c| = \frac{\left|\langle b|\, D_z\,|a\rangle\right|^2}{\hbar\Gamma} \sim \frac{9\cdot 10^{-60}}{10^{-34}\times 10^8} = 9\cdot 10^{-34} SI$ soit $\boxed{|\alpha^c| \sim 10^{-33} SI}$

Hors résonance, pour $|\delta| >> \Gamma$, il vient $|\alpha^c| = \frac{\left|\langle b|\, D_z\,|a\rangle\right|^2}{\hbar|\delta|}$ soit ici $|\alpha^c| = \frac{9\cdot 10^{-60}}{10^{-34}\times 10^{10}} = 9\cdot 10^{-36} SI$ soit $\boxed{|\alpha^c| \sim 10^{-35} SI}$

3-c. $d_z = \mathrm{Re}\left[-\frac{E_0\ \left|\langle b|\, D_z\,|a\rangle\right|^2}{\hbar}\times\frac{ie^{-i\omega t}}{\delta + i\Gamma}\right] = -\frac{E_0\ \left|\langle b|\, D_z\,|a\rangle\right|^2}{\hbar\left(\delta^2+\Gamma^2\right)}\left(\delta\sin(\omega t) + \Gamma\cos(\omega t)\right)$.

$\vec{E}\cdot\vec{d} = E_z d_z = E_0\sin(\omega t)\times\frac{-E_0\ \left|\langle b|\, D_z\,|a\rangle\right|^2}{\hbar\left(\delta^2+\Gamma^2\right)}\left(\delta\sin(\omega t) + \Gamma\cos(\omega t)\right)$

$\vec{E}\cdot\vec{d} = \frac{E_0^2\ \left|\langle b|\, D_z\,|a\rangle\right|^2}{\hbar\left(\delta^2+\Gamma^2\right)}\times\left(-\delta\sin^2(\omega t) - \frac{\Gamma}{2}\sin(2\omega t)\right)$ d'où

$$\boxed{\left\langle \vec{E}\cdot\vec{d}\right\rangle = \frac{E_0^2\ \left|\langle b|\, D_z\,|a\rangle\right|^2}{\hbar\left(\delta^2+\Gamma^2\right)}\times\left(-\frac{\delta}{2}\right)}$$

4- Miroir à atomes

4-a

$$\boxed{V = -\frac{1}{2}\left\langle \vec{E}\cdot\vec{d}\right\rangle = \frac{E_0^2\ \left|\langle b|\, D_z\,|a\rangle\right|^2}{4\hbar\left(\delta^2+\Gamma^2\right)}\times\delta, \text{ avec } \delta = \omega - \omega_0}$$

4-b. $-\vec{\nabla} V = \vec{F} = \dfrac{|\langle b|\, D_z \,|a\rangle|^2}{4\hbar\left(\delta^2+\Gamma^2\right)} \times (\omega_0 - \omega) \times \vec{\nabla}\left(E_0^2\right)$. Le vecteur $\vec{\nabla}\left(E_0^2\right)$ est dirigé vers les valeurs croissantes de $|E_0|$ on en déduit

$\omega < \omega_0 \Rightarrow \vec{F}$ **est dirigé vers les valeurs croissantes de** $|E_0|$

$\omega > \omega_0 \Rightarrow \vec{F}$ **est dirigé vers les valeurs décroissantes de** $|E_0|$

4-c. $\boxed{k^x = \dfrac{\omega}{c}\cos r \text{ et } k^y = -\dfrac{\omega}{c}\sin r}$ avec $\boxed{n \sin i = \sin r}$ où $n = n_1/n_2 > 1$.

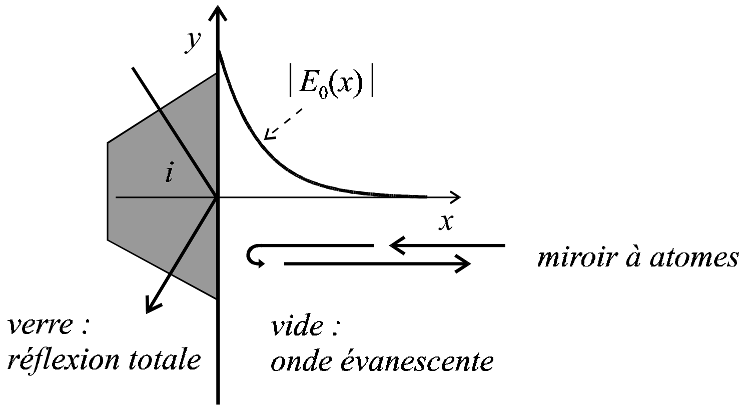
4-d. Dans le cas de la réflexion totale $n\sin i > 1$ avec $n = n_1/n_2 > 1$, ceci n'est possible que si $\cos^2 r = 1 - \sin^2 r = 1 - n^2 \sin^2 i$ est négatif. C'est à dire si $\cos r = \sqrt{1-\sin^2 r} = \sqrt{1 - n^2\sin^2 i}$ est un imaginaire pur. Dans ces conditions, $k^x = i\kappa = \pm i\dfrac{\omega}{c}\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}$. On en déduit (dans le milieu 2)

$E_z = E_T\, e^{-i\left(\omega t + \frac{\omega}{c}\sin r\cdot y - \frac{\omega}{c}\cos r \cdot x\right)} = E_T\, e^{\pm\frac{\omega}{c}\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}\cdot x}\, e^{-i\left(\omega t + \frac{\omega}{c}\sin r\cdot y\right)}$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide (milieu 2).

Le champ reste fini quand $x \to \infty$, par conséquent $E_z = E_T\, e^{-\frac{\omega}{c}\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}\cdot x}\, e^{-i\left(\omega t + \frac{\omega}{c}\sin r\cdot y\right)}$.

D'autre part on a posé $E_z = E_T\, e^{-i\left(\omega t - i\kappa x + \frac{\omega}{c}\sin r\cdot y\right)} = E_T\, e^{-\kappa x}\, e^{-i\left(\omega t + \frac{\omega}{c}\sin r \cdot y\right)}$. On en déduit

$$\boxed{\kappa = \frac{\omega}{c}\sqrt{n^2\sin^2 i - 1}} \quad \text{et} \quad \boxed{|E_0| = |E_T|\, e^{-\kappa x}}$$



D'après les résultats de la question 4-b, pour $\boxed{\omega > \omega_0}$ la force qui agit sur l'atome est opposée à sa vitesse. Cependant, un miroir ne sera réalisé que dans la mesure où la vitesse n'est pas trop élevée afin que la force soit suffisante pour stopper l'atome avant qu'il n'atteigne le dioptre. L'énergie potentielle acquise, V, est alors égale à l'énergie cinétique perdue $\dfrac{1}{2}mv^2$.

$V = \dfrac{E_0^2\ |\langle b|\, D_z\,|a\rangle|^2}{4\hbar\left(\delta^2+\Gamma^2\right)} \times \delta$ est maximal pour $x = 0$ et $\delta = \Gamma$, sa valeur est alors $V_{\max} = \dfrac{E_T^2\ |\langle b|\, D_z\,|a\rangle|^2}{8\hbar\Gamma}$.

On en déduit la condition de réflexion : $V_{\max} \geq \dfrac{1}{2}mv^2$, c'est à dire

$v^2 \lesssim \dfrac{E_T^2\ |\langle b|\, D_z\,|a\rangle|^2}{4\hbar m\Gamma} \sim \dfrac{(300)^2 \times 9\cdot 10^{-60}}{4\times 10^{-34}\times 10^8 \times 100 \times 1,7\cdot 10^{-27}} \sim 10^{-4}$ soit $\boxed{v \sim \text{ cm s}^{-1}}$.

Remarque : avec des intensités lumineuses très supérieures à celle considérée ici, on obtient pour certains atomes, des valeurs de v supérieures à 10 fois la valeur ci-dessus.