Chapitre 1

Les équations de Maxwell

La lumière est une onde électromagnétique qui se propage dans le vide ou un milieu matériel. Nous allons donc rappeler dans ce premier chapitre les postulats de l'électromagnétisme.

1.1 Les postulats de l'électromagnétisme

1.1.1 Champ électromagnétique

La force exercée par une distribution volumique de charge et de courants $[\rho\,(P,t)\,;\mathbf{j}\,(P,t)]$ sur une charge ponctuelle q, située à l'instant t en un point M et possédant un vecteur vitesse $\mathbf{v}\,(M,t)$, est donnée par la formule de Lorentz

$$\mathbf{F} = q\,[\mathbf{E}\,(M,t) + \mathbf{v}\,(M,t) \wedge \mathbf{B}\,(M,t)]$$

où $[\mathbf{E}\,(M,t)\,;\mathbf{B}\,(M,t)]$ est le champ électromagnétique créé au point M par la distribution $[\rho\,(P,t)\,;\mathbf{j}\,(P,t)]$. Ce champ est solution des équations locales de Maxwell :

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\ ;\ \mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\ ;\ \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0\ ;\ \mathbf{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

Les équations de Maxwell sont *a priori* valables dans tous les milieux, mais nous verrons au chapitre 4 que les difficultés rencontrées pour exprimer les densités de charges et de courants dans la plupart des milieux matériels conduisent à formuler les équations différemment. En pratique, les équations de Maxwell ci-dessus sont *opérationnelles* dans le vide, les métaux et dans les plasmas, milieux où nous savons exprimer aisément ρ et $\mathbf{j}$.

1.1.2 Signification physique des équations de Maxwell

La première équation, dite équation de Maxwell-Gauss exprime le fait que le flux de champ électrique à travers une surface fermée est relié à la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface.

La troisième équation exprime que le flux du champ magnétique à travers n'importe quelle surface fermée est nul. Il n'existe pas de monopôles magnétiques.

La quatrième équation, dite de Maxwell-Ampère, exprime la relation entre la circulation du champ magnétique sur un contour fermé et le flux de courant à travers une surface s'appuyant sur ce contour.

Enfin la deuxième équation, dite de Maxwell-Faraday, donne la relation entre la circulation du champ électrique sur un contour fermé et la variation temporelle du flux du champ magnétique à travers une surface qui s'appuie sur ce contour. C'est le phénomène d'induction.

1.1.3 Quelques commentaires sur les équations de Maxwell

1. Parmi les équations de Maxwell, deux contiennent les sources ρ et $\mathbf{j}$ et deux ne les contiennent pas. Mais ces équations couplent les champs en régime variable, de celle sorte qu'il faut vraiment considérer le couple $[\rho\ ;\ \mathbf{j}]$ comme la source du champ électromagnétique considéré comme l'ensemble $[\mathbf{E}\ ;\ \mathbf{B}]$.
2. On peut montrer qu'un champ de vecteurs est entièrement déterminé par la donnée de sa divergence et de son rotationnel en tout point de l'espace, et de conditions aux limites à l'infini. On peut donc déterminer entièrement les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ à partir des équations de Maxwell.
3. Les équations de Maxwell sont linéaires : nous pouvons donc superposer des solutions.
4. D'autre part les équations de Maxwell sont compatibles entre elles. En effet, puisque $\mathrm{div}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{V}) = 0$ pour un vecteur $\mathbf{V}$ quelconque, on a :
$$\mathrm{div}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{E}) = -\mathrm{div}\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\,(\mathrm{div}\,\mathbf{B})}{\partial t} = 0$$
5. Enfin ces équations sont compatibles avec l'équation locale de conservation de la charge :
$$0 = \mathrm{div}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{B}) = \mu_0 \mathrm{div}\,\mathbf{j} + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial\,(\mathrm{div}\,\mathbf{E})}{\partial t}$$
$$0 = \mu_0\left(\mathrm{div}\,\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right)$$

1.2 Analyse vectorielle

1.2.1 Expression de la divergence

Considérons un pavé infinitésimal de côtés $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, dont un sommet est le point $M(x, y, z)$. Le flux du champ $\mathbf{a}$ à travers les faces du pavés est égal à

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

L'intégrale de surface peut se décomposer en six contributions I_k correspondant aux six faces du pavé. Considérons d'abord les deux faces de surface $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$: face 1 dont la normale sortante est $-\mathbf{u}_x$ et dont tous les points ont pour abscisses x et face 2 dont la normale sortante est $+\mathbf{u}_x$ et dont tous les points ont pour abscisses $x + \mathrm{d}x$:

$$I_1 + I_2 = \mathbf{a}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}_1 + \mathbf{a}(x + \mathrm{d}x, y, z) \cdot d\mathbf{S}_2$$

$$I_1 + I_2 = \mathbf{a}(x, y, z) \cdot (-\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathbf{u}_x) + \mathbf{a}(x + \mathrm{d}x, y, z) \cdot (\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathbf{u}_x)$$

$$I_1 + I_2 = [a_x(x + \mathrm{d}x, y, z) - a_x(x, y, z)]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

D'où avec un développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$I_1 + I_2 = \frac{\partial a_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

De même :

$$I_3 + I_4 = \frac{\partial a_y}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{et} \quad I_5 + I_6 = \frac{\partial a_z}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

En simplifiant par $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, nous obtenons l'expression de la divergence en coordonnées cartésiennes.

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Le résultat se mémorise aisément à l'aide d'un produit scalaire *formel* :

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \left|\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array}\right. \cdot \left|\begin{array}{c} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array}\right.$$

L'expression de la divergence en coordonnées cylindriques et sphériques s'établit de manière identique en considérant un élément de volume adapté.

Le calcul est cependant plus délicat car les surfaces en regard n'ont pas nécessairement la même aire. Nous admetons le résultat :

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r a_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

en cylindrique et

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 a_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(a_\theta \sin\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

en sphérique.

Ces deux expressions ne peuvent pas se mettre sous la forme d'un produit scalaire symbolique d'un opérateur différentiel et du champ $\mathbf{a}$.

1.2.2 Expression du rotationnel

Considérons un contour élémentaire (C), rectangulaire de côtés $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ dont un sommet est le point $M\left(x, y, z\right)$. Choisissons d'orienter le contour (C) par la normale $\mathbf{u}_z$. Dans ces conditions la circulation du champ $\mathbf{a}$ sur le contour (C) est égale :

$$\left(\mathbf{rot\,a}\right)_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

L'intégrale $I = \oint_{(C)} \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$ sur le contour (C) peut se décomposer en quatre composantes correspondant aux quatre côtés AB, BC, CM et MA du contour. Considérons d'abord les deux côtés AB et CM de longueur $\mathrm{d}y$: sur AB tous les points ont pour abscisse $x + \mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{d}y\mathbf{u}_y$; sur CM, tous les points ont pour abscisse x et $\mathrm{d}\mathbf{l} = -\mathrm{d}y\mathbf{u}_y$:

$$I_{AB} + I_{CM} = \mathbf{a}\left(x + \mathrm{d}x, y, z\right) \cdot \left(\mathrm{d}y\mathbf{u}_y\right) + \mathbf{a}\left(x, y, z\right) \cdot \left(-\mathrm{d}y\mathbf{u}_y\right)$$

$$I_{AB} + I_{CM} = \left[a_y\left(x + \mathrm{d}x, y, z\right) - a_y\left(x, y, z\right)\right]\mathrm{d}y$$

D'où avec un développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$I_{AB} + I_{CM} = \frac{\partial a_y}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

De manière analogue on obtient :

$$I_{BC} + I_{MA} = -\frac{\partial a_x}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

En simplifiant par $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ on obtient

$$\left(\mathbf{rot\,a}\right)_z = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

Les composantes suivant $\mathbf{u}_x$ et $\mathbf{u}_y$ s'obtiennent par permutation circulaire

$$\mathbf{rot\,a} = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{array} \right.$$

Le résultat peut s'écrire de manière formelle à l'aide d'un produit vectoriel :

$$\mathbf{rot\,a} = \nabla \wedge \mathbf{a}$$

En coordonnées cylindriques et sphériques l'expression du rotationnel s'obtient en considérant les surfaces élémentaires adaptées. Le calcul est compliqué et on obtient

$$\mathbf{rot\,a} = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

en cylindrique et

$$\mathbf{rot\,a} = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (a_\varphi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

en sphérique. Ces expressions ne peuvent pas se mettre sous la forme d'un produit vectoriel d'un opérateur différentiel et du champ $\mathbf{a}$.

1.3 Version intégrale des équations de Maxwell

La divergence du vecteur $\mathbf{a}$ vérifie à l'échelle d'un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ entouré par la surface $\mathrm{d}S$ que $\mathrm{div}\,\mathbf{a}\,\mathrm{d}\tau$ est égal au flux du champ $\mathbf{a}$ sortant de $\mathrm{d}\tau$ à travers $\mathrm{d}S$. En intégrant cette égalité on obtient la forme intégrale pour tout volume (V) limité par une surface fermée (Σ)

$$\oint\!\!\oint_{(\Sigma)} \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{(V)} \mathrm{div}\,\mathbf{a}\,\mathrm{d}\tau$$

La forme intégrale de l'equation locale de Maxwell $\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ donne le théorème de Gauss pour le champ électrique

$$\oint\!\!\oint_{(\Sigma)} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

où q est la charge comprise dans le volume (V) limité par une surface fermée (Σ).

La forme intégrale de l'équation locale de Maxwell div $\mathbf{B} = 0$ donne le caractère conservatif du flux de champ magnétique

$$\oint\oint_{(\Sigma)} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

.

Le rotationnel du champ de vecteurs **a** vérifie que, à l'échelle de surface élémentaire d**S** soutenue par un contour orienté dC, la circulation du champ **a** sur le contour dC vaut $\mathbf{rot}\,\mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$. En intégrant cette égalité on obtient la forme intégrale pour toute surface (S) soutenue par un contour fermé orienté (C)

$$\iint_{(S)} \mathbf{rot}\,\mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_{(C)} \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

La forme intégrale de l'équation locale de Maxwell $\mathbf{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ donne le théorème d'Ampère qui exprime que la circulation du champ magnétique sur un coutour fermé (C) est égale au flux de courant à travers une surface (S) soutenue par ce contour :

$$\oint_{(C)} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I_{(S)} + \epsilon_0 \mu_0 \iint_{(S)} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Le deuxième terme dans le membre de droite de l'équation est souvent appelé courant de déplacement.

Enfin, la forme intégrale de l'équation locale de Maxwell $\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ donne en version intégrale la loi de Faraday sur un contour fermé (C) s'appuyant sur une surface (S) :

$$\oint_{(C)} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\iint_{(S)} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \right) = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

En définissant la force électromotrice dans un circuit fermé comme la circulation du champ **E**, nous voyons que cette force est égale à la variation temporelle du flux de champ magnétique à travers une surface soutenue par le circuit.

1.4 Conservation de la charge

Dans un milieu conducteur comportant différent types de porteur repérés par l'indice (i), possédant une densité volumique de charges ρ_i et une vitesse d'ensemble $\mathbf{v}_i$, on définit le vecteur densité de courant volumique **j** et l'intensité du courant $I_{(S)}$ à travers une surface (S) orientée :

$$\mathbf{j} = \sum_i \rho_i \mathbf{v}_i \quad ; \quad I_{(S)} = \iint_{(S)} \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Alors l'intensité $I_{(S)}$ est égale à la charge qui traverse (S) par unité de temps :

$$\delta q = I_{(S)} \mathrm{d}t$$

Considérons un volume (V) fixe, limité par la surface fermée (Σ) et faisons un bilan de charges entre l'instant t et $t + \mathrm{d}t$. La charge contenue dans (V) s'écrit

$$q = \iiint_{(V)} \rho\,(M, t)\,\mathrm{d}\tau$$

où $\rho\,(M, t)$ désigne la densité volumique totale de charges. Entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, cette charge varie de

$$\begin{aligned}\mathrm{d}q &= \iiint_{(V)} \rho\,(M, t + \mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\tau - \iiint_{(V)} \rho\,(M, t)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \iiint_{(V)} \left[\rho\,(M, t + \mathrm{d}t) - \rho\,(M, t + \mathrm{d}t)\right] \mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

Soit avec un développement de Taylor à l'ordre 1

$$\mathrm{d}q = \iiint_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}t \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t \iiint_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}\tau$$

Entre les mêmes instants, la charge $\delta q_{(\Sigma)}$ qui sort de (V) en franchissant (Σ) vaut par définition de l'intensité :

$$\delta q_{(\Sigma)} = I_{(\Sigma)} \mathrm{d}t = \mathrm{d}t \oint\!\!\oint_{(\Sigma)} \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Le postulat de la conservation de la charge affirme que la variation de la charge q contenue dans le volume (V) n'est due qu'au transfert de charges $\delta q_{(\Sigma)}$ à travers (Σ). En orientant conventionnellement la surface (Σ) vers l'extérieur, $\delta q_{(\Sigma)}$ est compté positivement lorsqu'elle contribue à diminuer q, donc :

$$\mathrm{d}q = -\delta q_{(\Sigma)} \text{ soit } \mathrm{d}t \iiint_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}\tau = -\mathrm{d}t \oint\!\!\oint_{(\Sigma)} \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

En utilisant la définition de la divergence on obtient :

$$\iiint_{(V)} \left(\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \mathrm{d}\tau = 0$$

Cette intégrale est valable quel que soit le volume (V), donc nous obtenons l'équation locale de conservation de la charge

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Cette équation locale présente des analogies structurelles avec de nombreuses équations locales traduisant la conservation d'une grandeur scalaire extensive.