

Licence 3 de PSVP

LP343 Lumière et couleurs 1

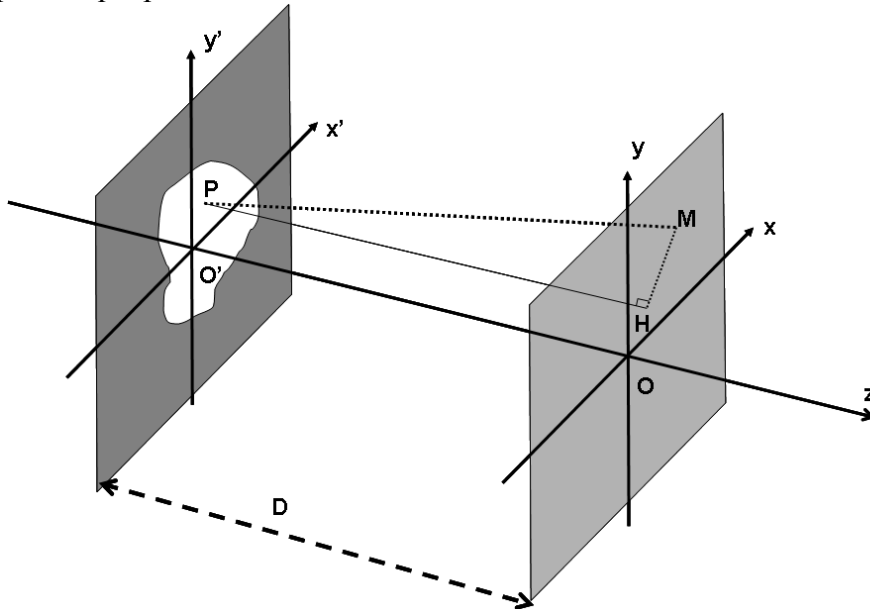
Epreuve du 7 décembre

Durée : 2 heures

Correction

I – Questions de cours – Diffraction

- 1 - Cette équation décrit le principe de Huyghens-Fresnel. Ici une surface plane Σ est éclairée uniformément sous incidence normale par une onde plane monochromatique. Le champ diffracté en tous points M est alors le résultat d'une somme cohérente d'ondes sphériques émises par chaque point P de Σ .



- 2 - Le principe de Fraunhofer s'applique lorsque la distance D (cf. fig. ci-dessus) est très grande devant les dimensions de la pupille Σ . Dans ces conditions :

$$PM^2 = PH^2 + HM^2 = D^2 \left[1 + \frac{HM^2}{D^2} \right] \Rightarrow PM = D \left[1 + \frac{1}{2} \frac{HM^2}{D^2} - \frac{1}{8} \frac{HM^4}{D^4} + \dots \right]$$

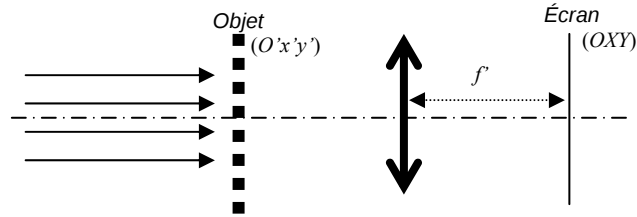
Dans l'équation de la question 1, le terme en $1/PM$ peut être approximé à $1/D$. Par contre dans la phase, compte tenu de la valeur de λ (très petit), le terme du second ordre (voire celui du quatrième) ne peut être négligé : $\left[\exp(ik PM) \approx \exp(ikD) \exp\left(ik \frac{HM^2}{2D}\right) \right]$

$$D'où E(M) \propto \iint_{(x',y') \in \Sigma} E_0 \exp\left\{i \frac{k}{2D} [(x-x')^2 + (y-y')^2]\right\} dx' dy'$$

Dans la suite nous éclairerons des objets plans (fente, double fente...) par une onde plane monochromatique. Dans ces conditions, lorsque l'objet plan est placé dans le plan focal objet ($O'x'y'$) d'une lentille convergente, le champ diffracté dans le plan focal image (OXY) s'écrit :

$$E(X,Y) \propto E_0 \iint_{\Sigma} \tau(x',y') \exp \left[-\frac{2i\pi}{\lambda f'} (x'X + y'Y) \right] dx' dy'$$

où E_0 est l'amplitude de l'onde plane dans le plan de l'objet, λ la longueur d'onde, f' la focale de la lentille et τ le facteur de transmission de l'objet.



II – Diffraction par une fente

1 - Le champ diffracté par la fente s'écrit :

$$\begin{aligned} E(X,Y) &= E_0 \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda f'} (x'X + y'Y) \right] dx' dy' \\ &= E_0 \int_{-a/2}^{a/2} \exp \left(-2i\pi \frac{x'X}{\lambda f'} \right) dx' \int_{-b/2}^{b/2} \exp \left(-2i\pi \frac{y'Y}{\lambda f'} \right) dy' \\ &= E_0 ab \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a X}{\lambda f'} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi b Y}{\lambda f'} \right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où l'intensité } I(X,Y) = I_0 (ab)^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a X}{\lambda f'} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b Y}{\lambda f'} \right)$$

Lorsqu'on déplace latéralement la fente, la figure de diffraction n'est pas modifiée. Lorsqu'on tourne la fente (dans son plan) la figure de diffraction tourne de la même façon.

2 - Lorsque b devient très grand le problème passe à une dimension.

$$\begin{aligned} E(X) &= E_0 \int_{-a/2}^{a/2} \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda f'} x' X \right] dx' \\ &= E_0 a \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a X}{\lambda f'} \right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où l'intensité } I(X) = I_0 a^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a X}{\lambda f'} \right)$$

La fonction $\operatorname{sinc}(x)$ est nulle pour $x = \kappa\pi$ avec $\kappa \neq 0$ donc l'intensité est nulle en $X = \kappa \frac{\lambda f'}{a} \quad \kappa \in \mathbb{Z}^*$

A.N : La première zone sombre est observée à $X = \frac{\lambda f'}{a} = 4\text{mm}$ donc $a = \frac{\lambda f'}{X_0} = 31,64 \mu\text{m}$.

III – Diffraction par deux fentes parallèles

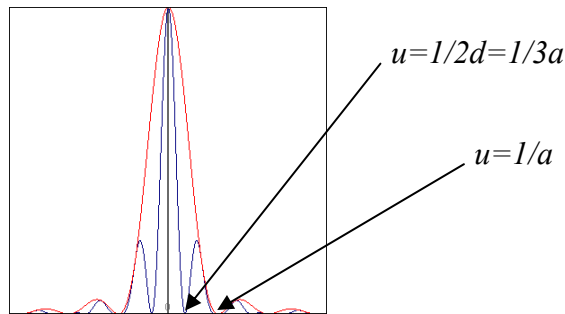
- 1 - Le champ diffracté en un point M de l'écran par deux fentes de largeur a (selon l'axe x') séparées d'une distance d ($> a$) s'écrit :

$$E(X) = E_0 \left[\int_{d/2-a/2}^{d/2+a/2} \exp\left(-2i\pi \frac{x'X}{\lambda f'}\right) dx' + \int_{-d/2-a/2}^{-d/2+a/2} \exp\left(-2i\pi \frac{x'X}{\lambda f'}\right) dx' \right]$$

$$= 2E_0 a \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right) \cos\left(\frac{\pi d X}{\lambda f'}\right)$$

D'où $I(M) = I_0 \operatorname{sinc}^2(\pi a u) \cos^2(\pi d u)$ avec $u = \frac{X}{\lambda f'}$, u qui est l'inverse d'une longueur (m^{-1}) est appelée fréquence spatiale.

- 2 - $d = 3a/2$.



A.N. $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, $f' = 20 \text{ cm}$. Le maximum du signal est au centre de l'écran et la première zone sombre est observée à $X = \frac{\lambda f'}{2d} = 1 \text{ mm}$ du centre donc $d = 63,28 \mu\text{m}$.

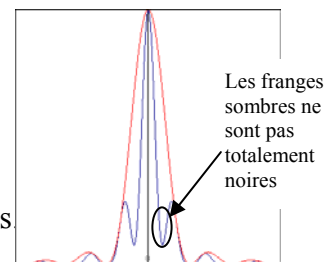
$$3 - \tau(x') = \begin{cases} 1 & \text{si } x' \in [d/2 - a/2, d/2 + a/2] \\ 1/2 & \text{si } x' \in [-d/2 - a/2, -d/2 + a/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = E_0 \left[\int_{d/2-a/2}^{d/2+a/2} \exp\left(-2i\pi \frac{x'X}{\lambda f'}\right) dx' + 0.5 \int_{-d/2-a/2}^{-d/2+a/2} \exp\left(-2i\pi \frac{x'X}{\lambda f'}\right) dx' \right]$$

$$= 0.5 \cdot E_0 a \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right) \left[2 \cos\left(\frac{\pi d X}{\lambda f'}\right) + \exp\left(-i \frac{\pi d X}{\lambda f'}\right) \right]$$

$$\text{D'où } I(X) \propto I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right) \left[2 \cos^2\left(\frac{\pi d X}{\lambda f'}\right) + 1/4 \right]$$

Les franges qui modulent le « sinus cardinal » sont moins contrastées



- 4 - La lame de phase modifie le facteur de transmission $\tau(x')$ du système :

$$\tau(x') = \begin{cases} 1 & \text{si } x' \in [d/2 - a/2, d/2 + a/2] \\ \exp(i\phi) & \text{si } x' \in [-d/2 - a/2, -d/2 + a/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$I(M) = I_0 \operatorname{sinc}^2(\pi a u) \cos^2(\pi d u + \phi/2)$$

Les franges qui modulent le « sinus cardinal » sont donc décalées ; si $\phi=\pi$ la frange centrale est noire.

IV – Diffraction et polarisation

- 1 - Comme les axes des deux polariseurs sont orthogonaux, il n'y a pas d'interférence entre les signaux provenant des deux fentes. La figure de diffraction est donc une superposition (somme des intensités) des deux figures de diffraction correspondant aux deux fentes.

$$I(M) = 2I_0 a^2 \text{sinc}^2(\pi au)$$

L'intensité est donc égale au double de celle obtenue avec une seule fente (question II-2).

Si les axes des polariseurs ne sont plus orthogonaux, il y a de nouveau des interférences et le contraste dépend de l'angle qu'il y a entre les axes.

- 2 – L'analyseur (à 45°) permet d'avoir la même polarisation pour les deux signaux ; il y a donc à nouveau des interférences. $I(M) \propto I_0 \text{sinc}^2(\pi au) \cos^2(\pi du)$