

Chapitre 2

L'équation d'onde

2.1 L'opérateur laplacien

On appelle laplacien d'un champ scalaire f l'opérateur du deuxième ordre défini par :

$$\Delta f = \text{div} (\mathbf{grad} f)$$

En coordonnées cartésiennes, on obtient aisément :

$$\Delta f = \nabla^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

On appelle laplacien-vecteur d'un champ de vecteurs $\mathbf{a}$ l'opérateur $\Delta \mathbf{a}$ tel que :

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{grad} (\text{div} \mathbf{a}) - \mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{a})$$

Cette formule est souvent utilisée pour éliminer un double-rotationnel :

$$\mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{a}) = \mathbf{grad} (\text{div} \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}$$

En coordonnées cartésiennes, l'opérateur laplacien-vecteur se distribue sur les trois composantes et s'exprime à l'aide du laplacien de ces trois composantes.

$$\Delta \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{pmatrix}$$

2.2 Equations de propagation des champs

Les équations de Maxwell couplent le champ électrique et le champ magnétique par le biais de dérivés du premier ordre. Pour obtenir des équations

découplées pour chacun des champs, nous allons établir des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre.

2.2.1 Cas général

Pour éliminer $\mathbf{B}$, prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{E}) = -\mathbf{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial (\mathbf{rot} \mathbf{B})}{\partial t}$$

En utilisant la formule du double rotationnel, en dérivant l'équation de Maxwell-Ampère par rapport au temps et en substituant il vient :

$$\mathbf{grad} (\text{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Avec l'équation de Maxwell-Gauss, il vient finalement :

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{grad} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

De même, pour éliminer $\mathbf{E}$, prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{rot} \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{rot} \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial (\mathbf{rot} \mathbf{E})}{\partial t}$$

En utilisant la formule du double rotationnel, en dérivant l'équation de Maxwell-Faraday par rapport au temps et en substituant il vient :

$$\mathbf{grad} (\text{div} \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{rot} \mathbf{j} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Avec l'équation $\text{div} \mathbf{B} = 0$, il vient finalement :

$$\Delta \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{rot} \mathbf{j}$$

Les équations sont appelées équations de propagation des champs. Elles ne justifient aucun effort de mémorisation dans le cas général où $\rho \neq 0$ et $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$, mais il faut être capable de les retrouver.

2.3. SOLUTION DE L'ÉQUATION DE PROPAGATION DANS LE VIDE³

2.2.2 En l'absence de charge et de courant

Dans un domaine sans charges ni courants, les équations de propagation des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ prennent la forme commune d'une équation de D'Alembert vectorielle :

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad ; \quad \Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

où la célérité c est définie par :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

2.3 Solution de l'équation de propagation dans le vide

En coordonnées cartésiennes, où l'opérateur laplacien se distribue sur les composantes des champs, chacune des six composantes $[E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z]$ du champ électromagnétique est solution d'une équation de D'Alembert scalaire :

$$\Delta a - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0$$

Nous avons ainsi découplé les six composantes du champ électromagnétique.

2.3.1 L'onde plane progressive

On appelle onde plane (OP en abrégé) une onde dont les surfaces d'onde, lieu des points où le champ est constant à un instant donné, sont une famille de plan orthogonaux à une direction $\mathbf{u}$ fixe. Par un choix judicieux des axes, l' OP ne dépend que d'une seule variable cartésienne, par exemple x , c'est-à-dire que $a(M, t) = a(x, t)$. Dans ce cas l'équation de D'Alembert se simplifie en :

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0$$

Pour résoudre cette équation faisons le changement de variable $u = x - ct$ et $v = x + ct$ dans l'équation de D'Alembert ci-dessus :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial a}{\partial v} \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = -c \frac{\partial a}{\partial u} + c \frac{\partial a}{\partial v} \end{aligned}$$

Puis en opérant de même pour les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial a}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 a}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 a}{\partial u \partial v}$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial a}{\partial t} \right) = \left(-c \frac{\partial}{\partial u} + c \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(-c \frac{\partial a}{\partial u} + c \frac{\partial a}{\partial v} \right) = c^2 \frac{\partial^2 a}{\partial u^2} + c^2 \frac{\partial^2 a}{\partial v^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 a}{\partial u \partial v}$$

L'équation de D'Alembert s'écrit donc :

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 a}{\partial u \partial v} = 0$$

tous les autres termes disparaissant. Cette équation s'écrit aussi bien :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial a}{\partial v} \right) = 0$$

ce qui montre que la fonction $\partial a / \partial v$ est indépendante de u ; c'est donc une fonction quelconque de v , ce qui s'écrit :

$$\frac{\partial a}{\partial v} = h(v)$$

En intégrant cette équation à u fixé, et en notant $g(v)$ une primitive de $h(v)$, il apparaît une "‘constante d'intégration’", c'est-à-dire une fonction quelconque de u :

$$a(x, t) = f(u) + g(v)$$

En remplaçant u et v par leurs expressions, le résultat prend la forme finale :

$$a(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

On peut écrire la fonction quelconque $g(x + ct)$ sous la forme $g[-((-x) - ct)]$ c'est-à-dire sous la forme d'une fonction quelconque de la variable $(-x) - ct$; nous voyons donc ici que l'interprétation de la fonction $g(x + ct)$ est la même que celle de la fonction $f(x - ct)$, à un changement d'orientation de l'axe des x près. C'est pourquoi dans la suite, nous chercherons à n'interpréter que le seul terme $f(x - ct)$. Nous dirons qu'une onde de la forme $f(x - ct)$ est une onde plane progressive.

Il est remarquable que le champ $a(x, t)$ d'une onde plane progressive ne dépende des deux variables x et t que par l'intermédiaire de l'unique variable $x - ct$. Ce fait confère à l'onde plane progressive des propriétés importantes.

2.3. SOLUTION DE L'ÉQUATION DE PROPAGATION DANS LE VIDE⁵

Considérons par exemple l'amplitude $a(0, t)$ du champ en fonction du temps. En remarquant que :

$$a(x, t) = f(x - ct) = f\left[0 - c\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] = a\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$$

nous voyons que le champ en $x = 0$ détermine complètement le champ dans tout l'espace à tout instant.

De même, supposons connue l'amplitude $a(x, 0)$ du champ à l'instant $t = 0$. En remarquant que

$$a(x, t) = f(x - ct) = f[(x - ct) - 0] = a(x - ct, 0)$$

nous voyons que l'amplitude $a(x, 0)$ du champ à l'instant $t = 0$ détermine complètement l'amplitude du champ à tout instant. L'allure de l'onde à l'instant $t > 0$ s'obtient en translatant l'allure à l'instant $t = 0$ de la distance ct . Ainsi une onde plane progressive de la forme $a(x, t) = f(x - ct)$ représente la propagation sans déformation d'un signal à la vitesse c dans le sens des x croissants. L'onde $a(x, t) = g(x + ct)$ représente la propagation dans le sens des x décroissants.

En écrivant $x = \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{r}$, on peut réécrire l'onde plane progressive sous la forme intrinsèque $a(M, t) = f(\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{r} - ct)$. Puis en renonçant à particulariser l'axe des x c'est-à-dire en notant $\mathbf{u}$ la direction de propagation supposée quelconque, nous obtenons la forme générale d'une onde plane progressive se propageant avec la célérité c dans la direction de vecteur unitaire $\mathbf{u}$:

$$a(M, t) = f(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct)$$

Nous admettrons que toute solution de l'équation de D'Alembert est une superposition d'ondes planes progressives, dont les directions de propagation $\mathbf{u}$ couvrent tout l'espace. Notons toutefois que, bien que les ondes planes progressives permettent d'engendrer toutes les solutions de l'équation de D'Alembert, chacune d'elle à un caractère non-physique : en effet l'invariance par translation selon y et z pour une onde plane progressive se propageant selon $\mathbf{u}_x$ imposerait que la source de cette onde soit elle-même invariante par les mêmes translations, c'est-à-dire de surface infinie.

2.3.2 L'onde plane progressive harmonique

A $\mathbf{r}$ fixé, la fonction $f(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct)$ est une fonction du temps t . Si elle est périodique, elle peut être décomposée en série de Fourier. Sinon, le théorème de réciprocité de la transformée de Fourier montre qu'elle peut être

considérée comme une somme de fonctions sinusoïdales du temps. Ainsi, la famille des fonctions $f(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct) = A \cos[\omega(t - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{c})]$ constitue une famille privilégiée d'ondes planes progressives appelées ondes planes progressives harmoniques.

Ces fonctions de période temporelle $T = 2\pi/\omega$ possèdent une période spatiale $\lambda = cT = 2\pi c/\omega$ appelée longueur d'onde. Afin d'alléger les notations, on définit le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ dont la projection sur $\mathbf{u}$ est appelée nombre d'onde :

$$\mathbf{k} = k\mathbf{u}_x \text{ avec } k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

L'onde plane progressive harmonique est alors de la forme :

$$a(M, t) = A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi)$$

Le terme ϕ peut aisément être éliminé en changeant l'origine des temps.

On appelle onde électromagnétique plane progressive harmonique (en abrégé OemPPH) une solution des équations de Maxwell dont les six composantes du champ électromagnétiques sont des ondes planes progressives harmoniques de même pulsation ω et de même vecteur d'onde $\mathbf{k}$: seules leurs amplitudes A et leurs phases à l'origine ϕ sont *a priori* différentes.

2.3.3 Le spectre électromagnétique et les couleurs

Les différentes bandes de fréquence ou de longueur d'onde correspondent à différents domaines des ondes électromagnétiques. De même dans le domaine visible les différentes fréquences correspondent à différentes couleurs. Pour cette raison on peut également dire qu'une onde plane progressive harmonique est une onde plane progressive monochromatique.

- Violet : 0,4 - 0,446 μm
- Bleu : 0,446 - 0,500 μm
- Vert : 0,500 - 0,578 μm
- Jaune : 0,578 - 0,592 μm
- Orange : 0,592 - 0,620 μm
- Rouge : 0,620 - 0,7 μm