Chapitre 3

Structure des ondes planes progressives harmoniques

3.1 Notation complexe

A toute solution $a(M,t) = A\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \phi)$ on associe le champ complexe dont $a(M,t)$ est la partie réelle et définie par :

$$\underline{a}(M,t) = a(M,t) + ia(M,t-T/4) = A\exp[i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \phi)]$$

Alors en explicitant $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$, on obtient :

$$\frac{\partial \underline{a}}{\partial t} = i\omega\underline{a} \ ; \ \frac{\partial \underline{a}}{\partial x} = -ik_x\underline{a} \ ; \ \frac{\partial \underline{a}}{\partial y} = -ik_y\underline{a} \ ; \ \frac{\partial \underline{a}}{\partial z} = -ik_z\underline{a}$$

Ces résultats peuvent se regrouper à l'aide de l'opérateur nabla :

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega \ ; \ \nabla = -i\mathbf{k}$$

Pour une OemPPH, on associe un champ complexe en passant en notation complexe toutes les composantes du champ électromagnétique. En regroupant les amplitudes et les phases à l'origine dans deux vecteurs à composantes complexes $\underline{\mathbf{E}}_0$ et $\underline{\mathbf{B}}_0$, les champs complexes d'une OemPPH sont de la forme :

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})] \ ; \ \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{B}}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]$$

3.2 Structure des ondes planes progressives harmoniques dans le vide

Ici, nous exploitons directement les équations de Maxwell en notation complexe. En utilisant l'opérateur ∇ particulièrement efficace ici, ces équations s'écrivent en l'absence de charges et de courants :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \ ; \ \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \ ; \ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \ ; \ \nabla \wedge \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Après transcription en notation complexe, il vient :

$$-i\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0 \ ; \ -i\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{E}} = -i\omega \underline{\mathbf{B}} \ ; \ -i\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0 \ ; \ -i\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{B}} = i\epsilon_0 \mu_0 \omega \underline{\mathbf{E}}$$

La transcription de l'équation de Maxwell-Gauss impose : $\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0$, soit avec $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0$. En prenant la partie réelle, nous obtenons alors :

$$\Re\left(\mathbf{u} \cdot \underline{\mathbf{E}}\right) = 0 \text{ soit } \mathbf{u} \cdot \Re\left(\underline{\mathbf{E}}\right) = 0 \text{ puis } \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = 0$$

Ainsi le champ électrique $\mathbf{E}$ est à tout instant perpendiculaire à la direction de propagation $\mathbf{u}$: on dit que les ondes éléctromagnétiques planes progessives harmoniques dans le vide sont transverses électriques.

La transcription de l'équation de conservation du flux magnétique conduit, avec des calculs strictement analogues, à la condition :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{B} = 0$$

Ainsi le champ magnétique $\mathbf{B}$ est à tout instant perpendiculaire à la direction de propagation $\mathbf{u}$: on dit que les ondes éléctromagnétiques planes progessives harmoniques dans le vide sont transverses électriques. Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ étant tout deux perpendiculaires à la direction de propagation $\mathbf{u}$, on dit que les ondes éléctromagnétiques planes progessives harmoniques dans le vide sont transversales.

Les transcriptions de l'équation de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère s'écrivent après simplification :

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{k}{\omega}\mathbf{u} \wedge \underline{\mathbf{E}} \ ; \ -\frac{1}{c^2}\underline{\mathbf{E}} = \frac{k}{\omega}\mathbf{u} \wedge \underline{\mathbf{B}}$$

En éliminant $\underline{\mathbf{B}}$, il vient :

$$k\mathbf{u} \wedge \left(\frac{k}{\omega}\mathbf{u} \wedge \underline{\mathbf{E}}\right) = -\frac{\omega}{c^2}\underline{\mathbf{E}}$$

En développant le double produit vectoriel :

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \underline{\mathbf{E}}) = (\mathbf{u} \cdot \underline{\mathbf{E}})\,\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\,\underline{\mathbf{E}} = -\underline{\mathbf{E}}$$

il vient :

$$-\frac{k^2}{\omega}\underline{\mathbf{E}} = -\frac{\omega}{c^2}\underline{\mathbf{E}} \quad \text{soit} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Nous obtenons ainsi la relation de dispersion liant k et ω, et qui apparaît ici comme la condition de compatibilité des quatre équations de Maxwell :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Cette relation de dispersion est conforme à ce que nous attendions d'après le chapitre précédent pour une solution harmonique des équations de D'Alembert.

En remplaçant enfin dans la transcription de l'équation de Maxwell-Faraday, nous obtenons une relation entre les champs électrique et magnétique :

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{k}{\omega}\mathbf{u} \wedge \underline{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{u} \wedge \underline{\mathbf{E}}}{c}$$

En prenant les parties réelles, il vient :

$$\mathbf{B} = \Re\left(\underline{\mathbf{B}}\right) = \Re\left(\frac{\mathbf{u} \wedge \underline{\mathbf{E}}}{c}\right) = \frac{\mathbf{u}}{c} \wedge \Re\left(\underline{\mathbf{E}}\right) = \frac{\mathbf{u} \wedge \mathbf{E}}{c}$$

Soit finalement :

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{u} \wedge \mathbf{E}}{c}$$

Cette relation montre d'abord que le trièdre $(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ est un trièdre orthogonal direct. En outre le rapport des champs vaut :

$$\frac{E\,(M,t)}{B\,(M,t)} = c$$

de telle sorte que le champ électrique et le champ magnétique d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique dans le vide sont en phase.

L'ensemble de ces résultats constitue la structure des ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques dans le vide. Il importe à la fois de les connaître parfaitement pour les utiliser directement, mais aussi de prendre garde à ne les utiliser que dans ce cas là ! Notons toutefois que cette structure ne fait pas apparaître la pulsation ω. D'après l'analyse de Fourier, toute onde électromagnétique plane progressive est une somme d'ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques ayant toutes la même direction de propagation $\mathbf{u}$ et des pulsations ω différentes. Ainsi, les résultats obtenus pour les ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques s'étendent par sommation aux ondes électromagnétiques planes progressives non nécessairement harmoniques.

3.3 Polarisation des ondes planes progressives harmoniques

La structure des OemPPH laisse indéterminée la direction du champ électrique $\mathbf{E}$ dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation $\mathbf{u}$. Cette direction est appelée direction de polarisation de l'onde. Notons qu'une fois que cette direction est connue, celle de $\mathbf{B}$ est déterminée par la structure des ondes OemPPH.

Prenons un trièdre cartésien, dont $\mathbf{u}_x$ soit la direction de propagation de l'OemPPH. Par définition le champ électrique est de la forme :

$$\mathbf{E} = \left| \begin{array}{c} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx - \phi) \end{array} \right.$$

où on a choisi l'origine des temps de manière à prendre nulle une des phases à l'origine.

Dans le cas le plus général, le champ électrique $\mathbf{E}$ d'une onde OemPPH décrit en un point donné une ellipse avec une période égale à celle de l'onde ; on dit que l'onde est polarisée elliptiquement.

Si de plus, l'ellipse est décrite dans le sens trigonométrique autour du vecteur $\mathbf{u}$, on dit que la polarisation est elliptique-gauche (PE_g en abrégé) ; si l'ellipse est décrite dans le sens des aiguilles d'une montre, la polarisation est dite elliptique-droite (PE_d en abrégé). Attention, cette convention est celle des opticiens. Les physiciens des particules ont opté pour la convention inverse !

Par rotation des axes $\mathbf{u}_y$ et $\mathbf{u}_z$, on peut toujours se ramener au cas d'une ellipse d'axes $\mathbf{u}_y$ et $\mathbf{u}_z$ et mettre le champ électrique sous la forme :

$$\mathbf{E} = \left| \begin{array}{c} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ \pm E_{0z} \sin(\omega t - kx) \end{array} \right.$$

Le signe $+$ représente le cas d'une PE_g et le signe $-$ le cas d'une PE_d.

Dans le cas particulier où les deux composantes du champ ont même amplitude, on obtient des polarisations circulaires-droites (PC_d en abrégé) et circulaire-gauches (PC_g en abrégé) :

$$PC_g(+) \text{ et } PC_d(-) \ : \ \mathbf{E} = \left| \begin{array}{c} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ \pm E_0 \sin(\omega t - kx) \end{array} \right.$$

Enfin lorsque $\phi = 0$, l'ellipse se réduit à un segment. On dit que la polarisation est rectiligne (PR en abrégé) et le champ électrique est de la forme :

$$PR \ : \ \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi)$$

Si le cas le plus général est bien la polarisation elliptique, il importe de remarquer qu'une onde polarisée elliptiquement se décompose en deux ondes polarisées rectilignement dans des directions orthogonales. Ainsi, toute onde électromagnétique dans le vide est une superposition d'ondes planes progressives harmoniques polarisées rectilignement : l'OemPPH PR apparaît comme le maillon élémentaire de la théorie des ondes électromagnétiques dans le vide.

Il est parfois commode de caractériser la nature de la polarisation d'une OemPPH en notation complexe. Pour une onde de la forme $\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$, on a :

$$PE \ : \ \underline{\mathbf{E}}_0 \text{ quelconque} \ ; \ PR \ : \ \underline{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{E}_0 \text{ réel}$$

$$PC_g \ : \ \underline{\mathbf{E}}_0 = E_0(\mathbf{u}_y - i\mathbf{u}_z) \, ; \quad PC_d \ : \ \underline{\mathbf{E}}_0 = E_0(\mathbf{u}_y + i\mathbf{u}_z)$$

3.4 Propagation de l'énergie des OemPPH

3.4.1 Puissance fournie par un champ électromagnétique à des porteurs de charges

Considérons une distribution de charges et de courants $[\rho \ ; \ \mathbf{j}]$ soumise à un champ électromagnétique $[\mathbf{E} \ ; \ \mathbf{B}]$ non nécessairement créé par elle-même. Une charge q_i de cette distribution subit la force de Lorentz :

$$\mathbf{f}_i = q_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{B})$$

dont la puissance vaut :

$$p_i = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i = q_i \, \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E}_i$$

Soit n_i le nombre volumique de charges de type (i). Dans un élément de volume $\mathrm{d}\tau$ il y a donc $\mathrm{d}N_i = n_i \mathrm{d}\tau$ charges de types (i). En sommant sur tous les types de charges, la puissance fournie par le champ électromagnétique aux porteurs de charges contenu dans l'élément de volume $d\tau$ s'écrit :

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \sum_i (q_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E})\, \mathrm{d}N_i = \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E}\, \mathrm{d}\tau$$

On voit apparaître les densités volumiques de charges $\rho_i = n_i q_i$ associées à chaque type de porteurs et, en factorisant $\mathbf{E}$, la densité de courants $\mathbf{j} = \sum \rho_i \mathbf{v}_i$:

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \left(\sum_i \rho_i \mathbf{v}_i\right) \cdot \mathbf{E}\, \mathrm{d}\tau = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\, \mathrm{d}\tau$$

En définitive la puissance volumique fournie par un champ élecromagnétique à des porteurs de charges s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\tau} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

3.4.2 Equation locale de Poynting

Nous considérons désormais le cas particulier où le champ électromagnétique $[\mathbf{E}\ ;\ \mathbf{B}]$ est créé par la distribution de charges et de courants $[\rho\ ;\ \mathbf{j}]$. Ces grandeurs sont donc reliées par les équations de Maxwell grâce auxquelles nous nous proposons d'exprimer la puissance volumique $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. En exprimant $\mathbf{j}$ à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère, il vient :

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot\, B} - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Avec la formule d'analyse vectorielle :

$$\mathrm{div}\ (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{rot\, E} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot\, B}$$

nous obtenons :

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\mathrm{div}\ \left(\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{rot\, E} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2}\right)$$

Avec l'équation de Maxwell-Faraday, nous obtenons alors :

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\mathrm{div}\ \left(\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}\right) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2}\right)$$

Et finalement l'équation locale de Poynting :

$$\mathrm{div}\ \left(\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2}\right) = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

3.4.3 Grandeurs énergétiques associées à un champ électromagnétique

L'équation locale de Poynting a la forme classique d'une équation traduisant le bilan d'une grandeur scalaire extensive G avec un terme source au deuxième membre : elle conduit à postuler que l'on peut associer au champ électromagnétique une énergie électromagnétique U_{em} avec une densité volumique d'énergie électromagnétique $u_{em} = \mathrm{d}U_{em}/\mathrm{d}\tau$ et un vecteur de flux de puissance électromagnétique, communément appelé vecteur de Poynting $\mathbf{\Pi}$, tels que :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \; ; \; u_{em} = \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

L'équation locale de Poynting s'écrit alors :

$$\mathrm{div}\, \mathbf{\Pi} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

Pour dégager sa signification concrète, intégrons l'équation locale de Poynting sur un volume (V) limité par la surface fermée (Σ) :

$$\iiint_{(V)} \mathrm{div}\, \mathbf{\Pi}\, \mathrm{d}\tau + \iiint_{(V)} \frac{\partial u_{em}}{\partial t}\, \mathrm{d}\tau = - \iiint_{(V)} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\, \mathrm{d}\tau$$

$$\frac{\mathrm{d}U_{em}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iiint_{(V)} u_{em}\, \mathrm{d}\tau \right) = - \oint\oint_{(\Sigma)} \mathbf{\Pi} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \iiint_{(V)} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\, \mathrm{d}\tau$$

Cette relation conduit à postuler que le flux de vecteur de Poynting à travers une surface (S) est égale à la puissance électromagnétique transportée à travers cette surface :

$$\mathcal{P}_{(\Sigma)} = \oint\oint_{(\Sigma)} \mathbf{\Pi} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

De telle sorte que, en multipliant par dt, la relation intégrale de Poynting apparaît comme le bilan d'énergie électromagnétique U_{em} :

$$-\mathrm{d}U_{em} = \mathcal{P}_{(\Sigma)}\mathrm{d}t + \left(\iiint_{(V)} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\, \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}t$$

Ainsi, la diminution $-\mathrm{d}U_{em}$ de l'énergie électromagnétique d'un volume (V) entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ est égale à la somme de l'énergie cédée aux porteurs de charges et de l'énergie électromagnétique ayant traversée la surface (Σ) limitant le volume (V) de l'intérieur vers l'extérieur.

3.4.4 Propagation de l'énergie des OemPPH

Compte-tenu de la structure d'une OemPPH, son vecteur de Poynting vaut :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c}\mathbf{E} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{E}) = \left(\frac{E^2}{\mu_0 c}\right)\mathbf{u} - \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}}{\mu_0 c}\right)\mathbf{u} = \left(\frac{E^2}{\mu_0 c}\right)\mathbf{u}$$

Et, avec $B = E/c$ et $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, sa densité volumique d'énergie électromagnétique vaut :

$$u_{em} = \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

Il y a donc équipartition entre les deux termes de l'énergie électromagnétique.

Pour une OemPPH PE de la forme :

$$\mathbf{E} = E_{0y} \cos(\omega t - kx)\, \mathbf{u}_y \pm E_{0y} \sin(\omega t - kx)\, \mathbf{u}_z$$

il est naturel de calculer les moyennes temporelles $\langle u_{em} \rangle$ et $\langle \mathbf{\Pi} \rangle$ qui sont seules accessibles aux détecteurs compte-tenu de la fréquence élevée des ondes électromagnétiques :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{\Pi} \rangle &= \frac{\langle E^2 \rangle}{\mu_0 c}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}}{\mu_0 c}\left\langle E_{0y}^2 \cos^2(\omega t - kx) + E_{0z}^2 \sin^2(\omega t - kx)\right\rangle \\
&= \left(\frac{E_{0y}^2 + E_{0z}^2}{2\mu_0 c}\right)\mathbf{u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle u_{em} \rangle &= \epsilon_0 \left\langle E^2 \right\rangle = \epsilon_0 \left\langle E_{0y}^2 \cos^2(\omega t - kx) + E_{0z}^2 \sin^2(\omega t - kx)\right\rangle \\
&= \epsilon_0 \left(\frac{E_{0y}^2 + E_{0z}^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Nous constatons ici que $\langle u_{em} \rangle$ est uniforme ; par intégration sur tout l'espace à une énergie électromagnétique moyenne $\langle U_{em} \rangle$ infinie mettant en évidence le caractère non physique des OemPPH et plus généralement des OemPP.

En outre, nous constatons que les contributions des deux ondes polarisées rectilignement orthogonales consituant l'onde polarisée elliptiquement sont additives, ce qui n'était pas évident, les grandeurs énergétiques n'étant pas linéaires mais bilinéaires ou quadratiques. Ceci nous autorise néanmoins à utiliser une onde polarisée rectilignement comme maillon élémentaire de la théorie, y compris dans ses aspects énergétiques.

Enfin, nous constatons le rapport

$$\frac{\|\langle \mathbf{\Pi} \rangle\|}{\langle u_{em} \rangle} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 c} = c$$

est homogène à une vitesse et indépendant de l'onde.

La relation $\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \langle u_{em} \rangle \mathbf{u}$ présente une analogie formelle avec l'expression de débit de charges $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ qui conduit intuitivement à traiter l'énergie électromagnétique comme un flux de particules de vitesse $c\mathbf{u} = \langle \mathbf{\Pi} \rangle / \langle u_{em} \rangle$ qu'on appelle vitesse de propagation de l'énergie que nous noterons $\mathbf{u}_e$.

On vérifie aisément cette intuition en calculant de deux manières l'énergie électromagnétique moyenne $\langle \mathrm{d}U_{em} \rangle$ qui traverse un élément de surface $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}S\mathbf{u}$ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$. Cette énergie est reliée à la puissance moyenne traversant $\mathrm{d}\mathbf{S}$:

$$\langle \mathrm{d}U_{em} \rangle = \langle \mathbf{\Pi} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle \mathrm{d}t = \langle \mathbf{\Pi} \rangle \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t = \|\langle \mathbf{\Pi} \rangle\| \mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

D'autre part, l'énergie moyenne se déplace de $\mathbf{v}_e \mathrm{d}t$ pendant $\mathrm{d}t$. L'énergie moyenne qui franchit $\mathrm{d}\mathbf{S}$ pendant $\mathrm{d}t$ est donc localisée à l'instant t dans un cylindre de base $\mathrm{d}\mathbf{S}$ et de hauteur $\mathbf{v}_e \mathrm{d}t$. D'où :

$$\langle \mathrm{d}U_{em} \rangle = \langle u_{em} \rangle \mathrm{d}\tau = \langle u_{em} \rangle \mathbf{v}_e \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t = \langle u_{em} \rangle v_e \mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

La comparaison des deux expressions de $\langle \mathrm{d}U_{em} \rangle$ conduit immédiatement à l'expression de la vitesse de propagation de l'énergie :

$$\mathbf{v}_e = \frac{\langle \mathbf{\Pi} \rangle}{\langle u_{em} \rangle}$$

Dans le cas particulier des OemPPH dans le vide, nous avons obtenu $v_e = c$, mais ce résultat n'est pas général.