M1 PA - parcours SUT Année 2011–12

Interaction milieux dilués rayonnement

Examen du 13 avril 2012
2 heures – Aucun document autorisé

Problème 1 : Effet Stark Dynamique

On considère un atome possédant seulement deux niveaux d'énergie propres E_a et $E_b = E_a + \hbar\omega_0$, correspondants aux états propres $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$. Dans la base $\{|\psi_a\rangle, |\psi_b\rangle\}$, l'hamiltonien H_0 en l'absence d'effet extérieur s'écrit donc

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_a & 0 \\ 0 & E_b \end{pmatrix}$$

Nous considérons l'atome en interaction avec une onde électromagnétique $\vec{E} = \frac{E_1}{2}\cos(\omega t)\,\vec{u}_x + \frac{E_1}{2}\sin(\omega t)\,\vec{u}_y$.
Nous acceptons que l'hamiltonien d'interaction dipolaire électrique s'écrit dans la base $\{|\psi_a\rangle, |\psi_b\rangle\}$:

$$H_I = -\hbar\frac{\Omega_1}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\Omega_1 = E_1 d_{ab}/\hbar$, où d_{ab} est le moment dipolaire électrique de l'atome.

I Le hamiltonien en représentation tournante

Nous considérons que l'état de l'atome est représenté à l'instant t par un vecteur d'état de la forme :

$$|\psi(t)\rangle = a(t)\,|\psi_a\rangle + b(t)\,|\psi_b\rangle\,, \quad \text{avec} \quad aa^* + bb^* = 1$$

1. Etablir les équations différentielles dont sont solutions les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ lorsque $H = H_0 + H_I$ est l'hamiltonien total de l'atome.
2. On effectue le passage en *représentation tournante* en choisissant deux nouveaux vecteurs de base

$$|\psi_\alpha\rangle = e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t}\,|\psi_a\rangle \quad \text{et} \quad |\psi_\beta\rangle = e^{-i\frac{E_a}{\hbar}t}e^{-i\omega t}\,|\psi_b\rangle$$

   Dans cette base le vecteur d'état s'écrit :

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)\,|\psi_\alpha\rangle + \beta(t)\,|\psi_\beta\rangle$$

   En considérant cette base en représentation tournante comme fixe, on peut écrire une équation de Schrödinger sous la forme :

$$i\hbar\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\psi(t)\rangle\right]_{R.T.} = i\hbar\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\,|\psi_\alpha\rangle + i\hbar\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\,|\psi_\beta\rangle = \mathcal{H}_{RT}\,|\psi(t)\rangle$$

   où $\mathcal{H}_{RT}$ est l'hamiltonien en représentation tournante.
   Montrer que

$$\mathcal{H}_{RT} = -\hbar\begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega_1}{2} \\ \frac{\Omega_1}{2} & \delta\omega \end{pmatrix}$$

   où $\delta\omega = \omega - \omega_0$.
3. Trouver les valeurs propres $\lambda_\pm\hbar$ de l'hamiltonien en représentation tournante $\mathcal{H}_{RT}$.
4. Exprimer les vecteurs propres normalisés $|\varphi_+\rangle$ et $|\varphi_-\rangle$ correspondants aux deux valeurs propres.

5. Montrer que les vecteurs propres peuvent s'exprimer sous la forme

$$\begin{cases} |\varphi_+\rangle = \cos\theta\,|\varphi_\alpha\rangle - \sin\theta\,|\varphi_\beta\rangle \\ |\varphi_-\rangle = \cos\theta\,|\varphi_\alpha\rangle + \sin\theta\,|\varphi_\beta\rangle \end{cases}$$

et exprimer $\tan\theta$ et $\operatorname{cotan} 2\theta$ en fonction de λ_+, Ω_1 et $\delta\omega$.

6. Tout état du système peut s'exprimer dans la base des vecteurs propres $\{|\varphi_+\rangle, |\varphi_-\rangle\}$. Si à l'instant $t = 0$, le système est dans l'état

$$|\psi(t=0)\rangle = A\,|\varphi_+\rangle + B\,|\varphi_-\rangle\,,$$

donner alors l'expression du ket $|\psi(t)\rangle$ dans la base $\{|\varphi_+\rangle, |\varphi_-\rangle\}$ pour tout instant t.

II Effert Stark dynamique

Nous nous plaçons très loin de la résonance, c'est-à-dire que nous supposons que $|\delta\omega| >> \Omega_1$.

1. Dans ces conditions, montrer que les valeurs propres $\lambda_\pm$ peuvent s'approcher suivant le signe de $\delta\omega$:

$$\text{pour } \delta\omega >> \Omega_1 \qquad \begin{cases} \lambda_+ = \dfrac{\Omega_1^2}{4\delta\omega} = \epsilon_1 \\ \lambda_- = -(\delta\omega + \epsilon_1) \end{cases}$$

$$\text{pour } \delta\omega << -\Omega_1 \qquad \begin{cases} \lambda_+ = -(\delta\omega + \epsilon_1) \\ \lambda_- = \epsilon_1 \end{cases}$$

2. De même, donner une approximation à l'ordre 1 des vecteurs propres $|\varphi_\pm\rangle$ dans les deux cas $\delta\omega >> \Omega_1$ et $\delta\omega << -\Omega_1$.
3. En exprimant toujours l'état du système à l'instant $t = 0$ sous la forme

$$|\psi(t=0)\rangle = A\,|\varphi_+\rangle + B\,|\varphi_-\rangle$$

montrer que l'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant t s'exprime comme combinaison linéaire des deux états stationnaires :

$$|\psi'(t)\rangle = e^{-i\frac{E'_a}{\hbar}t}\,|\psi_a\rangle$$
$$|\psi''(t)\rangle = e^{-i\frac{E''_b}{\hbar}t}\,|\psi_b\rangle$$

4. Exprimer E'_a et E''_b en fonction de E_a, E_b et $\hbar\epsilon_1$.
5. Commenter sur le déplacement apparent des niveaux d'énergie de l'atome dû à l'irradiation lumineuse.

Problème 2 : Laser

Une fibre optique monomode en verre présente l'indice $n_0 \approx 1,5$. Celle-ci est dopée par des ions erbium (Er^{3+}).
L'ensemble constitue un système amplificateur à 3 niveaux. La transition laser présente la longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 1,55\ \mu$m et la pulsation ω_0.
L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, on considère une onde électromagnétique de longueur d'onde dans le vide, λ, voisine de λ_0 qui se propage dans le milieu suivant l'axe Ox. Cette onde est caractérisée par son champ électrique (en notation complexe)

$$\vec{E} = \vec{E}_0\,e^{-i(\omega t - nkx)}$$

où $\vec{E}_0$, ω, k et n sont des constantes. L'indice complexe de la fibre dopée est $n = n_0 + n' + in''$ où n' et n'' sont des nombres réels.

1- On rappelle que l'intensité de l'onde est $I = \beta \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{E}^\dagger$ où β est une constante et $\overrightarrow{E}^\dagger$ est le complexe conjugué de $\overrightarrow{E}$. A partir des données ci-dessus, démontrer la relation $\frac{dI}{dx} = \alpha\, I$ où α est une quantité dont on donnera l'expression en fonction de n'' et λ. Préciser les unités de α dans le système international.

2- On note $|a\rangle$ et $|b\rangle$ les deux états correspondant à la transition laser de l'erbium. L'énergie du ion erbium dans chacun des états est respectivement E_a et E_b (avec $E_b > E_a$). Soient N_a et N_b les nombre de ions erbium par unité de volume dans les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ et N le nombre total d'ions chrome par unité de volume. Démontrer la relation $N_a - N_b \simeq N$ si le système est en équilibre thermodynamique à température ordinaire en l'absence de mécanisme de pompage.

3- Rappeler le principe du pompage optique. Décrire le fonctionnement d'un laser à 3 niveaux sous la forme d'un schéma. Expliciter les transitions qui interviennent. On note R le nombre de transitions de pompage effectuées par unité de temps et par unité de volume, t_{sp} le temps caractéristique de désexcitation spontanée et W la probabilité de transition stimulée par unité de temps.

4- Ecrire les équations qui régissent l'évolution du nombre d'atomes par unité de volume, N_b et N_a dans les états $|b\rangle$ et $|a\rangle$.
En déduire l'expression de $N_b - N_a$ en régime permanent, en fonction de R, t_{sp} et W. En déduire la condition sur R, t_{sp} et N pour obtenir une amplification.

5- En posant : $R = \frac{N_a}{t_p}$, donner l'expression de $N_b - N_a$ en régime permanent, en fonction de t_p, t_{sp} et W. Démontrer la relation

$$\frac{1}{I}\frac{dI}{dx} = \frac{\alpha_0}{1 + I/I_S}$$

où α_0 et I_S sont des constantes que l'on exprimera en fonction de ω_0 et d'autres constantes qui caractérisent le milieu.

6- Commenter les deux situations $I << I_S$ et $I >> I_S$.

7- On effectue un pompage optique dans la fibre à l'aide de diodes laser à semi-conducteur (GaInAsP) qui constituent des sources émettant à 980 nm. Cette émission correspond à une bande d'absorption de l'erbium qui se désexcite très rapidement de façon non radiative par voie de multi-phonons vers le niveau $|b\rangle$. Le temps caractéristique de désexcitation spontanée du niveau $|b\rangle$ est estimé à : $t_{sp} = 10$ ms. Pour que le milieu soit amplificateur de façon optimale, il faut que $\Delta N = N_b - N_a = 10^{20}$ cm^{-3}. En déduire, en fonctionnement continu, la valeur R correspondante.

8- Ces fibres, qui sont utilisées par les télécommunications, ont une perte en puissance $X = 0,25$ décibels par km.
Le dopage avec les ions erbium et le pompage avec les diodes laser font de ces fibres un milieu amplificateur qui doit compenser les pertes pour pouvoir fonctionner sur des milliers de kilomètres. Déterminer la valeur minimale de α pour que le milieu reste un milieu amplificateur.
Pour $\Delta N = N_b - N_a = 10^{20}$ cm^{-3}, on mesure $\alpha = 27,3$ cm^{-1}. Est-ce suffisant ? Conclusion.
On rappelle la définition suivante : $X = 10 \ \log \left(\frac{I(x')}{I(x)} \right)$ avec $x' - x = 1$ km

I Annexe :

constante de Planck	$h = 1{,}05\ 10^{-34}$ J.s
constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}38\ 10^{-23}$ J.K^{-1}
charge du proton	e $= 1{,}6\ 10^{-19}$ C
masse de l'électron	$m_e = 0{,}9\ 10^{-30}$ kg
masse du proton	$m_p = 1{,}67\ 10^{-27}$ kg
vitesse de la lumière (vide)	$c = 3\,10^8$ms^{-1}

.
Formules :
On rappelle l'expression de l'indice complexe du milieu : $n = n_0 + n' + in''$ avec

$$n' = 2\frac{\omega_0 - \omega}{\Delta\omega}\, n'' \ , \quad n'' = (N_a - N_b)\, \frac{\pi^2}{2n_0^2}\frac{c_0^3}{\omega_0^2}\, \frac{f(\omega)}{t_{sp}}$$

où n_0 est l'indice du milieu passif.
On rappelle également l'expression de la probabilité par unité de temps de la transition laser stimulée, au voisinage de la résonance

$$W = \frac{\pi^2 c_0^2}{\hbar \omega_0^3} \frac{1}{n_0^2} \times \frac{f(\omega)}{t_{sp}} \times I$$

M1 PA - parcours SUT — Année 2011–12

Interaction milieux dilués rayonnement

Examen du 13 avril 2012
2 heures – Aucun document autorisé

Problème 1 : Effet Stark Dynamique

III Le hamiltonien en représentation tournante

Nous considérons que l'état de l'atome est représenté à l'instant t par un vecteur d'état de la forme :

$$|\psi(t)\rangle = a(t)\,|\psi_a\rangle + b(t)\,|\psi_b\rangle\,, \quad \text{avec} \quad aa^* + bb^* = 1$$

1. A partir de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\psi(t)\rangle = (H_0 + H_I)\,|\psi(t)\rangle$$

nous obtenons, en projetant sur les vecteurs de la base $\{|\psi_a\rangle\,,|\psi_b\rangle\}$:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= a(t)E_a - \hbar\frac{\Omega_1}{2}e^{i\omega t}\cdot b(t) \\ i\hbar\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} &= -\hbar\frac{\Omega_1}{2}e^{-i\omega t}\cdot a(t) + b(t)E_b \end{aligned}$$

soit encore

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -i\frac{E_a}{\hbar}a + i\frac{\Omega_1}{2}e^{i\omega t}\cdot b(t) \\ \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} &= i\frac{\Omega_1}{2}e^{-i\omega t}\cdot a(t) - i\frac{E_b}{\hbar}b(t) \end{aligned}\right. \tag{1}$$

2. Dans cette représentation nous avons

$$\alpha(t) = a(t)e^{+i\frac{E_a}{\hbar}t} \quad \text{et} \quad \beta(t) = b(t)e^{+i\frac{E_a}{\hbar}t}e^{i\omega t}$$

En dérivant et en utilisant l'équation 1 on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[a(t)e^{+i\frac{E_a}{\hbar}t}\right] &= \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}e^{+i\frac{E_a}{\hbar}t} + i\frac{E_a}{\hbar}\alpha \\ &= -i\frac{E_a}{\hbar}\alpha + i\frac{\Omega_1}{2}\beta(t) + i\frac{E_a}{\hbar}\alpha \\ &= i\frac{\Omega_1}{2}\beta(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[b(t)e^{+i\frac{E_a}{\hbar}t}e^{i\omega t}\right] &= \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}e^{+i\frac{E_a}{\hbar}t}e^{i\omega t} + i(\frac{E_a}{\hbar} + \omega)\beta \\ &= -i(\frac{E_a}{\hbar} + \omega_0)\beta + i\frac{\Omega_1}{2}\alpha(t) + i(\frac{E_a}{\hbar} + \omega)\beta \\ &= i\frac{\Omega_1}{2}\alpha(t) + i(\omega - \omega_0)\beta \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'obtenir le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = i\dfrac{\Omega_1}{2}\beta \\ \dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = i\dfrac{\Omega_1}{2}\alpha + i\delta\omega\beta \end{cases} \tag{2}$$

où $\delta\omega = \omega - \omega_0$

Dans la base en représentation tournante, nous considérons $|\psi_\alpha\rangle$ et $|\psi_\beta\rangle$ commes fixes. Nous pouvons écrire une équation ressemblant à l'équation de Schrödinger

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle\right]_{[R.T.]} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}|\psi_\alpha\rangle + \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}|\psi_\beta\rangle = \frac{1}{i\hbar}\mathcal{H}_{RT}|\psi\rangle$$

En utilisant le système différentiel 2 on trouve que

$$\frac{1}{i\hbar}\mathcal{H}_{RT} = \begin{pmatrix} 0 & i\dfrac{\Omega_1}{2} \\ i\dfrac{\Omega_1}{2} & i\delta\omega \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathcal{H}_{RT} = -\hbar\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\Omega_1}{2} \\ \dfrac{\Omega_1}{2} & \delta\omega \end{pmatrix}$$

3. Les valeurs propres $\lambda\hbar$ de $\mathcal{H}_{RT}$ vérifient la relation

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\dfrac{\Omega_1}{2} \\ -\dfrac{\Omega_1}{2} & -\delta\omega - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda\delta\omega - \frac{\Omega_1^2}{4} = 0$$

soit

$$\lambda_\pm = -\frac{\delta\omega}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\delta\omega^2 + \Omega_1^2} = \boxed{-\frac{\delta\omega}{2} \pm \frac{\Omega}{2}}$$

4. Un vecteur propre $|\varphi_p\rangle = \alpha_p|\psi_\alpha\rangle + \beta_p|\psi_\beta\rangle$ vérifie l'équation

$$\mathcal{H}_{RT}|\varphi_p\rangle = \lambda\hbar|\varphi_p\rangle$$

soit en projetant

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\Omega_1}{2}\beta_p &= \lambda\alpha_p \\ -\frac{\Omega_1}{2}\alpha_p - \delta\omega\beta_p &= \lambda\beta_p \end{aligned}\right\} \quad \text{soit} \quad \frac{\alpha_p}{\beta_p} = -\frac{\Omega_1/2}{\lambda} = -\frac{\lambda + \delta\omega}{\Omega_1/2}$$

5. Compte tenu de la condition de normalisation $\alpha_p^2 + \beta_p^2 = 1$, nous pouvons définir un angle θ tel que $\alpha_p = \cos\theta$ et $\beta_p = -\sin\theta$ (signe $-$ parce que α_p/β_p est de signe opposé à λ. Nous avons alors

$$\left.\begin{aligned} \tan\theta &= -\frac{\beta_p}{\alpha_p} = \frac{\lambda}{\Omega_1/2} = \frac{\Omega_1/2}{\lambda + \delta\omega} \\ \text{cotan}2\theta &= \frac{1 - \tan^2\theta}{2\tan\theta} = \frac{\delta\omega}{\Omega_1} \end{aligned}\right\}$$

Pour chaque valeur de $\delta\omega$, on obtient deux valeurs de l'angle 2θ différentes de π, c'est-à-dire deux valeurs pour l'angle lui-même, différant de $\pi/2$, et dont les sinus et cosinus sont croisés ; c'est-à-dire que nous choisissons un angle θ, compris entre 0 et $\pi/2$, qui correspond à λ_+ ($\sin\theta$ et $\cos\theta$ positifs), et l'angle $(\theta - \pi/2)$ correspond à λ_- (en effet $\tan(\theta - \pi/2) = -1/\tan\theta = -\frac{\Omega_1/2}{\lambda_+} = \frac{\Omega_1/2}{\lambda_- + \delta\omega}$, puisque $\lambda_+ + \lambda_- = -\delta\omega$). On en déduit les deux fonctions propres orthogonales :

$$\begin{cases} |\varphi_+\rangle = \cos\theta|\psi_\alpha\rangle - \sin\theta|\psi_\beta\rangle \\ |\varphi_-\rangle = \sin\theta|\psi_\alpha\rangle + \cos\theta|\psi_\beta\rangle \end{cases}$$

6. Les fonctions propres du hamiltonien $\mathcal{H}_{RT}$ représentent des états stationnaires de l'équation de Schrödinger. Leur évolution temporelle peut donc s'écrire

$$|\psi(t)\rangle = Ae^{-i\lambda_+ t}|\varphi_+\rangle + e^{-i\lambda_- t}B|\varphi_-\rangle$$

IV Effert Stark dynamique

Nous nous plaçons très loin de la résonance, c'est-à-dire que nous supposons que $|\delta\omega| >> \Omega_1$.

1. Faisons le calcul approché

$$\sqrt{\delta\omega^2 + \Omega_1^2} = |\delta\omega| \sqrt{1 + \frac{\Omega_1^2}{\delta\omega^2}} = |\delta\omega| \left(1 + \frac{\Omega_1^2}{2\delta\omega^2}\right) = |\delta\omega| + \frac{\Omega_1^2}{2\,|\delta\omega|}$$

Nous en déduisons donc que valeurs propres $\lambda_\pm$ peuvent s'approcher suivant le signe de $\delta\omega$:

$$\text{pour } \delta\omega >> \Omega_1 \quad \begin{cases} \lambda_+ = -\dfrac{\delta\omega}{2} + \dfrac{\delta\omega}{2} + \dfrac{\Omega_1^2}{4\delta\omega} = \dfrac{\Omega_1^2}{4\delta\omega} = \epsilon_1 \\ \lambda_- = -\dfrac{\delta\omega}{2} - \dfrac{\delta\omega}{2} - \dfrac{\Omega_1^2}{4\delta\omega} = -(\delta\omega + \epsilon_1) \end{cases}$$

$$\text{pour } \delta\omega << -\Omega_1 \quad \begin{cases} \lambda_+ = -\dfrac{\delta\omega}{2} - \dfrac{\delta\omega}{2} - \dfrac{\Omega_1^2}{4\delta\omega} = -(\delta\omega + \epsilon_1) \\ \lambda_- = -\dfrac{\delta\omega}{2} + \dfrac{\delta\omega}{2} + \dfrac{\Omega_1^2}{4\delta\omega} = \epsilon_1 \end{cases}$$

2. Pour les vecteurs propres nous avons

$$\delta\omega > 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta \approx 1 \\ \sin\theta \approx 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\varphi_+\rangle = |\psi_\alpha\rangle \\ |\varphi_-\rangle = |\psi_\beta\rangle \end{cases}$$

et

$$\delta\omega < 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta \approx 0 \\ \sin\theta \approx 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\varphi_+\rangle = -|\psi_\beta\rangle \\ |\varphi_-\rangle = |\psi_\alpha\rangle \end{cases}$$

3. En reprenant la formule dans le cas $\delta\omega > 0$ nous obtenons

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= Ae^{-i\lambda_+ t} |\varphi_+\rangle + e^{-i\lambda_- t} B |\varphi_-\rangle \\ &= Ae^{-i\epsilon_1 t} |\psi_\alpha\rangle + Be^{i(\delta\omega+\epsilon_1)} |\psi_\beta\rangle \\ &= Ae^{-i(\frac{E_a}{\hbar}+\epsilon_1)t} |\psi_a\rangle + Be^{-i(\frac{E_b}{\hbar}-\epsilon_1)t} |\psi_b\rangle \\ &= Ae^{-i\frac{E'_a}{\hbar}t} |\psi_a\rangle + Be^{-i\frac{E''_b}{\hbar}t} |\psi_b\rangle \end{aligned}$$

Dans le cas $\delta\omega < 0$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= Ae^{-i\lambda_+ t} |\varphi_+\rangle + e^{-i\lambda_- t} B |\varphi_-\rangle \\ &= Be^{-i\epsilon_1 t} |\psi_\alpha\rangle + Ae^{i(\delta\omega+\epsilon_1)} |\psi_\beta\rangle \\ &= Be^{-i\frac{E'_a}{\hbar}t} |\psi_a\rangle + Ae^{-i\frac{E''_b}{\hbar}t} |\psi_b\rangle \end{aligned}$$

4. $E'_a = E_a + \hbar\epsilon_1$ et $E''_b = E_b - \hbar\epsilon_1$.
5. Les deux états propres $|\psi'\rangle$ et $|\psi''\rangle$ s'approchent des états de base $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$, mais s'en distinguent par des valeurs modifiées de l'énergie. Les nouvelles valeurs de l'énergie E'_a et E''_b sont rapprochées si $\delta\omega$ est positif, écartées si $\delta\omega$ est négatif. C'est l'interaction avec l'onde lumineuse qui déplace les niveaux d'énergies.

Problème 2 : Laser

1-$I \propto \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{E}^\dagger \propto e^{-2n''k\,x}$ ce qui implique $dI/I = -2n''k\,dx$ et $\alpha = -2n''k = \dfrac{-4\pi n''}{\lambda}$ où λ est la longueur d'onde dans le vide. L'unité de α est le m^{-1}

2- Voir cours

3- Voir cours

4- Trois niveaux
$\frac{dN_a}{dt} = -R + (N_b - N_a)\,W + \frac{N_b}{t_{sp}}$
$\frac{dN_b}{dt} = R - (N_b - N_a)\,W - \frac{N_b}{t_{sp}}$

$$0 = \frac{N_a}{t_p} - (N_b - N_a)\,W - R \text{ avec } \ N_a + N_b = N = cte$$

On en déduit

$$N_b - N_a = \frac{2Rt_{sp} - N}{1 + 2Wt_{sp}}$$

Amplification pour $N_b - N_a > 0$ soit $Rt_{sp} > N/2$.

5-

$$\frac{1}{I}\frac{dI}{dx} = \gamma = (N_b - N_a)\,\frac{\pi^2}{n^2}\frac{c_0^2}{\omega_0^2}\,\frac{f(\omega)}{t_{sp}}$$

avec

$$N_b - N_a = N\frac{t_{sp} - t_p}{t_{sp} + t_p}\frac{1}{1 + 2W\frac{t_p t_{sp}}{t_p + t_{sp}}} \text{ cf ci-dessus}$$

et

$$W = \frac{\pi^2 c_0^2}{\hbar\omega_0^3}\frac{1}{n_0^2} \times \frac{f(\omega)}{t_{sp}} \times I$$

On pose $\frac{1}{I_s} = \frac{\pi^2}{n^2}\frac{c_0^2}{\hbar\omega_0^3}\ f(\omega)\frac{2t_p}{t_p + t_{sp}}$ et
$\gamma_0 = \frac{\pi^2}{n^2}\frac{c_0^2}{\omega_0^2}\ \frac{f(\omega)}{t_{sp}}N\frac{t_{sp} - t_p}{t_{sp} + t_p}$ et on obtient l'expression voulue :

$$\frac{1}{I}\frac{dI}{dx} = \frac{\gamma_0}{1 + I\,/\,I_s}$$

6-
$I << I_s \Rightarrow I = I_0 e^{\gamma_0 x}$: régime d'amplification exponentielle.
$I >> I_s \Rightarrow I = I_s\gamma_0 x + cte$: régime d'amplification linéaire.

7- $R = \frac{\Delta N}{t_{sp}} = 10^{28}\mathrm{m}^{-3}\mathrm{s}^{-1}$

8- On a : $\exp\left(\alpha \times 10^3\right) \times 10^{-\frac{X}{10}} = 1$
Soit : $\alpha = \frac{X}{10^4}\ln 10 = 5,7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^{-1}$
La condition est donc réalisée largement dans le cas de l'amplification maximale, la fibre est un milieu amplificateur pour le rayonnement.