

Chapitre 4

Ondes électromagnétiques dans les milieux

Dans les milieux tels que le vide, les métaux ou les plasmas, les densités de charges et de courants sont dues à des charges susceptibles de se déplacer à l'échelle du micron-cube, échelle mésoscopique sur laquelle on convient de niveler les champs et les densités de charges et de courants. De telles charges et courants sont qualifiés de charges et de courants **libres**.

Dans la plupart des milieux réels, les charges liées, c'est-à-dire dont les déplacements éventuels sont au maximum de l'ordre des dimensions atomiques, soit 0,1 nm contribuent aux densités de charges et de courants, grandeurs nivelés à l'échelle mésoscopique. Les expressions des densités correspondantes conduisent à reformuler les équations de Maxwell en introduisant de nouveaux champs $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$. Les équations de Maxwell sont alors solubles, à la condition de connaître les relations phénoménologiques reliant $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$ à $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$.

Dans ce cours nous n'allons étudier que le champ $\mathbf{D}$ et dans le cas particulier des milieux diélectriques linéaires isotropes. La généralisation aux milieux anisotropes et magnétiques se fera au deuxième semestre.

4.1 Equations de Maxwell dans les milieux diélectriques

4.1.1 Vecteur polarisation

Dans la plupart des milieux (l'air et l'eau par exemple) soumis à un champ électrique, les charges liées se déplacent à l'échelle atomique et il

2CHAPITRE 4. ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES MILIEUX

apparaît des dipôles électriques : on dit alors que le milieu se polarise. Un milieu susceptible de se polariser est appelé diélectrique. Dans un milieu diélectrique, on appelle vecteur-polarisation et on note $\mathbf{P}$, le moment dipolaire moyen par unité de volume :

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{1}{d\tau} \sum_k \mathbf{p}_k = \frac{dN}{d\tau} \langle \mathbf{p}_k \rangle$$

où $dN/d\tau$ désigne le nombre volumique de dipôle. La somme $\sum$ et la valeur moyenne statistique $\langle \rangle$ portent sur le nombre de dipôles contenus dans l'élément de volume $d\tau$, dont les moments dipolaires $\mathbf{p}_k$ sont indicés par l'indice k . La dimension du volume $d\tau$ est mésoscopique, c'est-à-dire de l'ordre de $(0.1 \mu\text{m})^3$, de telle sorte que le vecteur polarisation est une grandeur nivelée.

Pour ce cours, nous acceptons que la densité volumique de charges liées s'exprime en fonction du vecteur-polarisation par la relation :

$$\rho_{\text{liées}} = -\text{div } \mathbf{P}$$

Nous acceptons également qu'une variation du vecteur polarisation $\mathbf{P}$ est associée à des courants liés volumiques de densité :

$$\mathbf{j}_{\text{liées}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

4.1.2 Equations de Maxwell

En tenant compte des contributions ρ_{libres} et $\mathbf{j}_{\text{libres}}$ des charges libres et en admettant que les diverses contributions des charges liées sont additives, nous obtenons les expressions des densités totales de charges et de courants dans un milieu matériel :

$$\rho = \rho_{\text{libres}} + \rho_{\text{liées}} = \rho_{\text{libres}} - \text{div } \mathbf{P}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{libres}} + \mathbf{j}_{\text{liées}} = \mathbf{j}_{\text{libres}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

En substituant dans les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère, nous obtenons :

$$\text{div } (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho = \rho_{\text{libres}} - \text{div } \mathbf{P}$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{libres}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

On peut réarranger ces équations pour faire apparaître artificiellement les charges libres comme seules sources :

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{libres}} ; \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{libres}} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})$$

De façon naturelle, on définit alors le vecteur déplacement électrique $\mathbf{D}$ qui prend en compte les charges et les courants liées par :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

Les équations de Maxwell prennent ainsi la forme la plus couramment utilisée dans les milieux :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{libres}} ; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} ; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 ; \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j}_{\text{libres}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

4.2 Modèle de l'électron élastiquement lié

La plupart des gaz constitués de molécules non polaires sont des diélectriques linéaires, homogènes isotropes peu denses (DLHI en abrégé). Pour interpréter cette observation, nous adoptons le modèle suivant, appelé modèle de l'électron élastiquement lié :

1. les différents électrons liés d'une même molécule sont traités indépendamment
2. chaque électron est traité comme un oscillateur harmonique amorti : l'électron est soumis à une force de rappel de la forme $-m\omega_0^2 \mathbf{r}$, qui rend compte de manière phénoménologique de l'effet du déplacement de l'électron dans le champ électrique qu'exercent sur lui le noyaux de la molécule et les autres électrons ; il est soumis en outre à une force de frottements fluides $-m\Gamma \dot{\mathbf{r}}$ qui rend compte de manière phénoménologique de diverses causes d'amortissement telles que les collisions entre électrons et le rayonnement dipolaire ; en pratique on a $\Gamma \ll \omega_0$;
3. l'électron est placé dans un champ électrique $\mathbf{E}$. L'analyse de Fourier permet de se ramener au cas d'un champ variant sinusoïdalement avec le temps ; d'autre part on néglige le déplacement de l'électron par rapport à la distance caractéristique des variations spatiales de $\mathbf{E}$, c'est-à-dire la longueur d'onde ; cette hypothèse est réaliste car par définition un électron lié se déplace à l'échelle de l'angström, distance très inférieure aux longueurs d'onde usuelles en électromagnétisme. En définitive, on peut considérer le champ électrique comme uniforme à l'échelle du déplacement de l'électron et écrire $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$.

4CHAPITRE 4. ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES MILIEUX

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à l'électron s'écrit alors :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\Gamma\dot{\mathbf{r}} - m\omega_0^2\mathbf{r} - e\mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$$

Cette équation différentielle étant linéaire à coefficients constants, nous pouvons passer en notation complexe pour déterminer le régime sinusoïdal forcé de pulsation ω . L'opération de dérivation temporelle est alors équivalente à une multiplication par $i\omega$ et il vient :

$$\underline{\mathbf{r}} = -\frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t)$$

En l'absence de champ électrique, le moment dipolaire de la molécule est supposé nul. En présence du champ $\mathbf{E}$, le moment dipolaire vaut donc en notation complexe :

$$\underline{\mathbf{p}} = -e\underline{\mathbf{r}} = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t)$$

Si on note n la densité volumique d'électrons liés, uniforme dans un gaz, on obtient le vecteur polarisation :

$$\underline{\mathbf{P}} = n\underline{\mathbf{p}} = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t)$$

Puis le vecteur déplacement électrique :

$$\underline{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{P}} = \left(1 + \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \right) \epsilon_0 \underline{\mathbf{E}}$$

Le modèle de l'électron élastiquement lié rend donc compte du caractère linéaire, homogène et isotrope du milieu et fait apparaître une permittivité complexe relative :

$$\underline{\epsilon}_r = 1 + \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}$$

On peut décomposer $\underline{\epsilon}_r$ en partie réelle et partie imaginaire :

$$\epsilon'_r = 1 + \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}$$

$$\epsilon''_r = -\frac{ne^2}{m\epsilon_0} \frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}$$

Dégageons la signification physique de ϵ_r' et ϵ_r'' lors de l'étude des ondes électromagnétiques dans les DHLI : nos expériences montrent que ces grandeurs doivent être associées aux phénomènes de dispersion et d'absorption. Elles sont donc mesurables.

Le graphe des variations de $|\epsilon_r''|$ avec ω est donnée sur la figure 4a : il fait apparaître un phénomène de résonance aigu, de telle sorte que $|\epsilon_r''|$ ne prend de valeurs notables que dans un domaine de pulsations de largeur typique Γ au voisinage de la pulsation propre ω_0 .

Le graphe des variations de ϵ_r' avec ω est donné sur la figure 4b : ϵ_r' décroît de la valeur $\epsilon_r'(0) = 1 + ne^2/m\epsilon_0\omega_0^2$ jusqu'à la valeur $\epsilon_r'(+\infty) = 1$ en passant par deux extréma pour des pulsations proches de la pulsation propre ω_0 . Ainsi, en haute fréquence, les électrons ne peuvent plus suivre les oscillations du champ électrique et le milieu se comporte comme du vide.

Ces graphes rendent compte des graphes expérimentaux sous réserve d'admettre l'existence de plusieurs pulsations propres ω_{0i} , c'est-à-dire plusieurs types d'électrons liés. Alors :

$$\epsilon_r = 1 + \sum_i \frac{n_i e^2}{m \epsilon_0 \omega_{0i}^2 - \omega^2 + i \Gamma_i \omega}$$

En choisissant correctement les densités volumiques n_i , les pulsations ω_{0i} et les coefficients Γ_i , il est alors possible d'interpréter les graphes expérimentaux.

4.3 Ondes électromagnétiques dans les DHLI

4.3.1 Introduction

Dans toute cette section nous nous plaçons dans un milieu non magnétique, diélectrique linéaire, homogène et isotrope, de permittivité complexe relative ϵ_r , ne comportant ni charges libres, ni courants libres : on dit parfois que le DHLI est parfait. Les équations de Maxwell se simplifient alors en :

$$\text{div } \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 ; \text{rot } \mathbf{E} = \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 ; \text{rot } \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Les équations de Maxwell et les relations phénoménologiques caractéristiques d'un DHLI, sont linéaires à coefficients constants : on peut donc les traiter en notation complexe et chercher des solutions de type pseudo-onde plane

6CHAPITRE 4. ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES MILIEUX

progressive harmonique, où toutes les composantes des champs sont proportionnelles à $\exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))$ avec $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$, ω réel et k *a priori* complexe. Dans ces conditions l'opérateur ∇ et l'opérateur dérivée par rapport au temps opèrent comme de simples multiplicateurs :

$$\nabla = -i\mathbf{k} ; \quad \frac{\partial}{\partial t} = i\omega$$

Les équations de Maxwell des milieux prennent la forme simple de relations vectorielles entre les champs :

$$-i\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{D}} = 0 ; \quad -i\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{E}} = -\omega \underline{\mathbf{B}} ; \quad -i\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0 ; \quad -i\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{B}} = i\omega\mu_0 \underline{\mathbf{D}}$$

En utilisant les relations phénoménologiques $\underline{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{\mathbf{E}}$, nous obtenons avec $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$:

$$k\mathbf{u} \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0 ; \quad k\mathbf{u} \wedge \underline{\mathbf{E}} = \omega \underline{\mathbf{B}} ; \quad k\mathbf{u} \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0 ; \quad \frac{k}{\mu_0} \mathbf{u} \wedge \underline{\mathbf{B}} = -\omega \epsilon_0 \epsilon_r \underline{\mathbf{E}}$$

4.3.2 Transversalité des ondes

En prenant la partie réelle des relations $\mathbf{u} \cdot \underline{\mathbf{E}}$ et $\mathbf{u} \cdot \underline{\mathbf{B}}$, il vient :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = 0 ; \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} = 0$$

Les champs sont donc orthogonaux à la direction de propagation $\mathbf{u}$: les OemPPH dans un DHLI sont transversales.

4.3.3 Relation de dispersion et conséquences

Éliminons $\underline{\mathbf{B}}$ entre les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère :

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{k}{\omega} \mathbf{u} \cdot \underline{\mathbf{E}} ; \quad \frac{k}{\mu_0} \mathbf{u} \wedge \underline{\mathbf{B}} = -\omega \epsilon_0 \epsilon_r \underline{\mathbf{E}}$$

D'où :

$$\frac{k}{\mu_0} \mathbf{u} \wedge \left(\frac{k}{\omega} \mathbf{u} \wedge \underline{\mathbf{E}} \right) = -\omega \epsilon_0 \epsilon_r \underline{\mathbf{E}}$$

Puis :

$$\frac{k^2}{\mu_0 \omega} [(\mathbf{u} \cdot \underline{\mathbf{E}}) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \underline{\mathbf{E}}] = -\frac{k^2}{\mu_0 \omega} \underline{\mathbf{E}} = -\omega \epsilon_0 \epsilon_r \underline{\mathbf{E}}$$

En simplifiant par $\underline{\mathbf{E}}$, nous obtenons la relation de dispersion, qui apparaît comme la condition de compatibilité des équations de Maxwell pour les OemPPH :

$$k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega^2$$

Et en faisant intervenir la célérité c des ondes électromagnétiques dans le vide :

$$k^2 = \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2}$$

La permittivité relative étant *a priori* complexe, le nombre d'onde k aussi et on peut poser $k = k' - ik''$. Pour une onde OemPPH polarisée rectilignement, c'est-à-dire telle que $\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - kx)]$ avec $\mathbf{E}_0$ réel, on obtient un champ électrique réel de la forme :

$$\mathbf{E} = \Re \left[\mathbf{E}_0 \exp(i\omega t - ik'x - k''x) \right] = \mathbf{E}_0 \exp(-k''x) \cos(\omega t - k'x)$$

L'onde est une onde amortie (rôle de k'') et progressive, se propageant avec une vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k'$; v_φ dépend de ω car la permittivité relative en dépend, donc le milieu est dispersif.

La mesure de la distance caractéristique de l'amortissement $\delta = 1/|k''|$ et de la vitesse de phase permettent de mesurer k' et k'' en fonction de ω .

On définit l'indice complexe $\underline{n}$, l'indice de dispersion n' et l'indice d'absorption n'' par référence au vecteur d'onde $k_0 = \omega/c$ dans le vide :

$$\underline{n} = \frac{k}{k_0} ; n' = \Re(\underline{n}) = \frac{k'}{k_0} = \frac{c}{v_\varphi} ; n'' = \Im(\underline{n}) = \frac{k''}{k_0}$$

On utilise parfois les notions de longueur d'onde dans le milieu λ et de longueur d'onde dans le vide λ_0 telles que :

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} ; k' = \frac{2\pi}{\lambda} ; \lambda = \frac{\lambda_0}{n'}$$

La phase ψ d'une OemPPH dans un DHLI s'écrit alors :

$$\psi = \omega t - k'x - \phi_0 = \omega t - n'k_0x - \phi_0 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(n'x) - \phi_0$$

On peut mettre cette expression sous la forme :

$$\psi = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta - \phi_0 \quad \text{avec} \quad \delta = n'x$$

Cette expression sera utilisée dans le cours sur les interférences, où la grandeur δ , appelée chemin optique joue un rôle essentiel.

4.3.4 Expression du champ magnétique

L'équation de Maxwell-Faraday permet d'exprimer le champ magnétique en fonction du champ électrique :

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{k}{\omega} \mathbf{u} \wedge \underline{\mathbf{E}}$$

Pour une OemPPH polarisée rectilignement, c'est-à-dire telle que $\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - kx)]$ il vient :

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{(k' - ik'')}{\omega} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{E}_0) \exp(i\omega t - ik'x - k''x)$$

Puis en prenant la partie réelle :

$$\mathbf{B} = \Re(\underline{\mathbf{B}}) = \left[\frac{k'}{\omega} \cos(\omega t - k'x) + \frac{k''}{\omega} \sin(\omega t - k'x) \right] \exp(-k''x) (\mathbf{u} \wedge \mathbf{E}_0)$$

Ce résultat ne justifie aucun effort de mémorisation : le champ magnétique correspond à une onde amortie (rôle de k'') et progressive (rôle de k'), déphasée par rapport au champ électrique, ce qui constitue un élément nouveau par rapport à la situation dans le vide, où les champs électriques et magnétiques vibrent en phase. En revanche, comme dans le vide, le trièdre $(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ est un trièdre orthogonal direct.

4.3.5 Vecteur de Poynting

Dans un DHLI, le vecteur de Poynting a même expression que dans le vide :

$$\Pi = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}$$

Pour l'OemPPH PR envisagée précédemment, calculons la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting, seule accessible à la mesure compte-tenu du temps de réponse des détecteurs, très supérieur à la période des ondes électromagnétiques :

$$\begin{aligned} \langle \Pi \rangle &= \exp(-2k''x) (\mathbf{E}_0 \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{E}_0)) \\ &\times \left\langle \frac{k'}{\mu_0 \omega} \cos^2(\omega t - k'x) + \frac{k''}{\mu_0 \omega} \sin(\omega t - k'x) \cos(\omega t - k'x) \right\rangle \end{aligned}$$

Soit en développant le double produit vectoriel et en utilisant $\langle \cos^2 \rangle = 1/2$ et $\langle \sin \cos \rangle = 0$:

$$\langle \Pi \rangle = \frac{k' E_0^2}{2\mu_0 \omega} \exp(-2k'' x) \mathbf{u}$$

Le vecteur de Poyting est parallèle à la direction de propagation $\mathbf{u}$. Il décroît exponentiellement, et la mesure de la distance caractéristique de cet amortissement donne accès à k'' . Dans le modèle de l'électron élastiquement lié, k'' est proportionnel au nombre volumique n d'électrons, c'est-à-dire à la concentration C en espèces absorbantes dans le cas d'une solution. Ces faits rendent compte de la loi expérimentale de Beer-Lambert qui décrit l'évolution spatiale de l'intensité lumineuse dans une solution absorbante, grandeur que l'on peut identifier à $\|\langle \Pi \rangle\|$: l'absorbance de la solution définie par $A = \ln(\|\langle \Pi_{x=0} \rangle\| / \|\langle \Pi_{x=L} \rangle\|)$ vaut $A = -k'' L$; elle est donc proportionnelle à C et à L .