Examen

Durée : 2 heures

Aucun document ni calculette autorisé

I- Milieu amplificateur

Une onde plane monochromatique de fréquence ν se propage suivant l'axe Oz dans un milieu d'indice $n = 1$. Soit I, le flux d'énergie par unité de surface du plan orthogonal à Oz, appelée aussi intensité lumineuse.

On définit à l'instant t et au point d'abscisse z, le gain linéaire γ :

$$\gamma = \frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial z}$$

Les atomes du milieu ont deux niveaux d'énergie notés ε_a et ε_b ($\varepsilon_b > \varepsilon_a$).

Dans tout le problème, on pose la relation :

$$h\nu = \varepsilon_b - \varepsilon_a$$

Soit N le nombre de ces atomes par unité de volume, supposé constant et uniforme.

Soit N_b et N_a le nombre d'atomes par unité de volume dans les niveaux d'énergie ε_b et ε_a. N_b et N_a sont des fonctions de z et de t.

Par un procédé de pompage, on porte les atomes du niveau a vers le niveau b. Soit R le taux de pompage par unité de temps, on a alors :

$$\left(\frac{\partial N_a}{\partial t}\right)_{pompage} = -\, R\, N_a$$

Par émission spontanée, les atomes de l'état b retournent vers l'état a avec une probabilité de transition par unité de temps notée A, constante qui ne dépend que de la nature des atomes considérés.

Les transitions induites s'effectuent en émission et en absorption avec une probabilité par unité de temps $W = \beta I$ où β est une constante qui ne dépend aussi que de la nature des atomes considérés.

I.1.a- Donner en un point z, les expressions de $\dfrac{\partial N_a}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial N_b}{\partial t}$ en fonction de W, R, A et N et respectivement N_a et N_b.

I.1.b- En déduire l'expression de N_a, N_b, puis N_b - N_a en régime permanent en fonction de W, R, A et N .

Dans la suite du problème, on suppose ce régime établi.

I.2- On considère un cylindre d'axe Oz et de section unité, limité par les plans d'abscisses z et $z + dz$. On suppose que l'accroissement dI de l'intensité lumineuse entre z et $z + dz$ est due aux seuls phénomènes stimulés. Montrer que :

$$\gamma = h\nu\, \beta\, (N_b - N_a)$$

I.3- En utilisant les résultats précédents, montrer que I satisfait une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dI}{dz} = \frac{\mu}{1 + \dfrac{I}{I_s}} I$$

où μ et I_s sont indépendants de z. On appelle I_s l'intensité de saturation.
Donner l'expression de μ et I_s en fonction de β, ν, R, A et N.

I.4- A quelle condition le milieu est-il amplificateur ?

On supposera que le milieu est amplificateur dans toute la suite du problème.

I.5- Représenter l'allure de la fonction $I(z)$. On étudiera en particulier les cas où $I >> I_s$ et $I << I_s$.

II- Courbe de gain

Le milieu reçoit à présent une radiation électromagnétique composée d'une multitude d'ondes monochromatiques dont la fréquence ν couvre une très large bande. On suppose que les intensités de ces ondes sont les mêmes quelle que soit la fréquence.

Afin de déterminer l'allure du spectre de fréquence, ou courbe de gain, après que la radiation ait traversé le milieu, on dispose des renseignements suivant sur la dépendance du gain en fréquence.

- Pour une raie à $\lambda_0 = 633$ nm, le gaz utilisé en tant que milieu amplificateur est à la température $T =$ 400K.
- Du point de vue des collisions, le temps de relaxation des atomes est environ : $t_{relaxation} = 2\ 10^{-8}$ s
- La largeur naturelle de la raie considérée est : $\Delta\nu_{naturelle} = 10$ MHz

II.1- Comparer numériquement les largeurs de raie associées aux trois phénomènes. En déduire quel est le phénomène prépondérant.

II.2- Quelle est la forme de la courbe de gain de ce milieu ?

II.3- En déduire l'allure du spectre de fréquence de la radiation en sortie du milieu. On donnera les caractéristiques principales de la courbe.

On donne les constantes suivantes : $\hbar = 1{,}05\ 10^{-34}$ J.s ;
$k_B = 1{,}38\ 10^{-23}$ J.K^{-1} ; $c_0 = 3\ 10^8$ m.s^{-1}
La masse d'un atome de gaz (Néon) est : $m = 20 \times 1{,}67\ 10^{-27}$ kg
La largeur Doppler d'un gaz est donnée par la formule suivante :

$$\Delta\nu_D = \nu_0\sqrt{\frac{2k_BT}{mc_0^2}}$$

III- Cavité

Le milieu précédent remplit intégralement un étalon Fabry-Pérot constitué de deux miroirs plans parallèles distants de $L = 20$ cm. L'un des miroirs est parfaitement réfléchissant, l'autre possède un coefficient de réflexion en énergie : $\Gamma = 0,95$.

Pour les applications numériques, on supposera que la fréquence de l'onde dans la cavité correspond au maximum du gain γ. On a alors $\lambda_0 = 633$ nm.

On supposera aussi que l'intensité est suffisamment faible dans la cavité pour que le gain soit constant et uniforme.

Pour que la cavité puisse amplifier le signal, il faut qu'un système d'ondes stationnaires puisse s'y installer. La longueur de la cavité doit donc correspondre à un nombre entier de demi-longueurs d'onde. Il apparaît que différents modes peuvent coexister dans la cavité.

III.1- Déterminer la relation entre la fréquence d'un mode, la longueur de la cavité L et c_0 .

III.2- Calculer numériquement la différence de fréquence, $\delta\nu_c$, entre deux modes consécutifs. Application numérique. En comparant cette valeur avec la largeur de la courbe de gain, en déduire si cette cavité laser est monomode ou multimode.

III.3- La largeur L fluctue en fonction de la température à l'échelle micrométrique. Ce phénomène est surtout sensible à l'allumage du laser où la cavité se dilate en passant de $20°C$ à $120°C$. La variation de L a pour effet de faire fluctuer la fréquence des modes.

Déterminer l'amplitude maximale des fluctuations en largeur ΔL pour que les fluctuations en fréquence $\Delta\nu_L$ qu'elles provoquent restent inférieures à la largeur de la courbe de gain du milieu amplificateur. Application numérique. Conclusion.

Cavité monomode

On suppose que la cavité a une largeur telle qu'il n'y a qu'une longueur d'onde λ_0 existante au sein de la cavité.

III.4- Quelle est la variation d'énergie relative dans la cavité pendant un aller-retour de l'onde due à la présence du milieu amplificateur ?

III.5- Déterminer la variation d'énergie dans la cavité due aux pertes des miroirs lorsque l'onde effectue un aller-retour.

III.6- Déduire de ce qui précède la condition d'auto-oscillation de la cavité sous la forme $\gamma > \gamma_s$. Exprimer γ_s en fonction des données du problème.

Cavité bimode

On suppose à présent que la largeur de la cavité est adaptée de façon à ce que deux modes coexistent. On appellera respectivement ν_1 et ν_2 leur fréquence et I_1 et I_2 leur intensité. On démontre que, dans ces conditions, le gain associé à chaque mode dépend de l'intensité lumineuse dans tous les modes et est de la forme :

$$\gamma_1 = \frac{\gamma_{01}}{1 + \dfrac{I_1}{I_{s11}} + \dfrac{I_2}{I_{s12}}} \quad \gamma_2 = \frac{\gamma_{02}}{1 + \dfrac{I_1}{I_{s21}} + \dfrac{I_2}{I_{s22}}}$$

I_{s11} et I_{s22} sont appelées intensités d'autosaturation, alors que I_{s12} et I_{s21} sont dites intensités de saturation croisée.

III.7- On suppose que les deux fréquences ν_1 et ν_2 sont les fréquences d'absorption de deux atomes subissant des effets Doppler différents. La saturation de l'amplification n'affecte donc que les atomes dont la fréquence est accordée sur la fréquence lumineuse active : l'effet laser à une fréquence donnée n'affecte ainsi que très peu le gain à une autre fréquence.

III.7.a- Quels sont, dans ces conditions, les termes qui peuvent être négligés dans les expressions de γ_1 et γ_2 ? Donner, dans ce cas, l'expression des gains γ_1 et γ_2.

III.7.b- Exprimer la condition d'auto-oscillation sous la forme d'inégalités avec les gains γ_1 et γ_2. A quelles conditions est-il possible de rendre cette cavité monomode ?