Lumière et couleurs
Contrôle continu du 24 novembre 2006
Aucun document autorisé

I. Onde plane

On considère, en unité du système international, l'onde plane suivante :

$$\mathbf{E} = \left(-2\mathbf{i} + \sqrt{5}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)\left(10^4 V/m\right) e^{i\left[\frac{1}{3}\left(\sqrt{5}x+2y\right)\pi\times10^7 - 9.42\times10^{15} t\right]}$$

où **i**, **j** et **k** sont les vecteurs unitaires dans les directions x, y et z.

Donner pour cette onde :

1. la direction le long de laquelle le champ électrique oscille
2. la valeur scalaire de l'amplitude du champ électrique
3. la direction de propagation
4. le nombre d'onde et la longueur d'onde
5. la fréquence et la pulsation
6. la vitesse

II. Modèle de conductivité d'un métal

On considère un métal comportant N charges libres q par unité de volume. Ces charges sont soumises à l'action d'un champ électrique **E** et à une force de frottement **F** résultant d'interactions diverses entre charges et le réseau cristallin. Cette force est proportionnelle à la vitesse moyenne **v** des charges et peut s'écrire :

$$\mathbf{F} = -\frac{m\mathbf{v}}{\tau}$$

m étant la masse des charges mobiles.

1. Que signifie ici le terme *vitesse moyenne* ?
2. On suppose d'abord que **E** est constant et la vitesse moyenne **v** nulle à l'instant initial.
   a. Donner l'équation différentielle satisfaite par **v** et décrivant son évolution en fonction du temps.
   b. Montrer que **v** tend vers une valeur limite lorsque t est très supérieur à un temps caractéristique que l'on explicitera.
   c. En déduire l'expression de la conductivité σ du métal en limite basse fréquence.
3. On suppose maintenant que **E** est de la forme : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos\omega t$ ou en introduisant la notation complexe : $\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t)$.
   a. Montrer que, en général, la conductivité $\underline{\sigma}(\omega)$ dépend de ω et est complexe. Ecrire cette dépendance et montrer que $\underline{\sigma}(\omega)$ devient imaginaire pure lorsque ω est très supérieure à une valeur que l'on explicitera. Donner l'expression de $\underline{\sigma}(\omega)$ dans cette limite en fonction de $\underline{\sigma}(0) = \sigma$.
   b. On considère à présent le comportement d'une onde plane électromagnétique de pulsation ω dans un métal, de permittivité égale à celle du vide, et dont la conductivité est imaginaire pure. Rappeler l'expression de équations de

Maxwell pour des champs réels quelconques, puis dans le cadre de champs complexes de pulsation ω de la forme : $\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \underline{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r})]$ avec $\underline{\mathbf{k}} = \underline{k}'\mathbf{u}$ où $\underline{k}'$ est à présent une quantité complexe. Ecrire la relation existant entre $\underline{k}'$ et ω.

III Anneaux dans un interféromètre de Michelson.

Un interféromètre de Michelson est essentiellement constitué par une lame semi réfléchissante L_s (la séparatrice), non absorbante, et deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. La lame L_s est inclinée à 45° par rapport aux deux miroirs, c'est à dire contenue dans le plan bissecteur de l'angle droit qu'ils forment. Dans tout ce problème on ne tient pas compte des inconvénients liés à l'épaisseur de la séparatrice (en fait ils sont compensés par une autre lame : la compensatrice, parallèle à la séparatrice), ni des changements de phase éventuels produits par les réflexions. Le tout est situé dans l'air d'indice 1.

Une source de lumière ponctuelle *S*, située sur l'axe perpendiculaire à M_2 en son centre, envoie sur celui–ci un faisceau de lumière monochromatique (λ = 0.5 µm), et l'on regarde dans la direction de l'axe perpendiculaire de M_1 en son centre la figure d'interférences « à l'infini » formée sur la « lame d'air » à faces parallèles comprise entre M_1 et l'image virtuelle M'_2 de M_2 formée par la séparatrice. En fait, au lieu d'observer la figure d'interférences à l'infini, on l'observe dans le plan focal d'une lentille *L* de focale *f* placée perpendiculairement à l'axe perpendiculaire à M_1 en son centre.

1. Dessiner le montage décrit ci-dessus, en respectant toutes les notations.
2. À partir de la situation où les deux « bras » de l'interféromètre sont égaux, on déplace M_2 d'une distance *e* normalement à son plan. Pour un rayon tombant sur M_2 sous l'incidence *i*, quelle est la différence de marche δ et le déphasage ϕ entre les deux rayons qui interfèrent dans l'espace d'observation ?
3. Les rayons des anneaux brillants sont donnés par les valeurs de l'angle d'incidence *i* telles que l'ordre d'interférence $p = \delta/\lambda$ soit entier. Au centre de la figure d'interférence, l'ordre d'interférence p_0 est-il minimum ou maximum ? Calculer p_0 au centre pour $e = 1\,\text{cm}$. Le centre est-il sombre ou brillant ?
4. On se place dans le cas où le centre de la figure, d'ordre d'interférence p_0, est brillant. Pour un anneau brillant d'ordre d'interférence *p*, on note $m = p_0 - p$. Montrer que les rayons R_m des anneaux brillants observés dans le plan focal de *L* croissent comme la racine des nombres entiers m successifs. Donner l'expression de R_m en fonction de *f*, λ, *e* et *m*. On se placera dans l'approximation où *i* est un angle petit.
5. On place maintenant dans l'un des « bras » une lame mince d'épaisseur $e' = 7{,}5\,\mu\text{m}$ et d'indice $n = 1{,}5$. Montrer que tout se passe comme si l'épaisseur effective e_{eff} de la lame d'air était maintenant $e + e'(n-1)$. À votre avis, le fait d'interposer la lame mince ci-dessus fait-il beaucoup varier l'ordre d'interférence p_0 au centre de la figure et le rayon R_m de l'anneau brillant d'ordre *m* observé dans le plan focal de la lentille L ?