

Les textes de TD proposés constituent une base de travail. Ils sont souvent très proches des cours qu'ils illustrent. Ils permettent aux étudiants de tester leurs connaissances (assimilation du cours, formalisation et résolution mathématiques d'un problème posé, interprétation des résultats....) et à ce titre doivent être travaillés AVANT d'assister aux séances de TD.

Tous les exercices proposés ne seront pas traités en séance. Ceux qui ne le seront pas pourront être abordés dans les séances de suivi. Certains pourront servir de base aux épreuves de contrôle continu ou d'examen.

## TD 1. Opérateurs vectoriels, rappels sur les propriétés des champs **E** et **B** aux interfaces

### I. Les opérateurs **gradient** ( $\text{grad} = \nabla$ ), divergence ( $\text{div} = \nabla \cdot$ ) et **rotationnel** ( $\text{rot} = \nabla \wedge$ ).

**Rappels.** L'opérateur **grad** ( $=\nabla$ ) appliqué à une fonction **scalaire** d'espace notée  $F(x,y,z)$  dans l'espace cartésien, lui fait correspondre un **vecteur** dont les composantes algébriques sur les trois axes **Ox**, **Oy** et **Oz** sont les dérivées partielles de  $F(x,y,z)$  par rapport à  $x$ ,  $y$ , et  $z$ , respectivement, soit :

$$\text{grad}F(x,y,z) = \nabla F(x,y,z) = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  et  $\mathbf{e}_z$  sont les vecteurs unitaires des trois axes **Ox**, **Oy** et **Oz**.

☞ On peut dire ainsi que le **gradient** généralise dans l'espace 3D la notion de dérivée d'une fonction scalaire  $F(x)$  dans l'espace 1D.

L'opérateur  $\text{div} (\nabla \cdot)$  est le **produit scalaire** de l'opérateur **gradient** avec un **vecteur**, soit  $\mathbf{V}(x,y,z)$  dont les composantes algébriques sur les trois axes sont  $V_x(x,y,z)$ ,  $V_y(x,y,z)$ ,  $V_z(x,y,z)$  : c'est donc un **scalaire**. La valeur de ce scalaire est :

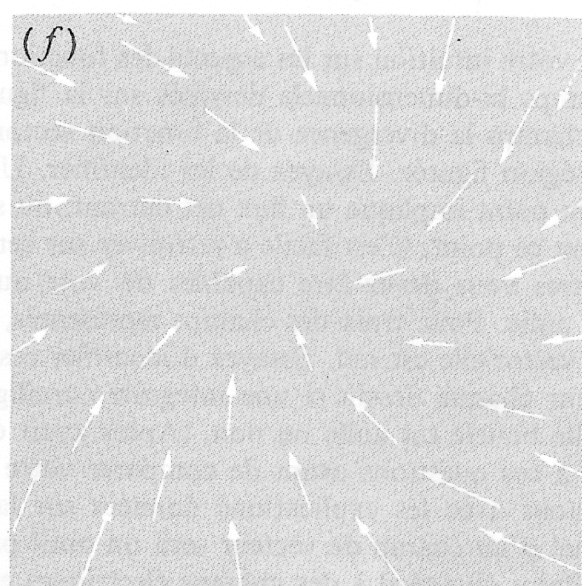
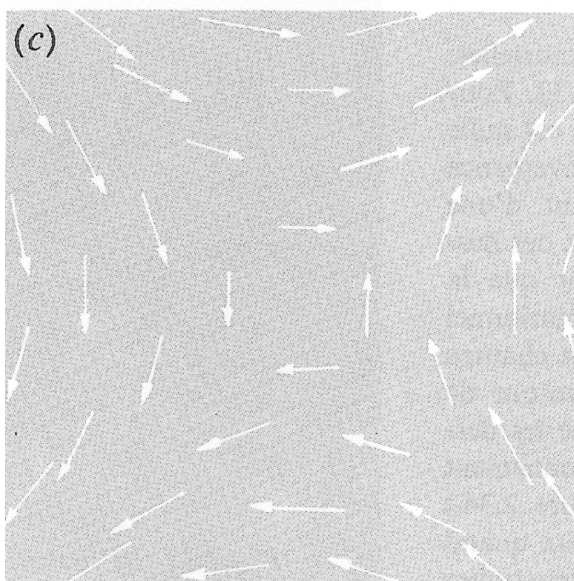
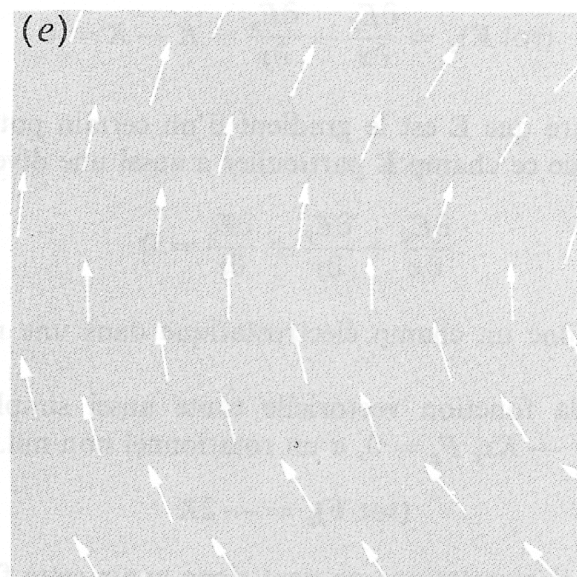
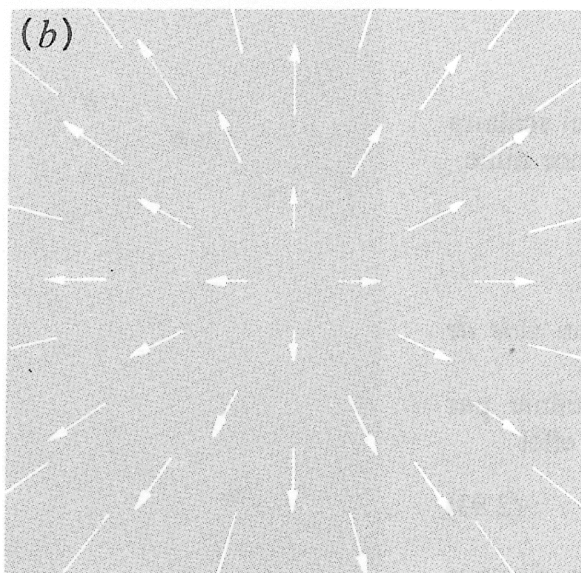
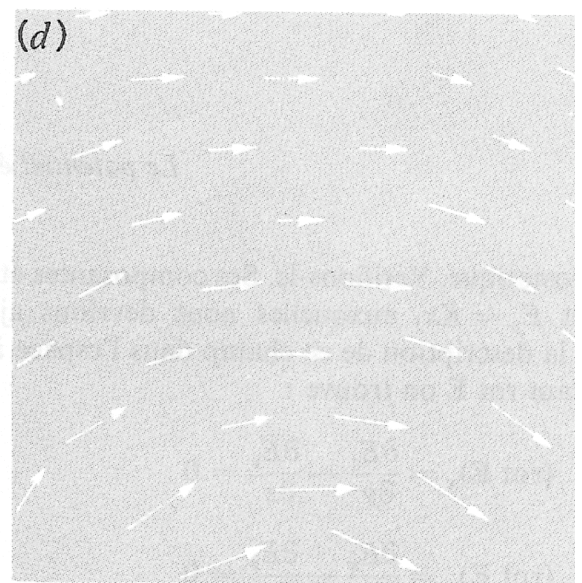
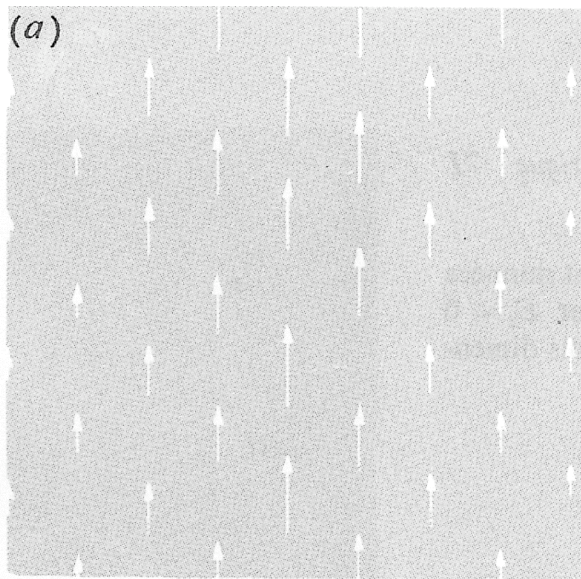
$$\text{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

☞  $\text{div} \mathbf{V}$  représente le **flux** du vecteur  $\mathbf{V}(x,y,z)$  **par unité de volume**, à travers une surface **fermée** enserrant le point de coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$ . En électromagnétisme,  $\text{div} \mathbf{V}$  est analogue au **théorème de Gauss**, exprimé en coordonnées **locales**.

L'opérateur **rot** ( $\nabla \wedge$ ), quant à lui, est le résultat du **produit vectoriel** de **grad** avec un vecteur  $\mathbf{V}(x,y,z)$  : c'est donc un **vecteur**. Il est facile d'en avoir l'expression analytique dans l'espace 3D : dans le repère cartésien, ce sera le résultat du déterminant constitué de  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  et  $\mathbf{e}_z$ , et des composantes de **grad** et  $\mathbf{V}(x,y,z)$ .

☞  $\text{rot} \mathbf{V}(x,y,z)$  représente la **circulation** par unité de surface du vecteur  $\mathbf{V}(x,y,z)$  le long de contours fermés respectivement perpendiculaires aux axes **Ox**, **Oy** et **Oz**. En électromagnétisme, il exprime le **théorème d'Ampère** en coordonnées **locales**.

**Application** : soit les champs de vecteurs 2D représentés a) à f) sur la figure suivante. Quatre sont à divergence nulle, trois sont à rotationnel nul. En b) le champ est central. En c)  $E_x = Ky$  et  $E_y = Kx$ . En d)  $\mathbf{F}$  est proportionnel à  $1/r$  où  $r$  est la distance à un point extérieur au dessin. En e) le **module** de  $\mathbf{F}$  est le même partout. En f) tous les vecteurs convergent vers un centre. Que valent  $\text{div} \mathbf{F}$  et  $\text{rot} \mathbf{F}$  dans tous ces cas ? (Tiré du « Cours de Physique de Berkeley », Tome 2, Chap.2).



## II. Discontinuité du champ électrique $\mathbf{E}$ à la traversée d'une couche de charges $\sigma$ .

Soit un disque plat de rayon  $a$  qui porte une densité superficielle de charge uniforme et positive  $\sigma$ . Le plan du disque est dans le plan  $xOz$ , l'axe  $Oy$  est perpendiculaire au disque en son centre.

1. Calculer le potentiel électrostatique en un point  $P_1(0,y,0)$  de l'axe  $y$ . On distinguera les cas  $y>0$  et  $y<0$ . Que vaut le potentiel au centre (en  $0,0,0$ ) ? Représentation graphique en fonction de  $y$ . Comparer au potentiel créé par une charge **ponctuelle**  $\pi a^2 \sigma$  placée en  $O$ .
2. Comment ferait-on pour calculer le potentiel électrostatique en un point  $P_2$  du bord du disque ? On trouve que sur le bord le potentiel vaut  $\sigma a / \pi \epsilon_0$ .
3. Des questions 1) et 2) montrer qu'il existe un champ électrique non nul  $\mathbf{E}_{\parallel}$  dans le plan du disque. Comment est-il dirigé ?
4. De 1) calculer le champ électrique  $\mathbf{E}_{\perp}$  au point  $P_1(0,y,0)$  de l'axe  $y$ . On distinguera les cas  $y>0$  et  $y<0$ . Représentation graphique de  $\mathbf{E}_{\perp}$  sur l'axe  $Oy$  en fonction de  $y$ .
5. Que vaut la discontinuité de  $\mathbf{E}_{\perp}$  au centre  $O$ , à la traversée du disque ? Retrouver ce résultat en tout point quelconque du disque en appliquant le théorème de Gauss.
6. Dessiner schématiquement les lignes de champ dans l'espace autour du disque.
7. Si on augmente indéfiniment le rayon du disque pour arriver à une nappe infinie plane de charge électrique de densité superficielle  $\sigma$  uniforme, que devient la représentation graphique de  $\mathbf{E}_{\perp}$  de la question 4) ? Dessiner à nouveau schématiquement les lignes de champ dans l'espace autour de la nappe infinie.
8. En déduire alors qu'à la traversée de toute nappe de charges,  $\mathbf{E}_{\parallel}$  est continu et  $\mathbf{E}_{\perp}$  est discontinu. Ceci prendra toute son importance pour étudier à une interface le passage d'une onde électromagnétique entre deux milieux.

## III. Discontinuité du champ électrique $\mathbf{B}$ à la traversée d'une nappe de courant de densité $\vec{j}$ par unité de largeur.

Vous avez vu en cours des expériences de démonstration : lignes de champ magnétique d'un aimant, lignes de champ magnétique autour d'un fil rectiligne puis d'un solénoïde.

1. De l'expérience du champ magnétique  $\mathbf{B}$  créé par un fil rectiligne infini parcouru par un courant  $I$  et des propriétés de symétrie du champ magnétique  $\mathbf{B}$ , retrouver à partir du théorème d'Ampère l'expression de  $\mathbf{B}$  en fonction de  $I$  et de la distance  $r$  entre le fil et le point où l'on cherche  $\mathbf{B}$ .
2. Soit une nappe de courant plane et mince contenue dans le plan  $xOz$ , de densité de courant  $\vec{j}$  par unité de largeur et dirigée vers les  $x>0$ . En appliquant le théorème d'Ampère, montrer que le champ  $\mathbf{B}$  est tangent à la nappe (donc de la forme  $\mathbf{B}_{\parallel}$ ), parallèle à  $Oz$  mais discontinu à la traversée de celle-ci. Calculer la discontinuité de  $\mathbf{B}_{\parallel}$  en fonction de  $j$ .
3. Un solénoïde de  $n$  spires par unité de longueur, et parcouru par un courant  $I$ , peut être considéré comme une nappe de courant enroulée sur elle-même. A partir des résultats de la question 2, montrer qu'il est normal de retrouver que le champ  $\mathbf{B}$  à l'**extérieur** d'un solénoïde (supposé très long devant son rayon) est nul. Calculer alors le champ  $\mathbf{B}$  à l'**intérieur** du solénoïde en fonction de  $n$  et  $I$ .

☞ Des exercices II et III, on voit donc que  $\mathbf{B}_{\parallel}$  est discontinu à la traversée d'une interface, alors que  $\mathbf{E}_{\parallel}$  est continu. L'inverse est vérifié entre les composantes  $\mathbf{E}_{\perp}$  et  $\mathbf{B}_{\perp}$ .