Interaction milieux dilués-rayonnement

DM-Corrigé sommaire

A-Cas général (10pts)

1. L'hamiltonien d'interaction est donné par

$$
\begin{aligned}
H_{int} &= -\vec{D}\cdot\vec{E} \\
&= -D_z E_z \\
&= -\big(|g\rangle D_{eg}\langle e| + |e\rangle D_{eg}^*\langle g|\big) E_0\cos(\omega t - kx)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

   Avec $D_{eg} = \langle g|Dz|e\rangle$. (*1pt*)
   On remarque ici que l'opérateur du moment dipolaire étant impair, il ne couple que les états différents entre eux. Autrement dit, $\langle g|Dz|g\rangle = \langle e|Dz|e\rangle = 0$. (*1pt*)

2. L'équation d'évolution est donnée par l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$
\begin{aligned}
i\hbar\partial_t|\Psi(t)\rangle &= \big(H_0 + H_{int}\big)|\Psi(t)\rangle \\
&= \begin{pmatrix} \hbar\omega_g & -E_0 D_{eg} cos(\omega t - kx) \\ -E_0 D_{eg}^* cos(\omega t - kx) & \hbar\omega_e \end{pmatrix}|\Psi(t)\rangle
\end{aligned}
\tag{2}
$$

   (*1pt*)

3. Si on décompose $|Psi(t)\rangle$ sur la base $|g\rangle, |e\rangle$ tel que

$$
|\Psi(t)\rangle = a(t)|g\rangle + b(t)|e\rangle \tag{3}
$$

   Les équations d'évolution pour $a(t)$ et $b(t)$ sont

$$
\begin{aligned}
i\hbar\dot{a}(t) &= \hbar\omega_g a(t) - \frac{E_0 D_{eg}}{2}\big(e^{i\omega t + e^{-i\omega t}}\big)b(t) \\
i\hbar\dot{b}(t) &= \hbar\omega_e b(t) - \frac{E_0 D_{eg}^*}{2}\big(e^{i\omega t + e^{-i\omega t}}\big)a(t)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

   Ici on néglige la dépendance spatiale du champ électrique. (*1pt*)

4. On effectue le changement de variable

$$
\begin{aligned}
a(t) &= \alpha(t)e^{-i\omega_g t} \\
b(t) &= \beta(t)e^{-i\omega_e t}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

   Les équations d'évolution deviennent

$$
\begin{aligned}
i\hbar\dot{\alpha}(t) &= -\frac{E_0 D_{eg}}{2}\big(e^{i(\omega-\omega_{eg})t} + e^{-i(\omega+\omega_{eg})t}\big)\beta(t) \\
i\hbar\dot{\beta}(t) &= -\frac{E_0 D_{eg}^*}{2}\big(e^{i(\omega+\omega_{eg})t} + e^{-i(\omega-\omega_{eg})t}\big)\alpha(t)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

   (*2pts*)

5. En négligeant les termes qui oscillent rapidement, on obtient

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\alpha}(t) &= -\frac{E_0 D_{eg}}{2} e^{i\Delta_{eg} t}\beta(t) \\ i\hbar\dot{\beta}(t) &= -\frac{E_0 D_{eg}^*}{2} e^{-i\Delta_{eg} t}\alpha(t) \end{aligned} \tag{7}$$

Pour résoudre ces équations, on exprime $\beta(t)$ en fonction de $\dot{\alpha}(t)$.

$$\begin{aligned} \beta(t) &= -\frac{2i\hbar}{E_0 D_{eg}} e^{-i\Delta_{eg} t}\dot{\alpha}(t) \\ \Rightarrow \dot{\beta}(t) &= -\frac{2i\hbar}{E_0 D_{eg}} e^{-i\Delta_{eg} t}\ddot{\alpha}(t) - \frac{2\hbar\Delta_{eg}}{E_0 D_{eg}} e^{-i\Delta_{eg} t}\dot{\alpha}(t) \end{aligned} \tag{8}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\frac{2\hbar^2}{E_0 D_{eg}}\ddot{\alpha}(t) - \frac{2i\hbar^2}{E_0 D_{eg}}\Delta_{eg}\dot{\alpha}(t) + \frac{E_0 D_{eg}^*}{2}\alpha(t) = 0 \\ &\ddot{\alpha}(t) - i\Delta_{eg}\dot{\alpha}(t) + \frac{\omega_1^2}{4}\alpha(t) = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

où on a posé $\omega_1^2 = \frac{E_0^2 |D_{eg}|^2}{\hbar^2}$ La résolution de ces équations différentielles conduit à

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \left(A e^{i\frac{\Omega}{2}t} + B e^{-i\frac{\Omega}{2}t}\right) e^{i\frac{\Delta_{eg}}{2}t} \\ \beta(t) &= -\frac{1}{\omega_1}\Big(A(\Delta_{eg} + \Omega) e^{i\frac{\Omega}{2}t} + B(\Delta_{eg} - \Omega) e^{-i\frac{\Omega}{2}t}\Big) e^{-i\frac{\Delta_{eg}}{2}t} \end{aligned} \tag{10}$$

avec $\Omega = \sqrt{\Delta_{eg}^2 + \omega_1^2}$. *(2pts)*

6. Les conditions initiales sont

$$\begin{aligned} a(0) &= 1 \\ b(0) &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Ce qui donne les conditions

$$\begin{aligned} 1 &= A + B \\ 0 &= A\frac{\Delta_{eg} + \Omega}{\omega_1} + B\frac{\Delta_{eg} - \Omega}{\omega_1} \end{aligned} \tag{12}$$

Ce qui conduit aux expressions suivantes

$$\begin{aligned} a(t) &= \left[cos\Big(\frac{\Omega t}{2}\Big) - i\frac{\Delta_{eg}}{\Omega} sin\Big(\frac{\Omega t}{2}\Big)\right] e^{i\frac{\Delta_{eg} t}{2}} e^{-i\omega_g t} \\ b(t) &= -i\frac{\omega_1}{\Omega} sin\Big(\frac{\Omega t}{2}\Big) e^{-i\frac{\Delta_{eg} t}{2}} e^{-i\omega_e t} \end{aligned} \tag{13}$$

On parle de résonance lorsque $\omega = \omega_{eg}$. *(2pts)*

B-Cas résonant (10pts)

1. Cas résonant $\Rightarrow \Delta_{eg} = 0\,;\ \Omega = \omega_1$ Les équations précédentes se réecrivent :

$$\begin{aligned} a(t) &= cos\Big(\frac{\Omega t}{2}\Big) e^{-i\omega_g t} \\ b(t) &= -isin\Big(\frac{\Omega t}{2}\Big) e^{-i\omega_e t} \end{aligned} \tag{14}$$

(0.5pt)

2. Les populations de chaque niveau après un temps τ d'interaction avec le laser sont donnés par

$$
\begin{aligned}
|a(\tau)|^2 &= cos^2(\frac{\Omega\tau}{2}) \\
|b(\tau)|^2 &= sin^2(\frac{\Omega\tau}{2})
\end{aligned}
\tag{15}
$$

   (2pts)

3. Lorsque $\Omega\tau = \frac{\pi}{2}$, on a une probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque niveau. Lorsque $\Omega\tau = \pi$, ona une probabilité 1 d'Ãªtre dans le niveau $|e\rangle$ en partant de l'état $|g\rangle$.*(1pt)*

4. Lorsque le laser est éteint, l'équation d'évolution sur $|\Psi(t)\rangle$ est

$$
i\hbar\partial_t|\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \hbar\omega_g & 0 \\ 0 & \hbar\omega_e \end{pmatrix} |\Psi(t)\rangle \tag{16}
$$

   La solution de cette équation avec les conditions initiales données, est bien

$$
\begin{aligned}
a(t) &= a_0 e^{-i\omega_g t} \\
b(t) &= b_0 e^{-i\omega_e t}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

   (1pt)

5. Sous forme matricielle, le trajet de l'atome dans l'interféromètre s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_f \\ b_f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_g \frac{\pi}{2\Omega}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_g \frac{\pi}{2\Omega}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_e \frac{\pi}{2\Omega}} & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_e \frac{\pi}{2\Omega}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_g T} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_e T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\omega_g \frac{\pi}{\Omega}} \\ -ie^{-i\omega_e \frac{\pi}{\Omega}} & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} e^{-i\omega_g T} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_e T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_g \frac{\pi}{2\Omega}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_g \frac{\pi}{2\Omega}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_e \frac{\pi}{2\Omega}} & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_e \frac{\pi}{2\Omega}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_e(\frac{\pi}{2\Omega}+T)} e^{-i\omega_g(\frac{3\pi}{2\Omega}+T)} + e^{-i\omega_e(\frac{\pi}{\Omega}+T)} e^{-i\omega_g(\frac{\pi}{\Omega}+T)} \\ -ie^{-i\omega_g(\frac{\pi}{2\Omega}+T)} e^{-i\omega_e(\frac{3\pi}{2\Omega}+T)} + ie^{-i\omega_e(\frac{\pi}{\Omega}+T)} e^{-i\omega_g(\frac{\pi}{\Omega}+T)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

   (3pts)

6. Les probabilités de transitions oscillent. (cf question 2)*(1.5pt)*

7. L'amortissement est principalement dû à la perte de cohérence du laser. En effet, si le laser perd sa cohérence temporelle, une partie des photons émis ne sont plus accordés sur la transition atomique et ne participent donc plus aux oscillations de Rabi.*(1pt)*