Master de sciences et technologie

Interactions matière-rayonnement

Les lasers

I- Calculs d'ordres de grandeurs

Une matrice de YAG d'indice $n_0 = 1,5$ est dopée par des ions néodyme (Nd^{3+}). L'ensemble constitue un système amplificateur à 4 niveaux.

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, on considère une onde électromagnétique de longueur d'onde dans le vide, λ, voisine de λ_0 qui se propage suivant l'axe Ox. Cette onde est caractérisée par son champ électrique (en notation complexe), $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0 \, e^{-i(\omega t - nkx)}$ où $\overrightarrow{E}_0$, ω, k et n sont des constantes. L'indice complexe du YAG dopé est $n = n_0 + n' + in''$ où n' et n'' sont des nombres réels.

I-a. L'intensité, I, de l'onde est une fonction de x. Démontrer la relation $\dfrac{dI}{dx} = \alpha\, I$ où α est une constante dont on donnera l'expression en fonction de n'' et λ. Préciser les unités de α dans le système international.

I-b. En utilisant les données de l'annexe calculer n'' pour $\lambda = 1,0641\,\mu$m et $\lambda = 1,0645\,\mu$m.
Estimer la largeur, $\Delta\omega$, à mi-hauteur de la fonction $f(\omega)$ qui définit le profil du gain.

I-c. Dans la suite du problème, on admet que $f(\omega)$ est une fonction créneau, de demi largeur $\Delta\omega/2$, centrée sur ω_0.
Donner la valeur de ω_0. Estimer la valeur numérique de $f(\omega)$ pour $\omega \in [\omega_0 - \Delta\omega/2,\, \omega_0 + \Delta\omega/2]$. En déduire la valeur de $N_b - N_a = \Delta N$.

I-d. Le milieu amplificateur est un barreau de volume $V = 10\,\mathrm{cm}^3$. On considère le cas $I = 0$ (pas d'onde à amplifier).
Déterminer l'ordre de grandeur de R nécessaire pour réaliser de façon permanente la condition $N_b - N_a = 10^{23}\,\mathrm{m}^{-3}$. En déduire le nombre d'atomes, n, portés par seconde du niveau $|0\rangle$ au niveau $|b\rangle$.

I-e. Les photons utiles au pompage ont une fréquence $\nu \in \left[4\,10^{14}\,\mathrm{Hz},\, 7,5\,10^{14}\,\mathrm{Hz}\right]$. Estimer un ordre de grandeur de la puissance optique absorbée pour maintenir l'inversion de population $N_b - N_a = 10^{23}\,\mathrm{m}^{-3}$.

I-f. En réalité, à partir de la situation d'équilibre thermodynamique, on produit l'inversion de population en un temps très court. On assure alors le passage d'une impulsion lumineuse très brève dans le barreau. L'ensemble de l'opération dure un temps très inférieur à t_{sp}.
Décrire qualitativement les phénomènes qui surviennent et estimer l'ordre de grandeur de la puissance optique moyenne absorbée, $\overline{P}$, nécessaire pour assurer l'amplification d'impulsions successives à la fréquence 10 Hz.

Annexe au problème I :

Rappels et données concernant le milieu considéré.

Rappels: La vitesse de la lumière dans le vide est $c = 3\,10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. La constante de Planck est $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} \simeq 10^{-34}\,\mathrm{J\,s^{-1}}$. On rappelle l'expression de l'indice complexe du milieu: $n = n_0 + n' + in''$ avec

$$n' = 2\frac{\omega_0 - \omega}{\Delta\omega}\, n'' \;, \quad n'' = (N_a - N_b)\,\frac{\pi^2}{2n_0^2}\frac{c_0^3}{\omega_0^3}\frac{f(\omega)}{t_{sp}}$$

où n_0 est l'indice du milieu passif. On rappelle également l'expression de la probabilité par unité de temps de la transition laser stimulée, au voisinage de la résonance

$$W \simeq \frac{\pi^2 c_0^2}{\hbar\omega_0^3}\frac{1}{n_0^2} \times \frac{1}{t_{sp}\Delta\omega} \times I$$

Coefficient d'amplification linéaire: La figure 1, ci-dessous, représente le coefficient d'amplification linéaire, α, en fonction de la longueur d'onde de la lumière dans le vide, λ.

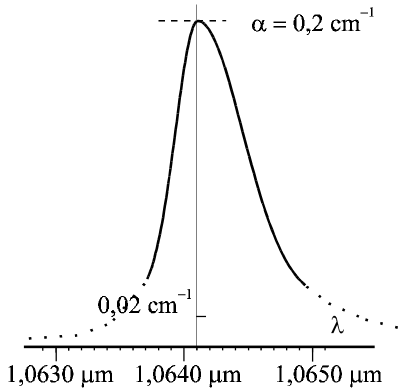


figure 1.

Propriétés du milieu et transitions optiques à considérer: L'indice passif du milieu est $n_0 = 1,5$.

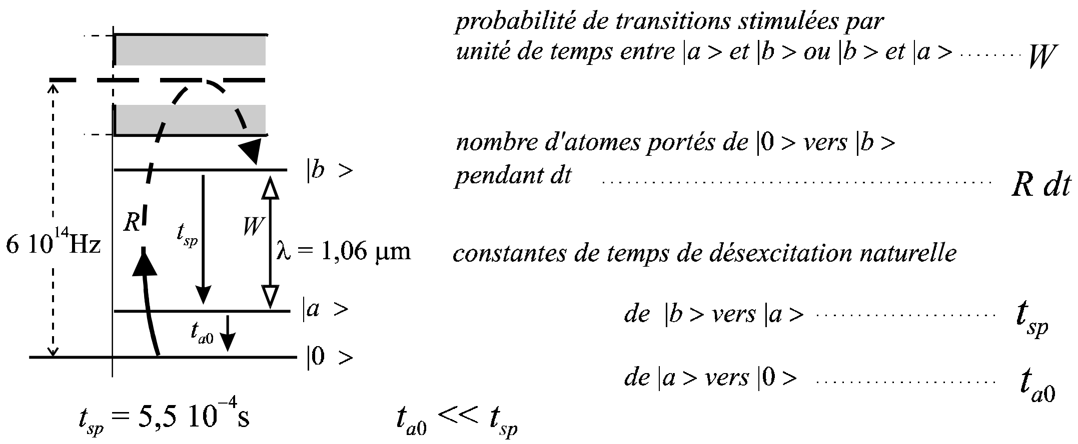


figure 2.

II- Lasers à 3 et 4 niveaux

On considère un milieu amplificateur dont la matrice est un milieu transparent d'indice n. Ce milieu est dopé par des ions dont le nombre par unité de volume est N.

L'état fondamental est noté $|0\rangle$, son énergie est prise égale à zéro, par convention. Les niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$ d'énergie E_a et E_b (avec $E_b > E_a$), correspondent à la transition laser.

Un système de pompage optique porte les ions du niveau fondamental, $|0\rangle$ au niveau $|b\rangle$ par l'intermédiaire d'un niveau $|p\rangle$, d'énergie $E_p > E_b$. La proportion de ions portés du niveau $|0\rangle$ au niveau $|b\rangle$ pendant le temps dt est dt/t_p où t_p, est un temps caractéristique du système de pompage.

Nous supposons que les seules transitions spontanées qui interviennent dans le problème sont les transitions $|b\rangle \rightarrow |a\rangle$ et $|a\rangle \rightarrow |0\rangle$. Les nombres d'ions qui effectuent la transition par unité de temps sont respectivement $N_b \dfrac{dt}{t_{sp}}$ et $N_a \dfrac{dt}{t_a}$.

On notera W la probabilité de transition induite par unité de temps et on admettra que celle-ci possède la même valeur pour les deux transitions $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ et $|b\rangle \rightarrow |a\rangle$.
On trouvera en annexe les formules générales utiles ainsi que les données numériques permettant la comparaison de deux lasers : un laser à rubis (trois niveaux) et un laser au néodyme dans une matrice de YAG (quatre niveaux).

1. Généralités.

a- Représenter sur un diagramme les divers niveaux d'énergie et les diverses transitions entre les niveaux. On distinguera le laser à trois niveaux ($|a\rangle = |0\rangle$) du laser à 4 niveaux ($|a\rangle \neq |0\rangle$).

b- Soient N_0, N_a et N_b le nombre de ions par unité de volume dans les états $|0\rangle$, $|a\rangle$ et $|b\rangle$.
Donner les équations différentielles qui décrivent la cinétique du laser à trois niveaux ainsi que la cinétique du laser à quatre niveaux (on notera W, la probabilité de transition induite par unité de temps).

c- On considère le laser à trois niveaux en régime permanent. Exprimer $N_b - N_a$ en fonction de N, W, t_p et t_{sp}. Donner la condition entre t_p et t_{sp} pour que le milieu soit amplificateur.

d- En utilisant les expressions de W et γ données en annexe, démontrer, pour le laser à trois niveaux, la relation

$$\frac{1}{I}\frac{dI}{dx} = \frac{\gamma_0}{1 + I\,/\,I_s}$$

où γ_0 et I_s sont des constantes dont on donnera l'expression, tandis que I est l'intensité d'une onde lumineuse, plane, monochromatique qui se propage dans le milieu suivant l'axe Ox.

e- On admet que la même expression de I_s peut être utilisée pour le laser à 4 niveaux et pour le laser à 3 niveaux.
Commenter le régime d'amplification pour $I << I_s$ et $I >> I_s$.
Calculer I_s pour chacun des lasers considérés en supposant que t_p et t_s sont du même ordre de grandeur ($t_p \sim t_{sp}$)

2. Puissance utile.

a- On veut obtenir une amplification de 1% par centimètre. En déduire la valeur du coefficient d'amplification linéaire, γ, dans le système international (préciser les unités).
Donner pour chacun des deux lasers l'ordre de grandeur de $N_b - N_a$.

b- Pendant le temps t_{sp}, le niveau $|b\rangle$ se dépeuple spontanément. Donner, en fonction de N_b, l'*ordre de grandeur* du nombre de systèmes par unités de volume, qu'il faut porter du niveau $|0\rangle$ au niveau $|b\rangle$ pendant le temps t_{sp} afin de maintenir un régime permanent. On fera le calcul pour les deux lasers considérés en admettant, ici, que la transition $|a\rangle \rightarrow |0\rangle$ est instantanée.

c- Estimer, pour chacun des deux lasers, l'*ordre de grandeur* de l'énergie minimale qu'il faut fournir au système par unité de volume pendant le temps t_{sp}, pour maintenir l'inversion de population précédente. Quelle est l'*ordre de grandeur* de la puissance moyenne correspondante?

3. Discussion du fonctionnement en continu

La puissance calculée précédemment est fournie par l'absorption de lumière qui traverse le milieu amplificateur. On admet que le rendement des lampes est $0,5$ (rapport de la puissance optique émise à la puissance électrique consommée), que 5% de la lumière émise tombe dans la bande de fréquence utile et que 7% de cette lumière est absorbée.
On souhaite construire un laser qui fonctionne en continu. Comparer la puissance nécessaire pour un laser à rubis et un laser YAG au néodyme.

4. Seuil d'inversion.

Cette question est indépendante des précédentes.
Un barreau de YAG est traité de telle sorte que ses faces terminales soient des miroirs. L'interféromètre de Fabry et Perot ainsi constitué présente les caractéristiques suivantes :
Longueur : $\ell = 20\,\mathrm{cm}$. Durée d'un circuit : $\dfrac{2n\ell}{c_0} = 2\,10^{-9}\,\mathrm{s}$. Perte d'énergie par circuit : $p = 6\%$.
Déterminer la valeur numérique de l'inversion de population à réaliser pour que cet oscillateur optique devienne une source de lumière.

Annexe

• Probabilité de transition induite par une onde progressive d'intensité I :

$$W = \frac{\gamma\, I}{\hbar\omega_0\,(N_b - N_a)}$$

où $\hbar = 1,05\,10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ est la constante de Planck et ω_0 la pulsation de la transition laser considérée.
• Coefficient d'amplification linéaire :

$$\gamma \sim (N_b - N_a)\,\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\lambda_0}{n}\right)^2 \frac{1}{t_{sp}\,\Delta\nu}$$

où λ_0 est la longueur d'onde de la lumière dans le vide, n est l'indice optique de la matrice, $\Delta\nu$ la largeur de la courbe de gain.

	le rubis		le YAG
t_{sp}	$3\,10^{-3}\,\mathrm{s}$		$5{,}5\,10^{-4}\,\mathrm{s}$
$E_p - E_0$	$3\,\mathrm{eV}$		$3\,\mathrm{eV}$
n	$1,8$		$1,5$
λ_0	$694,3\,\mathrm{nm}$		$1064\,\mathrm{nm}$
$\Delta\nu^{(\dagger)}$	$2 \times 10^{11}\,\mathrm{Hz}$		$1,8 \times 10^{11}\,\mathrm{Hz}$
densité de ions	$2{\times}10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$		non mentionné

$^{(\dagger)}$La largeur de la courbe de gain est essentiellement une largeur thermique dont la valeur est donnée à la température ordinaire (de l'ordre de 280 K).

Master de sciences et technologie

Interactions matière-rayonnement

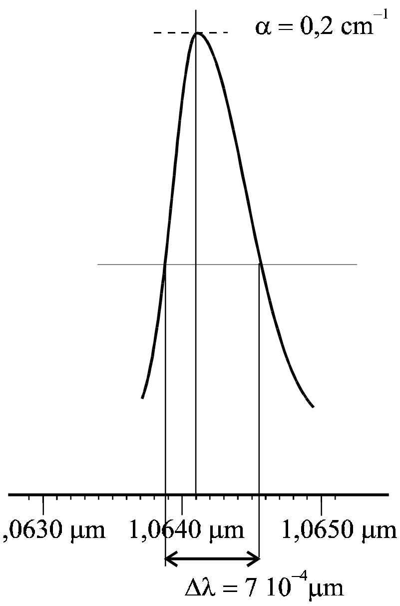
Les lasers

Corrigé

I- Calculs d'ordre de grandeurs

I-a. $I \propto \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{E}^{\dagger} \propto e^{-2n''k\,x}$ ce qui implique $dI/I = -2n''k\,dx$ et $\boxed{\alpha = -2n''k = \frac{-4\pi n''}{\lambda}}$ où λ est la longueur d'onde dans le vide. **L'unité de** α **est le** m^{-1}.

I-b.



$\underline{\lambda = 1,0641\,\mu\mathrm{m}} \Rightarrow \alpha = 20\,\mathrm{m}^{-1}$ soit $\boxed{n'' = -\frac{\lambda\alpha}{4\pi} = -1,7 \times 10^{-6}}$

$\underline{\lambda = 1,0645\,\mu\mathrm{m}} \Rightarrow \alpha = 10\,\mathrm{m}^{-1}$ soit $\boxed{n'' = -\frac{\lambda\alpha}{4\pi} = -0,8 \times 10^{-6}}$

$\Delta\lambda = 0,7\,10^{-9}$ m avec $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ soit $\boxed{\Delta\omega \simeq \left|\frac{2\pi c\,\Delta\lambda}{\lambda^2}\right| = 1,2\,10^{12}\,\mathrm{s}^{-1}}$.

I-c. $\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi c_0}{\lambda_0} = 1,8 \times 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}}$.

$\boxed{f = \frac{1}{\Delta\omega} = 8,3 \times 10^{-13}\,\mathrm{s}}$ car $\int f(\omega)d\omega = 1$

$\alpha = \Delta N\,\frac{\pi^2 c^2}{\omega_0^2}\frac{1}{n_0^2}\frac{f}{t_{sp}}$ avec $t_{sp} \simeq 5,5 \times 10^{-4}$ s, il vient $\Delta N = \boxed{N_b - N_a \simeq \frac{4\alpha n_0^2}{\lambda^2} t_{sp}\Delta\omega = 10^{23}\,\mathrm{m}^{-3}}$

I-d. La relation $t_{a0} << t_{sp}$ implique que l'on peut considérer que le niveau $|a\rangle$ se vide très rapidement si bien que $\Delta N \simeq N_b = 10^{22}\,\mathrm{m}^{-3}$. Le niveau $|b\rangle$ nécessite le temps t_{sp} pour se vider; il faut donc lui apporter $N_b = 10^{23}$ ions par m^3 toutes les $t_{sp} = 5,5 \times 10^{-4}$ s soit $n \sim \frac{N_b}{t_{sp}} = \frac{10^{23}}{5,5 \times 10^{-4}} = \boxed{1,8 \times 10^{26} ions/\mathrm{s} = n}$.

I-e. On peut considérer que porter un ion dans le niveau $|b\rangle$ demande $h_P \nu_p = 6,6 \cdot 10^{-34} \times 6 \cdot 10^{14} = 4 \times 10^{-19}$ J.
La puissance à dépenser est donc $n h_P \nu_p \sim 1,8 \cdot 10^{26} \times 4 \cdot 10^{-19} \sim 7 \times 10^7 \, \mathrm{W\,m^{-3}}$, soit $\underline{700\,\mathrm{W} \text{ pour } 10\,\mathrm{cm}^3}$

I-f. Initialement les niveaux N_a et N_b sont pratiquement vides. Pendant l'opération, les désexcitations naturelles n'ont pas le temps de se produire. On remplit donc le niveau $|b\rangle$. Dans ce cas, il faut fournir l'énergie utile $E_\nu = N_b \times V \times h_P \, \nu$ avec $V = 10\,\mathrm{cm}^3$, $\nu \sim 6 \times 10^{14}$ Hz, et $N_b \simeq 10^{23}\,\mathrm{m}^{-3}$. Il vient $E_\nu \simeq 0,4$ J. Cette énergie doit être fournie 10 fois par seconde. Soit $\boxed{\overline{P} = 4\,\mathrm{W}}$. L'énergie électrique à fournir est beaucoup plus grande compte tenu des mauvais rendements des diverses transformations :

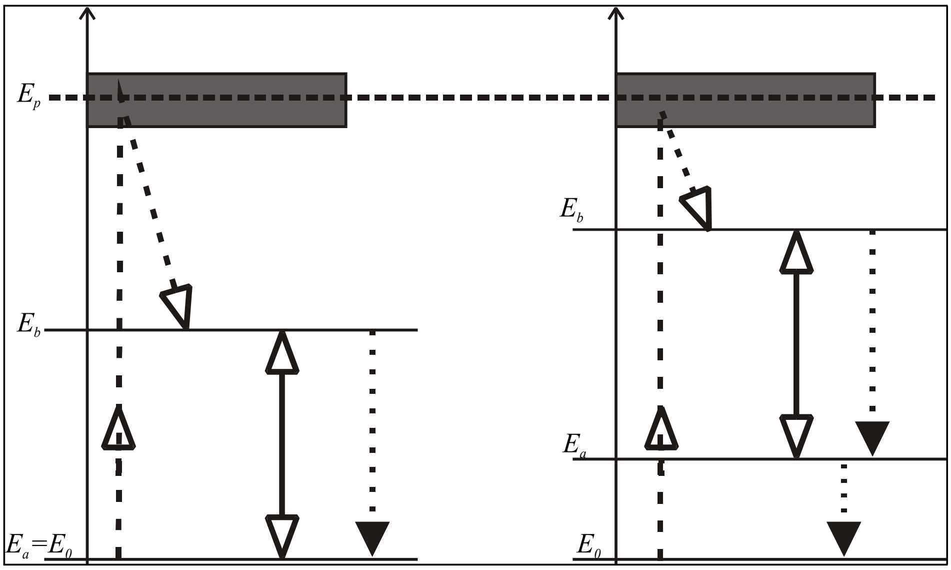
puissance électrique → puissance lumineuse → puissance lumineuse utile$^{(\dagger)}$ → *puissance absorbée.*

(†) : puissance lumineuse correspondant à la bande passante de transition vers les niveaux $|p\rangle$.
(voir le problème suivant)

II- Lasers à 3 et 4 niveaux

1. Généralités.

a-



b- Trois niveaux

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \dfrac{dN_a}{dt} & = & -\dfrac{N_a}{t_p} + (N_b - N_a)\,W + \dfrac{N_b}{t_{sp}} \\ \dfrac{dN_b}{dt} & = & \dfrac{N_a}{t_p} - (N_b - N_a)\,W - \dfrac{N_b}{t_{sp}} \end{array}}$$

Quatre niveaux

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \dfrac{dN_0}{dt} & = & -\dfrac{N_0}{t_p} + \dfrac{N_a}{t_{a0}} \\ \dfrac{dN_a}{dt} & = & -\dfrac{N_a}{t_a} + (N_b - N_a)\,W + \dfrac{N_b}{t_{sp}} \\ \dfrac{dN_b}{dt} & = & \dfrac{N_0}{t_p} - (N_b - N_a)\,W - \dfrac{N_b}{t_{sp}} \end{array}}$$

c-

$$0 = \frac{N_a}{t_p} - (N_b - N_a)\,W - \frac{N_b}{t_{sp}} \text{ avec } \; N_a + N_b = N = cte$$

On en déduit

$$\boxed{N_b - N_a = N\frac{t_{sp} - t_p}{t_{sp} + t_p}\frac{1}{1 + 2W\dfrac{t_p t_{sp}}{t_p + t_{sp}}}}$$

<u>Amplification pour $N_b - N_a > 0$ soit $t_{sp} > t_p$.</u>

d-

$$\frac{1}{I}\frac{dI}{dx} = \gamma = (N_b - N_a)\,\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\lambda_0}{n}\right)^2 \frac{1}{t_{sp}\,\Delta\nu} \text{ (cf. annexe)}$$

avec

$$N_b - N_a = N\frac{t_{sp} - t_p}{t_{sp} + t_p}\frac{1}{1 + 2W\dfrac{t_p t_{sp}}{t_p + t_{sp}}} \text{ cf ci-dessus}$$

et

$$W = \frac{I}{\hbar\omega_0}\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\lambda_0}{n}\right)^2\frac{1}{t_{sp}\,\Delta\nu}$$

Je pose $\boxed{\frac{1}{I_s} = \frac{1}{\hbar\omega_0}\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\lambda_0}{n}\right)^2\frac{1}{\Delta\nu}\frac{2t_p}{t_p + t_{sp}}}$ et

$\boxed{\gamma_0 = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\lambda_0}{n}\right)^2\frac{1}{t_{sp}\,\Delta\nu}N\frac{t_{sp} - t_p}{t_{sp} + t_p}}$ et on obtient l'expression voulue:

$$\boxed{\frac{1}{I}\frac{dI}{dx} = \frac{\gamma_0}{1 + I\,/\,I_s}}$$

e- $\underline{I << I_s \Rightarrow I = I_0 e^{\gamma_0 x}}$: régime d'amplification exponentielle.
$\underline{I >> I_s \Rightarrow I = I_s\gamma_0 X + cte}$: régime d'amplification linéaire.
$\hbar\omega_0 = 3\,\mathrm{eV}$, $t_p \sim t_{sp} \Rightarrow$
$I_s \sim 8\pi\hbar\omega_0\left(\frac{n}{\lambda_0}\right)^2\Delta\nu = 16\pi\hbar c_0\frac{n^2\Delta\nu}{\lambda_0^3} = \begin{cases}\boxed{150\,\mathrm{W\,cm^{-2}}\text{ pour le rubis}}\\ \boxed{50\,\mathrm{W\,cm^{-2}}\text{ pour le YAG}}\end{cases}$

2. Puissance utile.

a- $\boxed{\gamma = 0,01\,\mathrm{cm^{-1}} = 1\,\mathrm{m^{-1}}}$.
$\gamma \sim (N_b - N_a)\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\lambda_0}{n}\right)^2\frac{1}{t_{sp}\,\Delta\nu}$ soit
$(N_b - N_a) = 8\pi\gamma\left(\frac{n}{\lambda_0}\right)^2 t_{sp}\,\Delta\nu = \begin{cases}\boxed{10^{23}\,\mathrm{m^{-3}}\text{ pour le rubis}}\\ \boxed{5\,10^{21}\,\mathrm{m^{-3}}\text{ pour le YAG}}\end{cases}$

b- Pour le rubis, il faut "monter" environ $N/2$ systèmes pendant t_{sp}
Pour le YAG il suffit de monter $\underline{N_b - N_a \simeq N_b\text{ système pendant }t_{sp}}$ car N_a tombe à zéro très vite.

c- Pour le rubis il faut fournir $3\,\mathrm{eV} \times 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$ et pour le YAG : $3\,\mathrm{eV} \times 5\,10^{21}\,\mathrm{m^{-3}}$
Il faut donc fournir en t_{sp} : $E = \begin{cases}\boxed{4,8\,\mathrm{J\,cm^{-3}}\text{ pour le rubis}}\\ \boxed{2,4\times 10^{-3}\,\mathrm{J\,cm^{-3}}\text{ pour le YAG}}\end{cases}$
Ce qui représente un puissance moyenne $P_u = \frac{E}{t_{sp}} = \begin{cases}\boxed{1600\,\mathrm{W\,cm^{-3}}\text{ pour le rubis}}\\ \boxed{4,4\,\mathrm{W\,cm^{-3}}\text{ pour le YAG}}\end{cases}$

3. Discussion du fonctionnement en continu.

Le rendement énergétique est $r = 0,5 \times 0,05 \times 0,08 = 2 \times 10^{-3}$. La puissance nécessaire est donc
rubis : $1600/2\cdot 10^{-3} = 800\,\mathrm{kW\,cm^{-3}}$
YAG $6,8\cdot 10^{-3}/2\cdot 10^{-3} = 3,4\,\mathrm{W\,cm^{-3}}$
On trouve donc $\frac{P_{rubis}}{P_{YAG}} = 2\cdot 10^5 >> 1$.
Le YAG est beaucoup plus favorable à un fonctionnement continu que le rubis.

4. Seuil d'inversion.

La distance parcourue en une passe est 2ℓ, le gain est donc $\frac{\delta E}{E} = 2\gamma\ell$, les pertes sont $\frac{\Delta E}{E} = p$. En régime permanent il vient $2\gamma\ell = p$ soit $\gamma = \frac{p}{2\ell} = \frac{0,06}{0,4} = 0,15\,\mathrm{m^{-1}}$ avec $(N_b - N_a) = 8\pi\gamma\left(\frac{n}{\lambda_0}\right)^2 t_{sp}\,\Delta\nu$, il vient

$$(N_b - N_a) = 8\pi\frac{p}{2\ell}\left(\frac{n}{\lambda_0}\right)^2 t_{sp}\,\Delta\nu = 8\times\pi\times 0.15\times\left(\frac{1.5}{1.06\times 10^{-6}}\right)^2\times 5.5\times 10^{-4}\times 1.8\times 10^{11}$$

$$\boxed{N_b - N_a = 7,5\times 10^{20}\,\mathrm{m^{-3}}}$$