

Chapitre 5

Interférences lumineuses

5.1 Intensité lumineuse

L'optique s'appuie de façon essentielle sur l'expérience : compte-tenu des fréquences élevées ($f \approx 10^{15}$ Hz), un détecteur d'ondes lumineuses ne peut être sensible qu'à une moyenne temporelle. Un détecteur linéaire, qui serait sensible à $\langle \mathbf{E}(M, t) \rangle$ serait totalement inefficace car cette valeur moyenne est nulle.

On utilise donc en optique des détecteurs quadratiques, qui sont sensibles à l'énergie moyenne reçue par unité d'aire, c'est à dire à la moyenne du vecteur de Poynting. On appellera donc l'intensité lumineuse au point M , ou l'éclairement au point M , la grandeur :

$$I(M) = K \langle \mathbf{E}^2(M, t) \rangle$$

où K est une constante de proportionnalité. Dans la mesure où on ne s'occupera que d'éclairements relatifs, la valeur de la constante de proportionnalité n'est pas essentielle et l'on posera :

$$I(M) = 2 \langle \mathbf{E}^2(M, t) \rangle$$

5.1.1 Intensité lumineuse des ondes planes progressives harmoniques

On rappelle que l'OemPPH PR est la maille élémentaire de la lumière. Ainsi l'intensité associée à une telle onde vaut :

$$I(M) = 2 \langle E_0^2 \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi) \rangle$$

$$I(M) = \frac{2E_0^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi) dt$$

$$I(M) = \frac{2E_0^2}{T} \frac{T}{2} = E_0^2$$

5.1.2 Notation complexe

Il est aisé de démontrer que pour une OemPPH PR , l'intensité peut s'écrire en fonction de l'amplitude complexe de l'onde :

$$I(M) = |\underline{\mathbf{E}}(M)|^2 = \underline{\mathbf{E}}(M) \cdot \underline{\mathbf{E}}^*(M)$$

Par sommation, cette égalité reste vraie pour toutes les ondes électromagnétiques planes.

5.2 Généralités sur les interférences lumineuses

5.2.1 Superposition de deux ondes lumineuses

On considère deux sources ponctuelles S_1 et S_2 qui émettent chacune une onde OemPPH PR $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ de vecteurs d'onde $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$, de fréquence cyclique ω_1 et ω_2 et de phase à l'origine ϕ_1 et ϕ_2 :

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{01} \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \phi_1) ; \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{02} \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \phi_2)$$

Au point M les deux ondes se superposent. D'après la linéarité des équations de Maxwell, le champ électrique $\mathbf{E}$ en M est la somme des deux champs $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$. Donc l'intensité lumineuse en M vaut :

$$I(M) = 2 \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \rangle$$

donc :

$$I(M) = 2 \langle \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle$$

En notant $I_1(M) = 2 \langle \mathbf{E}_1^2 \rangle$ l'intensité lumineuse en M due à la source S_1 seule, $I_2(M) = 2 \langle \mathbf{E}_2^2 \rangle$ l'intensité lumineuse en M due à la source S_2 seule, nous obtenons :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + I_{12}(M)$$

avec $I_{12}(M) = 4 \langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle$

Le terme mixte I_{12} mesure les corrélations, ou la cohérence entre les deux ondes $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$. Lorsque le terme mixte n'est pas identiquement nul, les deux ondes sont cohérentes : l'éclairement résultant de la superposition des deux ondes n'est pas la somme des éclairements et on dit alors que les deux ondes sont cohérentes et qu'elles donnent lieu à un phénomène d'interférences. Dans le cas contraire, les deux ondes sont incohérentes, et l'éclairement résultant est la somme des éclairements individuels.

Afin de dégager un critère de cohérence poursuivons le calcul du terme mixte I_{12} :

$$I_{12} = 4\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \langle \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \phi_1) \times \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \phi_2) \rangle$$

La première condition pour que deux ondes (ou deux sources) soient cohérentes est que le produit scalaire $\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02}$ ne soit pas nul, c'est-à-dire que les deux ondes ne soient pas polarisées orthogonalement l'une à l'autre.

Poursuivons le calcul pour deux ondes qui vérifient ce premier critère :

$$\begin{aligned} I_{12} &= 2\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \langle \cos[(\omega_1 t - \omega_2 t) - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\phi_1 - \phi_2)] \rangle \\ &+ 2\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \langle \cos[(\omega_1 t + \omega_2 t) - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\phi_1 + \phi_2)] \rangle \end{aligned}$$

La valeur moyenne $\langle \cos(\Omega t - \Phi) \rangle$ est nulle sauf pour $\Omega = 0$. Le deuxième terme est donc toujours nul et le premier terme est non nul que si les pulsations des deux ondes sont égales. Ainsi, deux ondes cohérentes ont nécessairement la même pulsation, ou la même fréquence, ou la même longueur d'onde.

Supposons ce deuxième critère de cohérence satisfait, et poursuivons le calcul :

$$I_{12} = 2\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \langle \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\phi_1 - \phi_2)] \rangle$$

Le terme $(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}$ est une constante. Dans la théorie de l'OemPPH le terme $(\phi_1 - \phi_2)$ est aussi une constante, et on devrait obtenir un terme d'interférence non nul pour toutes superpositions de sources monochromatiques.

Or dans la pratique, l'expérience montre que l'éclairement engendré par deux sources ponctuelles monochromatiques distinctes est uniforme, c'est-à-dire que l'on n'observe pas de franges d'interférences : deux ondes émises par des sources ponctuelles distinctes sont incohérentes. Pour interpréter qualitativement ce fait il faut affiner le modèle des sources ponctuelles monochromatiques. Une fonction sinusoïdale du temps n'a évidemment aucune existence réelle, du fait de son extension temporelle infinie : une onde réelle a nécessairement un début et une fin. Les sources lumineuses apparemment monochromatiques n'émettent pas continûment, mais par trains d'ondes : à

l'intérieur de chaque train d'ondes, l'onde est correctement représentée par une onde monochromatique, mais la phase à l'origine ϕ varie aléatoirement d'un train d'ondes à un autre. La durée moyenne d'un train d'ondes, ou la durée moyenne entre deux trains d'ondes, vaut typiquement $\tau = 10^{-11}$ seconde pour une lampe spectrale classique ; τ est donc grand devant la période des ondes lumineuses, mais petit par rapport au temps de réponse des détecteurs, durée elle-même faible devant le temps d'intégration qui définit l'éclairement $\langle \mathbf{E}^2(M) \rangle$. Ainsi le terme $I_{12} = 2\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \langle \cos [(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\phi_1 - \phi_2)] \rangle$ est nul pour deux sources ponctuelles distinctes. Nous venons d'interpréter l'incohérence de deux sources ponctuelles distinctes.

Pour obtenir des interférences il faut donc que :

- les deux ondes ne soient pas de polarisation perpendiculaire
- les deux ondes aient même fréquence (longueur d'onde)
- les deux ondes soient issues d'une même source ponctuelle.

Dans ce cas l'intensité lumineuse en M vaut :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2 \cos \theta \sqrt{I_1 I_2} \cos \phi_M$$

où $\phi_M = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\phi_1 - \phi_2)$ et θ est l'angle entre les deux vecteurs champs électriques.

5.2.2 Utilisation de la notation complexe

On peut trouver le même résultat en utilisant la notation complexe. L'onde complexe en M vaut

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= \underline{\mathbf{E}}_1 + \underline{\mathbf{E}}_2 = \underline{\mathbf{E}}_{01} \exp(i\omega t - i\phi_{1M}) + \underline{\mathbf{E}}_{02} \exp(i\omega t - i\phi_{2M}) \\ &= \exp(i\omega t) [\underline{\mathbf{E}}_{01} \exp(-i\phi_{1M}) + \underline{\mathbf{E}}_{02} \exp(-i\phi_{2M})] \end{aligned}$$

L'intensité en M vaut alors :

$$\begin{aligned} I(M) &= |\underline{\mathbf{E}}|^2 = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{E}}^* \\ &= \exp(i\omega t) \exp(-i\omega t) [\underline{\mathbf{E}}_{01} \exp(-i\phi_{1M}) + \underline{\mathbf{E}}_{02} \exp(-i\phi_{2M})] \\ &\quad \cdot [\underline{\mathbf{E}}_{01}^* \exp(i\phi_{1M}) + \underline{\mathbf{E}}_{02}^* \exp(i\phi_{2M})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(M) &= \underline{\mathbf{E}}_{01} \cdot \underline{\mathbf{E}}_{01}^* + \underline{\mathbf{E}}_{02} \cdot \underline{\mathbf{E}}_{02}^* \\ &\quad + \underline{\mathbf{E}}_{01} \cdot \underline{\mathbf{E}}_{02}^* \exp(i(\phi_{2M} - \phi_{1M})) + \underline{\mathbf{E}}_{01}^* \cdot \underline{\mathbf{E}}_{02} \exp(i(\phi_{2M} - \phi_{1M})) \end{aligned}$$

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \theta \cos(\phi_{2M} - \phi_{1M})$$

Nous retrouvons donc une formule identique à celle obtenue précédemment.

5.3 Calcul de la différence de marche

Afin de comprendre la répartition de l'intensité lumineuse sur une figure d'interférences il faut maintenant pouvoir calculer la quantité $\phi_M = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\phi_1 - \phi_2)$. Sauf pour des exercices de style, le différence de phase à l'origine est toujours nulle car deux ondes cohérentes sont issues de la même source ponctuelle monochromatique. On se bornera donc à calculer la différence $\phi_M = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}$.

5.3.1 Cas d'un milieu homogène

Un milieu est homogène si l'indice lumineux n a même valeur en tout point. Dans ce milieu la lumière se propage en ligne droite et à une vitesse constante, c'est à dire que le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est constant lors du parcours. Ainsi la quantité $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}$ s'interprète comme le produit du nombre d'onde k_1 et de la distance géométrique parcourue par le rayon lumineux :

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = k_1 \times S M$$

Prenons comme exemple, deux sources cohérentes (donc obtenu à partir de la même source) S_1 et S_2 , situés aux points de coordonnées $(+a, 0, 0)$ et $(-a, 0, 0)$. On observe les franges d'interférence sur un écran situé dans le plan $z = D$ avec $D \gg a$. En un point $M(x, y, D)$ de l'écran, on a un déphasage entre les deux ondes de :

$$\begin{aligned} \phi_M &= (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} = k \times (S_1 M - S_2 M) \\ &= k \times \left(\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + D^2} \right) \end{aligned}$$

En linéarisant à l'ordre 1

$$\phi_M = kD \times \left(\frac{(x-a)^2}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2} + 1 - \frac{(x+a)^2}{2D^2} - \frac{y^2}{2D^2} - 1 \right)$$

. Puis en développant le carré :

$$\phi_M = \frac{k}{2D} \times \left((x^2 - 2ax + a^2) - (x^2 + 2ax + a^2) \right) = 2\pi \frac{2ax}{\lambda D} = 2\pi \frac{\delta_M}{\lambda}$$

avec $\delta_M = 2ax/D$.

Pour caractériser expérimentalement les interférences lumineuses, on définit les franges brillantes comme les surfaces où l'intensité lumineuse est maximum. Alors $\cos \phi_M = +1$, c'est-à-dire $\phi_M = 2n\pi$, ou encore $\delta_M = n\lambda$ avec n entier. On appelle n l'ordre d'interférences.

- Les franges brillantes sont obtenues lorsque les deux ondes sont en phase, ou que la différence de marche est un multiple de la longueur d'onde, ou que l'ordre d'interférence est entier.

De même, on appelle franges sombres les surfaces où l'éclairement est minimum. Alors $\cos \phi_M = -1$, c'est-à-dire $\phi_M = (2n + 1) \pi$, ou encore $\delta_M = n\lambda + \lambda/2$ avec n entier. L'ordre d'interférence est alors demi-entier.

- Les franges sombres sont obtenues lorsque les deux ondes sont en opposition de phase, ou que la différence de marche est un multiple impair de la demi-longueur d'onde, ou que l'ordre d'interférence est demi-entier.

Enfin on caractérise la visibilité des franges par le facteur de contraste C . Si I_{max} et I_{min} désignent respectivement l'intensité des franges brillantes et des franges sombres, C est défini par :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Avec la formule des interférences, nous obtenons :

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2 \cos \theta \sqrt{I_1 I_2} ; I_{min} = I_1 + I_2 - 2 \cos \theta \sqrt{I_1 I_2}$$

Puis :

$$C = \frac{2 \cos \theta \sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

Le contraste d'une figure d'interférence est donc maximale si les éclairagements des sources qui interfèrent sont voisins et si les deux ondes ont même polarisation rectiligne.

5.3.2 Cas d'un milieu hétérogène

Dans ce cas le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ de l'onde n'est pas constant au cours du trajet et on ne peut directement utiliser l'expression de l'onde plane. Il faut alors utiliser la propriétés fondamentales des ondes qui dit que l'amplitude de l'onde en M à l'instant t est égale à l'amplitude de l'onde à la source à l'instant $t - \tau_M$ où τ_M est le temps mis par la lumière pour se propager de S à M . En notant s l'abscisse curviligne le long du rayon lumineux allant de S à M , nous pouvons exprimer le retard τ_M :

$$\tau_M = \int_{t=0}^{t=\tau_M} dt = \int_S^M \frac{dt}{ds} ds = \int_S^M \frac{1}{c(s)} ds = \frac{1}{c} \int_S^M n(s) ds$$

Cette expression conduit à définir le chemin optique entre S et M :

$$(SM) = \int_S^M n(s) \, ds = c\tau_M$$

Le chemin optique est donc en une mesure en unité de longueur du temps mis par la lumière pour se propager de S à M . En faisant apparaître le chemin optique, l'expression de l'onde lumineuse devient :

$$a(M, t) = A(M) \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{c} (SM) \right)$$

puis en introduisant la longueur d'onde dans le vide λ :

$$a(M, t) = A(M) \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{(SM)}{\lambda} \right)$$

Dans le cas d'un milieu homogène on retrouve ainsi l'expression donnée dans la section précédente.

5.3.3 Systèmes optiques

De très nombreux systèmes interférentiels font intervenir des éléments optiques comme des lentilles, des miroirs. Il peut devenir fastidieux de calculer le chemin optique parcouru par un rayon lumineux, sans compter que le trajet optique depuis la source lumineuse à la figure d'interférence n'est pas forcément unique.

On pourra alors dans ces problèmes utiliser le théorème de Malus, qui affirme que le chemin optique depuis un objet lumineux (A) à son image (A') à travers un système optique (Σ) est indépendant du rayon lumineux.