Université Pierre et Marie Curie & Observatoire de Paris

Interaction milieux dilués rayonnement M1 Année 2012–13

Oscillations de Rabi d'un atome en mouvement

Examen du 12 avril 2013

2 heures – Aucun document autorisé

I Oscillations de Rabi d'un atome au repos

Dans cette première partie, on considère un atome de masse m, au repos, possédant seulement deux états d'énergie internes $|a\rangle$ et $|b\rangle$. L'atome est soumis à une onde électromagnétique quasi-résonante couplant les deux états d'énergie. L'hamiltonien de couplage dû à l'onde électromagnétique s'écrit sous la forme matricielle :

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar\Omega}{2} \\ \frac{\hbar\Omega}{2} & -\hbar\delta \end{pmatrix},$$

où $\delta = \omega - \omega_0$ représente le désaccord entre la fréquence ω de l'onde électromagnétique quasi-résonante et la fréquence ω_0 de résonance de la transition du niveau $|a\rangle$ vers le niveau $|b\rangle$. On note dans la suite $\Omega' = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$.

1. Quelle est la dimension de l'espace des états de l'atome ?
2. En l'absence d'onde électromagnétique, les niveaux d'énergie internes de l'atome ont-ils une durée de vie infinie ? Citer différents phénomènes physiques pouvant transférer l'état interne d'un niveau à l'autre.
3. Sous quelle approximation l'expression de H_1 est-elle valable ?
4. Trouver les valeurs propres (notées $\hbar\lambda_\pm/2$) et les vecteurs propres (notés $|V_\pm\rangle$) de H_1. On exprimera les vecteurs propres sous la forme :
$$|V_\pm\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ v_\pm \end{pmatrix},$$
où $v_\pm$ sera exprimé en fonction de $\lambda_\pm$ et Ω.
5. A $t = 0$, l'atome est dans l'état interne $|a\rangle$. Le vecteur d'onde est noté $|\psi(t)\rangle$. Expliciter les projections $\langle a|\psi(t)\rangle$ et $\langle b|\psi(t)\rangle$. Commenter.

II Oscillations de Rabi pour un atome en mouvement

Dans cette section l'atome est en mouvement. Nous prenons donc en compte un degré de liberté de translation parallèlement à l'axe x. L'espace $\mathcal{E}$ des états accessibles à l'atome est maintenant le produit de l'espace $\mathcal{E}_{int}$ des états internes et de l'espace $\mathcal{E}_{trans}$ des états de translation : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{trans} \otimes \mathcal{E}_{int}$.

L'espace des états internes ne diffère pas de celui de la section I et a pour base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ ou encore $\{|V_+\rangle, |V_-\rangle\}$.

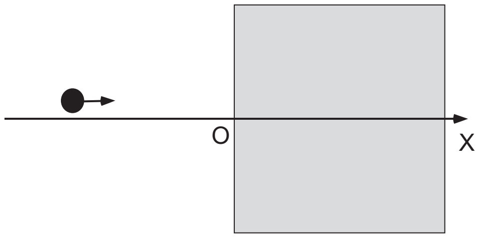

FIGURE 1 – Atome en mouvement selon l'axe x et provenant de $x = -\infty$. Dans la région $x < 0$, l'atome est libre. Dans la région grisée $x > 0$, une onde électromagnétique se propage perpendiculairement à la direction de l'atome.

L'espace des états de translation a pour base les fonctions d'onde $\{\psi_k(x) = e^{ikx}\}$, où k est un réel quelconque, et qui ont pour énergie cinétique $E_k = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$:

$$\frac{P_x^2}{2m}\psi_k(x) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi_k(x),$$

où P_x est l'opérateur impulsion dans la direction x.

L'atome se déplace de $x = -\infty$ vers $x = \infty$ (Figure 1). Dans la région $x < 0$, que nous nommerons région I, il n'y a aucune onde électromagnétique. Dans la région $x > 0$, que nous nommerons région II, l'onde électromagnétique se propage perpendiculairement à la direction de propagation de l'atome.

II.A Etats propres

1. Nous étudions tout d'abord la région II, où l'hamiltonien du système s'écrit sous la forme :

$$H_{\mathrm{II}} = \frac{P_x^2}{2m} + H_1.$$

Un état de l'atome dans la région II est décrit par le vecteur d'onde

$$|\phi_k^{\mathrm{II}}\rangle = C_+ e^{ik_+ x}|V_+\rangle + C_- e^{ik_- x}|V_-\rangle\,,$$

où C_+, C_-, k_+, k_- sont des réels quelconques.
Justifier que le ket $|\phi_k^{\mathrm{II}}\rangle$ vérifie la relation :

$$H_{\mathrm{II}}|\phi_k^{\mathrm{II}}\rangle = C_+\left(\frac{\hbar^2 k_+^2}{2m} + \frac{\hbar}{2}\lambda_+\right)e^{ik_+ x}|V_+\rangle + C_-\left(\frac{\hbar^2 k_-^2}{2m} + \frac{\hbar}{2}\lambda_-\right)e^{ik_- x}|V_-\rangle\,.$$

2. Montrer que si $k_\pm^2 = k^2 - \dfrac{m\lambda_\pm}{\hbar}$, alors $|\phi_k^{\mathrm{II}}\rangle$ est vecteur propre de H_{II}. Donner l'énergie de cet état propre.
3. Etudions maintenant la région I. Justifier que dans cette région, l'hamiltonien du système s'écrive sous la forme :
$$H_{\mathrm{I}} = \frac{P_x^2}{2m} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\hbar\delta \end{pmatrix}$$
4. Pour la région I, on représente l'état de l'atome par le vecteur d'onde :

$$|\phi_k^{\mathrm{I}}\rangle = \left(e^{ikx} + R_1 e^{-ikx}\right)|a\rangle + R_2 e^{-iqx}|b\rangle\,.$$

Justifier et commenter cette forme.

5. Montrer que si $q^2 = k^2 + \dfrac{2m\delta}{\hbar}$, alors $|\phi_k^{\mathrm{I}}\rangle$ est vecteur propre de H_{I}. Donner l'énergie de cet état propre.
6. La fonction d'onde et sa dérivée sont continues en $x = 0$:

$$|\phi_k^{\mathrm{I}}(x=0)\rangle = |\phi_k^{\mathrm{II}}(x=0)\rangle$$
$$\frac{\mathrm{d}\,|\phi_k^{\mathrm{I}}\rangle}{\mathrm{d}x}(x=0) = \frac{\mathrm{d}\,|\phi_k^{\mathrm{II}}\rangle}{\mathrm{d}x}(x=0).$$

   En déduire quatre équations qui relient les coefficients C_+, C_-, R_1 et R_2 en se souvenant de l'expression de la base $\{|V_+\rangle\,, |V_-\rangle\}$ dans la base $\{|a\rangle\,, |b\rangle\}$ trouvée à la question I.4.
7. Montrer que :

$$\frac{C_-}{C_+} = -\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\frac{q+k_+}{q+k_-}.$$

II.B Limite semi-classique

La limite semi-classique est obtenue aux vitesses élevées : $k^2 >> |m(\delta \pm \Omega')/\hbar|$. Dans ce cas on peut développer $k_\pm$ et q au premier ordre :

$$k_\pm = k - \frac{m\lambda_\pm}{2\hbar k}$$
$$q = k + \frac{m\delta}{\hbar k}.$$

1. Montrer que $\langle a|\phi_k^{\mathrm{II}}\rangle$ et $\langle b|\phi_k^{\mathrm{II}}\rangle$ peuvent se mettre sous la forme :

$$\langle a|\phi_k^{\mathrm{II}}\rangle = \chi e^{i\alpha x}\left[\cos(\beta x) - \frac{i\delta}{\Omega'}\sin(\beta x)\right]$$
$$\langle b|\phi_k^{\mathrm{II}}\rangle = \chi e^{i\alpha x}\left[\frac{-i\Omega}{\Omega'}\right]\sin(\beta x)\,,$$

   en exprimant les paramètres α et β en fonction de m, $\hbar$, k, Ω' et δ.
2. Interpréter et commenter ce résultat. On rappelle en particulier que l'atome se déplace à une vitesse $v = \dfrac{\hbar k}{m}$.

II.C Limite quantique

C'est la limite où nous n'avons pas $k^2 >> |m(\delta \pm \Omega')/\hbar|$. Pour cette section, nous ne faisons appel qu'aux résultats des questions II.A.1 et II.A.2.

1. Montrer que k_-^2 est toujours positif.
2. Montrer que si $k < k_c$, avec $k_c = \sqrt{\dfrac{m}{\hbar}(\Omega' - \delta)}$, alors k_+^2 est négatif.
3. Que pouvez-vous en déduire lors de la propagation de l'atome dans la région II, en particulier lorsque $x >> |1/k_+|$?
4. L'atome oscille-t-il entre les états $|a\rangle$ ou $|b\rangle$ dans cette limite ?

Cette suppression de l'oscillation de Rabi est à prendre en compte pour les atomes ultra froids. Voir Navarro et al. 2003. *Suppression of Rabi oscillations for moving atoms.* Phys. Rev. A **67**, 063819.

Université Pierre et Marie Curie & Observatoire de Paris

Interaction milieux dilués rayonnement M1 Année 2012–13

Oscillations de Rabi d'un atome en mouvement

Examen du 12 avril 2013

2 heures – Aucun document autorisé

III Oscillations de Rabi d'un atome au repos

1. La dimension de l'espace des états est $\boxed{2}$.
2. Hormis l'état fondamental, aucun état n'a de durée de vie infinie. L'émission spontanée d'un photon ramène toujours un état excité vers l'état fondamental. La durée de vie du niveau excité peut néanmoins être longue, puisque certaines transitions ont des temps de relaxation de plusieurs secondes, voire de quelques heures. La durée de vie de ces niveaux peut donc être considérée comme *infinie* à l'échelle temporelle de l'expérience.

   Les phénomènes physiques qui permettent de transférer l'état interne d'un niveau à un autre sont : l'émission spontanée, l'émission et l'absorption induites par une onde électromagnétique, les collisions entre atome ou avec des électrons (décharges électriques).
3. L'expression de H_1 est valable dans l'approximation séculaire et en passant dans le repère tournant.
4. On cherche à résoudre l'équation du second degré

   $$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & \Omega \\ \Omega & -2\delta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\delta\lambda - \Omega^2$$

   dont les solutions sont

   $$\lambda_\pm = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 + \Omega^2} \boxed{= -\delta \pm \Omega'}.$$

   La recherche des vecteurs propres conduit à résoudre le système :

   $$\begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ \Omega & -2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v_\pm \end{pmatrix} = \lambda_\pm \begin{pmatrix} 1 \\ v_\pm \end{pmatrix} \iff v_\pm = \boxed{\frac{\lambda_\pm}{\Omega}}.$$

   On peut vérifier l'orthogonalité des deux vecteurs :

   $$\langle v_- | v_+ \rangle = 1 + \frac{\lambda_- \lambda_+}{\Omega^2} = 1 - 1 = 0.$$

5. A $t = 0$, $|\psi_0\rangle = |a\rangle$.

   $$\begin{cases} |V_+\rangle = |a\rangle + v_+ |b\rangle \\ |V_-\rangle = |a\rangle + v_- |b\rangle \end{cases} \iff \begin{cases} |a\rangle = \dfrac{v_- |V_+\rangle - v_+ |V_-\rangle}{v_- - v_+} \\ |b\rangle = \dfrac{|V_+\rangle - |V_-\rangle}{v_+ - v_-} \end{cases}$$

   On fait évoluer le système :

   $$|\psi(t)\rangle = \frac{v_-}{v_- - v_+} e^{-i\frac{\lambda_+ t}{2}} |V_+\rangle - \frac{v_+}{v_- - v_+} e^{-i\frac{\lambda_- t}{2}} |V_-\rangle .$$

   La projection de $|\psi(t)\rangle$ sur $|a\rangle$ s'écrit :

   $$\langle a | \psi(t) \rangle = \frac{v_-}{v_- - v_+} e^{-i\frac{\lambda_+ t}{2}} - \frac{v_+}{v_- - v_+} e^{-i\frac{\lambda_- t}{2}},$$

et donne une probabilité $\mathcal{P}_a(t)$ au système d'être dans l'état $|a\rangle$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_a(t) &= \left|\frac{e^{i\frac{\delta t}{2}}}{2\Omega'}\left[-(\delta+\Omega')\,e^{-i\frac{\Omega' t}{2}} - (-\delta+\Omega')\,e^{i\frac{\Omega' t}{2}}\right]\right|^2 \\
\mathcal{P}_a(t) &= \left|-\cos\frac{\Omega' t}{2} - i\frac{\delta}{\Omega'}\sin\frac{\Omega' t}{2}\right|^2 \\
\mathcal{P}_a(t) &= \cos^2\frac{\Omega' t}{2} + \frac{\delta^2}{\Omega'^2}\sin^2\frac{\Omega' t}{2} \\
\mathcal{P}_a(t) &= 1 - \frac{\Omega^2}{\Omega'^2}\sin^2\frac{\Omega' t}{2}
\end{aligned}$$

Naturellement, on trouve alors

$$\mathcal{P}_b(t) = 1 - \mathcal{P}_a(t) = \frac{\Omega^2}{\Omega'^2}\sin^2\frac{\Omega' t}{2}$$

On retrouve donc l'oscillation de Rabi telle que décrite dans le cours.

IV Oscillations de Rabi pour un atome en mouvement

IV.A Etats propres

1. Les opérateurs P_x et H_1 opèrent dans deux espaces différents, respectivement, l'espace des états de translation et l'espace des états internes. Dans l'espace produit, nous avons donc :

$$\frac{P_x^2}{2m}\psi_{k_+}(x)\,|V_+\rangle = \left(\frac{P_x^2}{2m}\psi_{k_+}(x)\right)\otimes|V_+\rangle = \frac{\hbar^2 k_+^2}{2m}\psi_k(x)\,|V_+\rangle$$

de même

$$H_1\psi_{k_+}(x)\,|V_+\rangle = \psi_{k_+}(x)\otimes(H_1\,|V_+\rangle) = \frac{\hbar\lambda_+}{2}\psi_k(x)\,|V_+\rangle$$

Ainsi, en combinant les deux ci-dessus nous arrivons à :

$$H_{\mathrm{II}}e^{ik_+x}\,|V_+\rangle = \left(\frac{\hbar^2 k_+^2}{2m} + \frac{\hbar\lambda_+}{2}\right)e^{ik_+x}\,|V_+\rangle$$

De même nous avons

$$H_{\mathrm{II}}e^{ik_-x}\,|V_-\rangle = \left(\frac{\hbar^2 k_-^2}{2m} + \frac{\hbar\lambda_-}{2}\right)e^{ik_-x}\,|V_-\rangle$$

En sommant les deux, on arrive à l'expression souhaitée.

2. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar^2 k_+^2}{2m} + \frac{\hbar}{2}\lambda_+ &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{m\lambda_+}{\hbar} + \frac{\hbar}{2}\lambda_+ \\
&= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar\lambda_+}{2} + \frac{\hbar}{2}\lambda_+ \\
&= \frac{\hbar^2 k^2}{2m}
\end{aligned}$$

De même

$$\frac{\hbar^2 k_-^2}{2m} + \frac{\hbar}{2}\lambda_- = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Nous avons donc

$$H_{\mathrm{II}}\,|\phi_k^{\mathrm{II}}\rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\,|\phi_k^{\mathrm{II}}\rangle\,,$$

ce qui démontre que l'état $|\phi_k^{\mathrm{II}}\rangle$ est état propre de H_{II} avec l'énergie propre $\dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

3. Dans la région I, le champ électrique est nul. Donc la valeur de Ω dans la région I est nulle. L'hamiltonien du système dans la région I s'écrit donc :

$$H_{\mathrm{I}} = \frac{P_x^2}{2m} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\hbar\delta \end{pmatrix}$$

4. L'atome provient de $-\infty$ dans l'état initial $|a\rangle$. Cela correspond donc au vecteur d'onde $e^{ikx}|a\rangle$. A l'entrée dans la région II, l'hamiltonien change. Il peut donc avoir réflexion de l'état incident. Dans la région II, la matrice H_1 permet aussi de passer de l'état interne $|a\rangle$ à l'état $|b\rangle$. Il existe donc deux ondes réfléchies, une dans l'état $|a\rangle$ avec un coefficient de réflexion R_1 et qui doit avoir la même énergie totale que l'onde incidente mais être de direction opposée $R_1 e^{-ikx}|a\rangle$, et une dans l'état interbe $|b\rangle$, avec un coefficient de réflexion R_2, mais qui doit avoir un énergie cinétique différente de l'onde incidente : $R_2 e^{-iqx}|b\rangle$. La superposition donne la fonction d'onde totale recherchée.
5. Nous procédons de manière similaire à la question II.A.1 pour montrer que

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{I}}|\phi_k^{\mathrm{I}}\rangle &= H_{\mathrm{I}}\left[\left(e^{ikx} + R_1 e^{-ikx}\right)|a\rangle + R_2 e^{-iqx}|b\rangle\right] \\ &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\left(e^{ikx} + R_1 e^{-ikx}\right)|a\rangle + R_2\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} - \hbar\delta\right)e^{-iqx}|b\rangle \\ &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\left(e^{ikx} + R_1 e^{-ikx}\right)|a\rangle + R_2\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \hbar\delta - \hbar\delta\right)e^{-iqx}|b\rangle \\ &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m}|\phi_k^{\mathrm{I}}\rangle \end{aligned}$$

Ainsi $|\phi_k^{\mathrm{I}}\rangle$ est état propre de H_{I} d'énergie propre $\dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

6. Dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ nous avons :

$$|\phi_k^{\mathrm{I}}\rangle = \begin{pmatrix} e^{ikx} + R_1 e^{-ikx} \\ R_2 e^{-iqx} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |\phi_k^{\mathrm{II}}\rangle = \begin{pmatrix} C_+ e^{ik_+x} + C_- e^{-ik_-x} \\ C_+ v_+ e^{ik_+x} + C_- v_- e^{ik_-x} \end{pmatrix}$$

La continuité de la fonction d'onde et des dérivées en $x = 0$ donne

$$\begin{cases} 1 + R_1 = C_+ + C_- \\ R_2 = C_+ v_+ + C_- v_- \\ k(1 - R_1) = C_+ k_+ + C_- k_- \\ -qR_2 = C_+ k_+ v_+ + C_- k_- v_- \end{cases}$$

7. En divisant la quatrième équation par la seconde équation, nous obtenons le rapport :

$$\frac{C_+ k_+ v_+ + C_- k_- v_-}{C_+ v_+ + C_- v_-} = -q$$

En posant $x = \dfrac{C_-}{C_+}$ cela donne encore

$$\frac{k_+ v_+ + k_- v_- x}{v_+ + v_- x} = -q$$

Puis en utilisant $\dfrac{v_+}{v_-} = \dfrac{\lambda_+}{\lambda_-}$

$$\begin{aligned} k_+\lambda_+ + xk_-\lambda_- &= -q\left(\lambda_+ + x\lambda_-\right) \\ x\left(k_-\lambda_- + q\lambda_-\right) &= -q\lambda_+ - k_+\lambda_+ \\ x &= \boxed{\frac{C_-}{C_+} = -\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\frac{q + k_+}{q + k_-}} \end{aligned}$$

IV.B Limite semi-classique

1. Nous avons

$$\begin{aligned}
\langle a|\phi_k^{\mathrm{II}}\rangle &= C_+ e^{ik_+x} \underbrace{\langle a|V_+\rangle}_{=1} + C_- e^{ik_-x} \underbrace{\langle a|V_-\rangle}_{=1} \\
&= C_+ e^{ikx} \left(e^{-i\frac{m\lambda_+ x}{2\hbar k}} - \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \underbrace{\frac{q+k_+}{q+k_-}}_{\approx 1} e^{-i\frac{m\lambda_- x}{2\hbar k}} \right) \\
&\approx \frac{C_+}{\lambda_-} e^{ikx} e^{i\frac{m\delta x}{2\hbar k}} \left[(-\delta - \Omega')\, e^{-i\frac{m\Omega' x}{2\hbar k}} - (-\delta + \Omega')\, e^{i\frac{m\Omega' x}{2\hbar k}} \right] \qquad \text{car } \lambda_+ = -\delta \pm \Omega' \\
&\approx 2\frac{C_+}{\lambda_-} e^{i\alpha x} \left(-\Omega' \cos \frac{m\Omega' x}{2\hbar k} + i\delta \sin \frac{m\Omega' x}{2\hbar k} \right) \\
&\approx \chi e^{i\alpha x} \left[\cos(\beta x) - \frac{i\delta}{\Omega'} \sin(\beta x) \right]
\end{aligned}$$

avec $\beta = \dfrac{m\Omega' x}{2\hbar k}$, $\alpha = k + \dfrac{m\delta}{2\hbar k}$ et $\chi = 2\dfrac{C_+}{\lambda_-}$.
De même

$$\begin{aligned}
\langle a|\phi_k^{\mathrm{II}}\rangle &= C_+ v_+ e^{ik_+x} \langle b|V_+\rangle + C_- v_- e^{ik_-x} \langle b|V_-\rangle \\
&\approx \frac{C_+}{\Omega} \left[\lambda_+ e^{ik_+x} - \lambda_- \frac{\lambda_+}{\lambda_-} e^{ik_-x} \right] \\
&\approx \frac{C_+ \lambda_+}{\Omega} e^{i\alpha x} (-2i) \sin \beta x \\
&\approx \chi e^{i\alpha x} \left[-i\frac{\Omega}{\Omega'} \right] \sin \beta x
\end{aligned}$$

2. La particule se déplace à la vitesse $v = \dfrac{\hbar k}{m}$. Il est donc en x à l'instant t tel que $x = vt$, soit $t = \dfrac{mx}{\hbar k}$. La probabilité de trouver l'atome dans l'état interne $|b\rangle$ vaut donc

$$\mathcal{P}_b(t) = \frac{\Omega^2}{\Omega'^2} \sin^2 \underbrace{(\beta x)}_{\frac{m\Omega'}{2\hbar k} \frac{\hbar k}{m} t = \frac{\Omega'}{2} t}$$

On retrouve l'oscillation de rapide. On peut dans ce cas négliger l'aspect quantique du mouvement de l'atome et trouver l'état interne comme si l'atome était immobile.

IV.C Limite quantique

1. Nous avons
$$k_-^2 = k^2 - \frac{m}{\hbar}(-\delta - \Omega') > 0 \quad \forall k \text{car } \lambda_- \text{ toujours } < 0$$

2. $$k_+^2 = k^2 - \frac{m}{\hbar}(-\delta + \Omega')$$
peut s'annuler et devenir négatif si $k < k_c$:
$$k_+^2 < \frac{m}{\hbar}(\Omega' - \delta) - \frac{m}{\hbar}(-\delta + \Omega') < 0$$

3. Dans ce cas le mode k_+ est évanescent dans la région II et seul le mode k_- se propage dans la région $x > 0$.

4. Si nous regardons ce qui se passe juste dans la région II, la probabilité d'être dans l'état $|a\rangle$ ou $|b\rangle$ est constante. Il n'y a plus d'oscillation de Rabi !