

Chapitre 7

Diffraction des ondes lumineuses

L'optique géométrique n'est pas une théorie exacte mais une approximation valable lorsque les dimensions caractéristiques de notre environnement sont très supérieures à la longueur d'onde. Lorsqu'en revanche un rayon lumineux rencontre un obstacle de petite dimension, la loi de propagation rectiligne est violée : l'énergie de l'onde se répartit dans tout l'espace ; on dit qu'il y a diffraction de l'onde par l'obstacle.

7.1 Diffraction par une ouverture plane dans les conditions de Fraunhofer

7.1.1 Principe de Huygens-Fresnel

Soit (Σ) une ouverture plane éclairée par une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde λ . Soit un découpage de (Σ) en éléments de surface $d\sigma(P)$ centrés sur un point courant P . Alors, pour le calcul de l'éclairement en un point M :

1. chaque élément de surface se comporte comme une source ponctuelle fictive, émettant une ondelette dont l'amplitude complexe instantanée en P est proportionnelle à l'amplitude complexe instantanée $a_S(P, t)$ émise par S en P , et à l'élément de surface $d\sigma(P)$;
2. les sources fictives sont cohérentes.

Les deux points ci-dessus constituent le principe de Huygens-Fresnel.

Dans le cas où S et M sont à distance finie de (Σ) , les ondes correspondantes sont sphériques. Si l'ensemble du dispositif est plongé dans l'air

d'indice $n = 1$, l'amplitude complexe instantanée reçue en P s'écrit avec $k_0 = 2\pi/\lambda_0$:

$$\underline{a}_S(P, t) = \frac{A_0}{SP} \exp(i\omega t) \exp(-ik_0 SP)$$

L'amplitude complexe émise en M par la source élémentaire centrée en P s'écrit donc :

$$\begin{aligned} d\underline{a}_P(M, t) &= K \frac{\exp(-ik_0 PM)}{PM} d\sigma(P) \\ &= K \frac{A_0}{SP} \exp(i\omega t) \exp(-ik_0 SP) \frac{\exp(-ik_0 PM)}{PM} d\sigma(P) \end{aligned}$$

Les sources fictives étant cohérentes, leurs amplitudes complexes instantanées sont additives et l'amplitude complexe instantanée reçue en M s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{a}(M, t) &= \iint_{(\Sigma)} d\underline{a}_P(M, t) \\ &= \iint_{(\Sigma)} \frac{A_0}{SP} \exp(i\omega t) \exp(-ik_0 SP) \frac{\exp(-ik_0 PM)}{PM} d\sigma(P) \end{aligned}$$

7.1.2 Diffraction de Fraunhofer

On appelle diffraction dans les conditions de Fraunhofer le cas particulier où S et M sont à l'infini. Dans ces conditions, S émet une onde plane d'amplitude A_0 et de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{u} = (2\pi/\lambda_0) \mathbf{u}$. Le chemin optique entre la source S et le point P vaut alors :

$$k_0 SP = \mathbf{k} \cdot \mathbf{SP} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{SO} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{OP} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{OP} + k_0 SO$$

Le principe de Huygens-Fresnel s'écrit en introduisant une nouvelle constante multiplicative K :

$$\underline{a}(M) = K \iint_{(\Sigma)} \frac{A_0}{PM} \exp(-i(k_0 SO + \mathbf{k} \cdot \mathbf{OP})) \exp(-ik_0 PM) d\sigma(P)$$

D'autre part, les ondes sphériques émises par les points P , susceptibles d'interférer en un point M donné à l'infini, peuvent être assimilées à des ondes quasi-planes se propageant dans une même direction $\mathbf{u}'$ avec un vecteur d'onde $\mathbf{k}' = k_0 \mathbf{u}'$; le terme $1/PM$ dans l'amplitude peut être traitée comme une constante et intégré dans une nouvelle constante K . Le chemin optique entre le point source P et le point M vaut alors :

$$k_0 PM = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{PM} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{PO} + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{OM} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{PO} + k_0 OM$$

7.1. DIFFRACTION PAR UNE OUVERTURE PLANE DANS LES CONDITIONS DE FRAUNHOFER

D'où l'expression du principe de Huygens-Fresnel :

$$\underline{a}(M) = K \iint_{\Sigma} A_0 \exp[-i(k_0 SO + \mathbf{k} \cdot \mathbf{OP})] \exp(-ik_0 OM) \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{OP}) d\sigma(P)$$

Soit en sortant tous les termes indépendants de P de l'intégrale :

$$\underline{a}(M) = K A_0 \exp[-ik_0(SO + OM)] \iint_{(\Sigma)} \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{OP}] d\sigma(P)$$

En notant (SOM) le chemin optique mesuré le long du rayon lumineux passant par O , nous obtenons la forme opérationnelle du principe de Huygens-Fresnel :

$$\underline{a}(M) = K A_0 \exp[-ik_0(SOM)] \iint_{(\Sigma)} \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{OP}] d\sigma(P)$$

La source S à l'infini peut être obtenue à l'aide d'un laser et l'observation à l'infini peut être approchée par l'observation sur un écran éloigné.

On peut aussi réaliser un collimateur en plaçant une source ponctuelle S dans le plan focal objet d'une lentille convergente (L_1), et en plaçant l'écran d'observation dans le plan focal image d'une lentille convergente (L_2). Les directions $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ s'obtiennent dans ce cas en utilisant les rayons non déviés, passant par les centres de lentilles. Alors :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{SO}_1}{SO_1} \approx \frac{\mathbf{SO}_1}{f'_1} \quad ; \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{O}_2\mathbf{M}}{O_2M} \approx \frac{\mathbf{O}_2\mathbf{M}}{f'_2}$$

En notant (x_S, y_S, z_S) les coordonnées de S et (x, y, z) celle du point M , il vient :

$$\mathbf{u} \approx \begin{pmatrix} -\frac{x_S}{f'_1} \\ -\frac{y_S}{f'_1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{u}' \approx \begin{pmatrix} \frac{x}{f'_2} \\ \frac{y}{f'_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.1.3 Diffraction par une ouverture rectangulaire

Le calcul algébrique de l'amplitude diffractée, c'est-à-dire de l'intégrale ne peut être menée à bien que pour quelques formes d'ouvertures simples. Dans la suite, nous considérons une ouverture rectangulaire de côtés a selon $\mathbf{u}_x$ et b selon $\mathbf{u}_y$ et nous notons (α, β, γ) les composantes de $\mathbf{u}$ et $(\alpha', \beta', \gamma')$

celles de $\mathbf{u}'$. Nous choisissons l'origine O au centre de l'ouverture rectangulaire pour respecter les symétries du problèmes. Alors :

$$(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{OP} = k_0 (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{OP} = k_0 [(\alpha' - \alpha) X + (\beta' - \beta) Y]$$

L'intégrale se factorise :

$$\underline{a}(M) = K A_0 \exp[-ik_0(SOM)] \int_{-a/2}^{+a/2} \exp[ik_0(\alpha' - \alpha) X] dX \int_{-b/2}^{+b/2} \exp[ik_0(\beta' - \beta) Y] dY$$

Puis :

$$\underline{a}(M) = K A_0 \exp[-ik_0(SOM)] \left[\frac{\exp[ik_0(\alpha' - \alpha) X]}{ik_0(\alpha' - \alpha)} \right]_{-a/2}^{+a/2} \left[\frac{\exp[ik_0(\beta' - \beta) Y]}{ik_0(\beta' - \beta)} \right]_{-b/2}^{+b/2}$$

$$\underline{a}(M) = K A_0 \exp[-ik_0(SOM)] \left[\frac{2i \sin\left(\frac{(\alpha' - \alpha)k_0 a}{2}\right)}{ik_0(\alpha' - \alpha)} \right] \left[\frac{2i \sin\left(\frac{(\beta' - \beta)k_0 b}{2}\right)}{ik_0(\beta' - \beta)} \right]$$

En faisant apparaître la fonction sinus-cardinal, notée sinc telle que $\text{sinc } u = \sin u/u$ et en remplaçant k_0 par $2\pi/\lambda_0$, il vient :

$$\underline{a}(M) = K A_0 \exp[-ik_0(SOM)] \text{sinc}\left(\frac{\pi(\alpha' - \alpha)a}{\lambda_0}\right) \text{sinc}\left(\frac{\pi(\beta' - \beta)b}{\lambda_0}\right)$$

Ainsi le retard de phase de l'onde diffractée en M vaut $\phi = k_0(SOM)$; il en résulte que :

- l'onde diffractée en M par l'ouverture rectangulaire est en phase avec l'ondelette émise par son centre O

7.1. DIFFRACTION PAR UNE OUVERTURE PLANE DANS LES CONDITIONS DE FRAUNHOFER

Nous obtenons enfin l'éclairement en M en prenant le carré du module :

$$I(M) = K^2 A_0^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi (\alpha' - \alpha) a}{\lambda_0} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi (\beta' - \beta) b}{\lambda_0} \right)$$

Le graphe de la fonction $f(u) = \operatorname{sinc} u$ est représenté figure ci-dessous. Nous constatons que :

1. f présente un maximum absolu, appelé maximum principal, égal à 1 en $u = 0$;
2. f s'annule pour $u = n\pi$ avec n entier non nul ;
3. entre deux zéros successifs, f présente un maximum secondaire ; on commet une erreur négligeable en situant le maxima au milieu de deux zéros successifs ; avec $f(3\pi/2) = 0,04$ et $f(5\pi/2) = 0,016$, on peut affirmer que ces maxima secondaires sont négligeables devant le maximum principal.

On obtient alors par homothétie et translation, les graphes de $I(\alpha', \beta')$ à α' et β' fixé représentées sur la figure et les graphes $I(x, y)$ à x ou y fixé représenté sur la figure

Il en résulte les faits suivants :

1. L'intensité lumineuse $I(\alpha', \beta')$ est maximum pour $\alpha' = \alpha$ et $\beta' = \beta$, c'est-à-dire pour $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$, c'est-à-dire pour le rayon lumineux non dévié, c'est-à-dire respectant les lois de l'optique géométrique : M est alors l'image S' de S à travers le système optique constitué des deux lentilles du montage de Fraunhofer. Ce résultat s'interprète comme un phénomène d'interférences constructives : sur S' , la condition de stigmatisme $(SPS') = \text{constante}$ assure en effet que toutes les ondes émises par les sources secondaires fictives sont en phase. On peut généraliser ce résultat à toutes les formes d'ouvertures :
 - Dans un phénomène de diffraction de Fraunhofer, l'éclairement est maximal sur l'image géométrique de la source.
2. L'essentiel de l'énergie lumineuse est concentrée dans la frange centrale de diffraction, centrée sur l'image géométrique S' de la source S et de demi-largeur λ_0/a et λ_0/b . Ainsi on retrouve dans la figure de diffraction les dimensions caractéristiques de la forme de l'ouverture diffractante. Les côtés a et b de l'ouverture rectangulaire interviennent dans les dimensions de la figure de diffraction par leurs inverses $1/a$ et $1/b$ de telle sorte que pour $b = 2a$, les franges sont plus longues sur $\mathbf{u}_x$ que sur $\mathbf{u}_y$. Nous admettrons la généralisation de ce résultat :

- Dans une figure de diffraction de Fraunhofer, les dimensions caractéristiques δ de l'ouverture diffractante interviennent par leur inverse $1/\delta$.
- 3. Les franges annexes de diffraction sont deux fois moins larges que la frange centrale et beaucoup moins lumineuses.

Trois cas limites présentent un intérêt particulier :

1. Si $\lambda_0 \ll a$ et $\lambda_0 \ll b$, la frange centrale tend à se confondre avec l'image géométrique S' : nous retrouvons ici l'approximation de l'optique géométrique et son critère validité $\lambda \rightarrow 0$.
2. Pour une ouverture de très petite dimension, les largeurs de la frange centrale sont grandes et on peut faire l'approximation de la diffraction isotrope : dans toutes les directions d'observation usuelles, l'intensité est indépendante de la direction, quasiment confondue avec sa valeur maximale.
3. Pour une fente fine et longue, parallèle à $\mathbf{u}_y$, c'est-à-dire telle que $b \gg a$, la largeur selon $\mathbf{u}_y$ de la frange centrale est très faible : l'éclairement ne prend de valeurs notables que si $\beta' \approx \beta$ c'est-à-dire sur l'axe $S'x$; la figure de diffraction est alors constituée de segments situés sur l'axe $S'x$: une fente ne diffracte notablement que dans une direction perpendiculaire. Dans ce cas l'intégrale en Y vaut 0 hors de l'axe $S'x$, et 1 sur cet axe. En un point de la figure de diffraction, le principe de Huygens-Fresnel prend la forme simplifiée :

$$\underline{a}(M) = K A_0 \exp(-ik_0(SOM)) \int \exp[ik_0(\alpha' - \alpha)X] dX$$

7.2 Généralisations

Le calcul de l'amplitude diffractée par une ouverture circulaire de rayon R se mène en coordonnées polaires et débordé du cadre de ce cours. Les résultats essentiels sont les suivants :

1. on observe des franges constitués d'anneaux centrés sur l'image géométrique S' de la source S ;
2. l'essentiel de l'énergie lumineuse est concentrée dans la frange centrale de rayon angulaire $\theta = 0,61\lambda_0/R$, c'est-à-dire dans un cône de demi-angle au sommet θ et d'axe le rayon lumineux incident. Notons de nouveau l'intervention de l'inverse $1/R$ du rayon de l'ouverture dans les dimensions caractéristiques de la figure de diffraction.

Nous constatons donc qu'en ordre de grandeur, les résultats sont analogues à ceux obtenus pour une ouverture carrée de côté a ; en particulier, la limite de l'optique géométrique est obtenue pour $\lambda_0 \rightarrow 0$ et la limite de l'éclairement isotrope pour $R \rightarrow 0$. Le seul élément nouveau est la forme géométrique des franges, qui respecte l'invariance du problème par rotation autour du rayon lumineux incident.

La diffraction de Fraunhofer par une ouverture circulaire est observée notamment dans le plan de l'image géométrique S' de la source S à travers le système optique centré constitué des lentilles (L_1) et (L_2) . L'éclairement calculé par le principe de Huygens-Fresnel ne dépend pas de la position relative des lentilles et de l'ouverture circulaire : on observe la même figure de diffraction lorsqu'on accole les lentilles et l'ouverture circulaire. Dans le cas particulier où le rayon de l'ouverture circulaire est égal au rayon de bord supposé commun aux deux lentilles, on peut évidemment supprimer l'ouverture circulaire. Les deux lentilles accolées sont alors équivalente à une lentille mince unique (L) et S' est alors l'image de S à travers (L) . Inversement la situation de la figure 11 est équivalente à un montage de Fraunhofer avec $f'_1 = SO$ et $f'_2 = OS'$.

Ainsi, l'intensité lumineuse dans le plan de l'image S' correspond à la diffraction de Fraunhofer par une ouverture circulaire étudiée : autour de l'image géométrique S' , l'énergie lumineuse est concentrée dans une frange centrale de diffraction, tache circulaire de rayon $0,61\lambda_0 f'_2/R = 0,61\lambda_0 OS'/R$. Plus généralement :

- Du fait de la diffraction sur les bords des montures, l'image S' d'un point S à travers un instrument d'optique n'est pas ponctuelle, mais constituée d'une tache-image, dont le rayon est d'autant plus faible que le rayon des montures est grand.

Considérons désormais le cas d'un objet double, constitué de deux points-sources proches S_1 et S_2 , distants de a . Une qualité essentielle de l'instrument d'optique représenté par la lentille mince (L) est son aptitude à séparer les deux points S_1 et S_2 , c'est-à-dire à donner deux taches-images séparables. Ces deux taches étant d'autant plus grandes que la diffraction est importante, c'est-à-dire que R est faible, nous retiendrons qualitativement que :

- La diffraction limite le pouvoir séparateur des instruments d'optique

7.3 Diffraction par un diaphragme de phase ou d'amplitude

On appelle transparence complexe $\underline{t}(P)$ d'un diaphragme plan le rapport des amplitudes complexes juste avant et après le diaphragme, en deux points P^+ et P^- infiniment voisins de P :

$$\underline{a}(P^+) = \underline{t}(P) \underline{a}(P^-)$$

Pour une ouverture simple, $\underline{t}(P)$ vaut 0 ou 1.

Pour un diaphragme de phase, $\underline{t}(P) = \exp(-i\psi(P))$ est un nombre complexe de module 1 : on peut réaliser un diaphragme de phase avec une lame mince d'indice n et d'épaisseur $e(P)$ variable ; cette lame allonge le chemin optique de $(n-1)e(P)$ et donc déphase l'onde $\psi(P) = k_0(n-1)e(P)$.

Pour un diaphragme d'amplitude, $\underline{t}(P)$ est réel positif. Un négatif photographique constitue un exemple de diaphragme d'amplitude.

Le principe de Huygens-Fresnel permet de calculer l'amplitude diffractée par un diaphragme plan en l'appliquant dans le plan des P^+ situé derrière le diaphragme. Alors l'onde reçue vaut : $\underline{a}_S(P^+) = \underline{t}(P) A_0 \exp[-i(k_0 SO + \mathbf{k} \cdot \mathbf{OP})]$ et tout revient à multiplier l'intégrand de la relation par $\underline{t}(P)$:

$$\underline{a}(M) = K A_0 \exp(-ik_0(SOM)) \iint_{(\Sigma)} \underline{t}(P) \exp[i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{OP}] d\sigma(P)$$

En se limitant à un problème unidimensionnel, c'est-à-dire à un diaphragme long selon $\mathbf{u}_y$ et dont la transparence complexe ne dépend que de X , et en supposant que le diaphragme est éclairé sous incidence normale ($\alpha = 0$), nous obtenons :

$$\underline{a}(M) = K A_0 \exp(-ik_0(SOM)) \int \underline{t}(X) \exp(ik_0\alpha' X) dX$$

Quitte à prendre $\underline{t}(X) = 0$ au delà des bornes réelles du diaphragme, nous pouvons étendre l'intégrale entre $+\infty$ et $-\infty$:

$$\underline{a}(M) = K A_0 \exp(-ik_0(SOM)) \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{t}(X) \exp(ik_0\alpha' X) dX$$

Avec l'analogie $X \rightarrow t$ et $k_0\alpha' \rightarrow \omega$, nous obtenons ici la transformée de Fourier de la transparence complexe du diaphragme. La diffraction par un diaphragme de phase ou d'amplitude peut être utilisée pour améliorer le pouvoir séparateur d'une lunette astronomique ou pour déplacer une image voir donner des images multiples.

7.4 Théorème de Babinet

On appelle diaphragmes complémentaires deux écrans tels que la somme de leurs transparences est égale à 1 : $t_1(P) + t_2(P) = 1$. Par exemple un écran opaque percé d'un disque de rayon R et un écran transparent sur lequel on noircit un disque de même rayon R constituent deux diaphragmes complémentaires.

Soit deux diaphragmes complémentaires (F_1) et (F_2) utilisés dans les conditions de Fraunhofer avec la même source ponctuelle monochromatique. Soient $\underline{a}_1(M)$ et $\underline{a}_2(M)$ les amplitudes complexes diffractées en M respectivement par (F_1) seul et par (F_2) seul. Alors, d'après le principe de Huygens-Fresnel :

$$\underline{a}_1(M) = K A_0 \exp(-ik_0(SOM)) \iint_{(\Sigma)} t_1(P) \exp[i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{OP}] d\sigma(P)$$

$$\underline{a}_2(M) = K A_0 \exp(-ik_0(SOM)) \iint_{(\Sigma)} t_2(P) \exp[i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{OP}] d\sigma(P)$$

Avec $t_1(P) + t_2(P) = 1$, nous obtenons en sommant et en regroupant les intégrales étendues à tout le plan des diaphragmes :

$$\underline{a}_1(M) + \underline{a}_2(M) = K A_0 \exp(-ik_0(SOM)) \iint_{(\Sigma)} \exp[i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{OP}] d\sigma(P)$$

Il est inutile de calculer explicitement cette intégrale. En effet elle représente exactement l'amplitude complexe $\underline{a}(M)$ diffractée par un plan infini transparent. Dans ces cas l'approximation de l'optique géométrique est valable, donc toute l'énergie lumineuse est concentrée sur l'image géométrique S' de la source. Donc en tout point $M \neq S'$:

$$\underline{a}(M) = 0 \text{ soit } \underline{a}_1(M) + \underline{a}_2(M) = 0 \text{ puis } \underline{a}_2(M) = -\underline{a}_1(M)$$

En passant aux modules, puis aux carrés il vient :

$$|\underline{a}_1(M)|^2 = |\underline{a}_2(M)|^2 \text{ soit } I_1(M) = I_2(M)$$

Nous obtenons ainsi le théorème de Babinet :

- Les figures de diffraction de Fraunhofer des deux écrans complémentaires sont identiques, sauf sur l'image géométrique S' de la source S .

7.5 Universalité de la diffraction des ondes

La diffraction est un phénomène commun à toutes les ondes scalaires solutions d'une équation de D'Alembert, perceptible dès que les dimensions caractéristiques des obstacles ne sont pas grandes devant la longueur d'onde.

Ainsi, les ondes sonores dont la longueur d'onde s'étend dans l'air entre 17 mm et 17 m sont violemment diffractées par les objets usuels dont les dimensions typiques sont inférieures au mètre : l'approximation de l'acoustique géométrique n'est pas valable dans notre environnement. Ceci nous permet par exemple d'entendre une conversation par l'intermédiaire d'une porte entrouverte. En revanche l'approximation de l'acoustique géométrique est valable pour l'étude de la propagation des ultrasons dans les océans, utilisés par les sonar des sous-marin ou des baleines pour localiser une cible ou un obstacle.

En revenant au domaine des ondes électromagnétiques, les ondes radios kilométriques sont fortement diffractées par les collines, ce qui permet leur réception sans vision directe de l'émetteur. En revanche la diffraction est beaucoup moins sensible pour les ondes métriques (bande FM).

Les rayons X, onde électromagnétiques de longueur d'onde $\lambda \approx 0,1$ nm, sont diffractés par les détails de la matière à l'échelle atomique, par exemple par un réseau cristallin, dont la maille est de l'ordre de 0,1 nm, alors que les ondes lumineuses ignorent des détails aussi petits. La diffraction des rayons X constitue ainsi un moyen d'investigation de la structure de la matière à l'échelle atomique.

On utilise aussi la diffraction d'électrons et la diffraction de neutrons pour étudier la structure atomique des surfaces, puisqu'une onde leur est associée.