Chapitre 8

Double fentes et réseaux

8.1 Fentes d'Young

Dans tout ce paragraphe, nous étudions la diffraction de Fraunhofer par une ouverture constituée de deux fentes (F_1) et (F_2) parallèles, fines, de largeur e selon $\mathbf{u}_x$, et longues, de longueur b selon $\mathbf{u}_y$, dont les centres O_1 et O_2 sont distants de a.

8.1.1 Cas d'une source ponctuelle

Calcul de l'éclairement

Le dispositif étudié est représenté sur la figure ci-dessous. La source ponctuelle émet une onde plane dont la direction $\mathbf{u}$ située dans le plan xOz, fait avec Oz un angle θ. On observe en un point M à l'infini dans la direction $\mathbf{u}'$ située dans le plan de figure xOz, et faisant avec Oz un angle θ'. L'amplitude complexe diffractée en M est donnée par l'expression du principe de Huygens-Fresnel avec $\alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_x = \sin\theta \approx \theta$ et $\alpha' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}_x = \sin\theta' \approx \theta'$:

$$\underline{a}(M) = KA_0 \exp(ik_0(SOM)) \int_{(F_1)\cup(F_2)} \exp\left(ik_0(\theta' - \theta)X\right) \mathrm{d}X$$

Les fentes étant disjointes, l'intégrale est additive :

$$\underline{a}(M) = \underline{a}_1(M) + \underline{a}_2(M)$$

avec

$$\underline{a}_i(M) = KA_0 \exp(ik_0(SOM)) \int_{F_i} \exp\left(ik_0(\theta' - \theta)X\right) \mathrm{d}X$$

Ainsi tout se passe comme si chaque fente émettait une onde, les ondes émises étant cohérentes.

Le choix de l'origine O est sans influence sur le résultat du calcul des amplitudes. Choisissons donc O_1 comme origine pour le calcul de $\underline{a}_1$ et O_2 pour le calcul de $\underline{a}_2$.

$$\begin{aligned}\underline{a}_i(M) &= KA_0 \exp(ik_0(SO_iM)) \int_{-e/2}^{+e/2} \exp(ik_0(\theta' - \theta)X)\mathrm{d}X \\ &= KA_0\, e \exp({}_ik_0(SO_iM))\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(\theta'-\theta)e}{\lambda_0}\right)\end{aligned}$$

Après factorisation des termes communs, l'amplitude totale diffractée s'écrit :

$$\begin{aligned}\underline{a}(M) &= KA_0\, e\, \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(\theta'-\theta)e}{\lambda_0}\right) \\ & \quad [\exp\left(-ik_0(SO_1M)\right) + \exp\left(-ik_0(SO_2M)\right)]\end{aligned}$$

La différence de marche $\delta = (SO_2M) - (SO_1M)$ apparaît sur la figure en traçant les plans d'ondes :

$$\delta = (O_2H_2) - (O_1H_1) = O_2H_2 - H_1O_1 = a \sin\theta' - a\sin\theta = a(\theta' - \theta)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\exp\left(-ik_0(SO_1M)\right) &+ \exp\left(-ik_0(SO_2M)\right) \\ &= \exp\left(-ik_0(SO_1M)\right)[1 + \exp(ik_0\delta)] \\ &= \exp\left(-ik_0(SO_1M)\right)\left[1 + \exp\left(-ik_0a(\theta'-\theta)\right)\right]\end{aligned}$$

En définitive, l'amplitude complexe reçue en M s'écrit :

$$\underline{a}(M) = KA_0e \exp\left(-ik_0(SO_1M)\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(\theta'-\theta)e}{\lambda_0}\right)\left[1 + \exp\left(-ik_0a(\theta'-\theta)\right)\right]$$

Et en prenant le carré du module, nous obtenons l'éclairement :

$$I(M) = K^2A_0^2e^2\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi(\theta'-\theta)e}{\lambda_0}\right)\left[2 + 2\cos\left(\frac{2\pi a(\theta'-\theta)}{\lambda_0}\right)\right]$$

Cette expression peut se mettre sous la forme :

$$I(M) = I_0(M) * R(M) \text{ avec } R(M) = 2 + 2\cos\left(\frac{2\pi a(\theta'-\theta)}{\lambda_0}\right)$$

où $I_0(M)$ est l'éclairement qui serait diffractée par une seule des deux fentes, et où $I(M)$ est la fonction d'interférences à deux ondes, correspondant aux deux ondes d'amplitudes $\underline{a}_1$ et $\underline{a}_2$, fictivement émises par les centres O_1 et O_2 des deux fentes d'Young.

Contenu physique

Avec $e << a$, la fonction de diffraction joue le rôle d'enveloppe de la fonction d'interférences.

En pratique, l'éclairement en dehors de la frange centrale de diffraction est négligeable, et on observe des franges d'interférences équidistantes de l'interfrange angulaire $\delta\theta' = \lambda_0/a$ dans la frange centrale de diffraction de demi-largeur angulaire $\Delta\theta' = \lambda_0/e$. Ainsi, la diffraction joue ici un rôle favorable sur la largeur du champ d'interférences.

8.1.2 Cas d'une fente source de largeur ϵ

La source est ici une fente $\mathcal{S}$ de largeur ϵ, parallèle à $\mathbf{u}_y$ dont le centre est confondu avec le foyer-objet de la lentille mince (L_1). Nous supposons ici les fentes diffractantes infiniment fines, de telle sorte que la diffraction est isotrope dans les plans $y =$ constante. Comme, en l'absence de diffraction dans la direction $\mathbf{u}_y$, l'éclairement en un point M de l'écran est créé exclusivement par le segment S_1S_2 des points de la fente source qui ont même ordonnée que M.

Découpons le segment S_1S_2 en éléments de longueur $\mathrm{d}x_S$ centrés sur le point courant S d'abscisse x_S. Avec $\theta = -x_S/f_1'$, la contribution de $\mathrm{d}x_S$ à l'éclairement en M vaut :

$$dI(M) = \frac{I_0}{\epsilon}\mathrm{d}x_S\left[2 + 2\cos\left(\frac{2\pi a(\theta' - \theta)}{\lambda_0}\right)\right]$$

Les différentes sources quasi-ponctuelles S sont distinctes, donc incohérentes ; leurs éclairements en M sont donc additifs :

$$I(M) = \int_{-\epsilon/2}^{+\epsilon/2}\frac{I_0}{\epsilon}\mathrm{d}x_S\left[2 + 2\cos\left(\frac{2\pi a(\theta' - \theta)}{\lambda_0}\right)\right]$$

L'intégrale se calcule aisément :

$$I(M) = I_0 + \frac{I_0}{\epsilon}\left[\frac{\lambda_0 f_1'}{2\pi a}\sin\left(\frac{2\pi a(\theta' + x_S/f_1')}{\lambda_0}\right)\right]_{-\epsilon/2}^{+\epsilon/2}$$

Soit :

$$I(M) = I_0\left[1 + \frac{\lambda_0 f_1'}{2\pi a\epsilon}\sin\left(\frac{2\pi a(\theta' + \epsilon/2f_1')}{\lambda_0}\right) - \frac{\lambda_0 f_1'}{2\pi a\epsilon}\sin\left(\frac{2\pi a(\theta' - \epsilon/2f_1')}{\lambda_0}\right)\right]$$

Puis en factorisant les sinus :

$$I(M) = I_0\left[1 + \frac{\lambda_0 f_1'}{\pi a\epsilon}\sin\left(\frac{\pi\epsilon a}{\lambda_0 f_1'}\right)\cos\left(\frac{2\pi a\theta'}{\lambda_0}\right)\right]$$

En faisant apparaître le sinus-cardinal, il vient :

$$I(M) = I_0 \left[1 + V \cos\left(\frac{2\pi a\theta'}{\lambda_0}\right)\right]$$

avec

$$V = \text{sinc}\left(\frac{\pi\epsilon a}{\lambda_0 f_1'}\right)$$

V est ici une constante, de telle sorte que l'éclairement évolue entre $I_{max} = I_0(1 + |V|)$ et $I_{min} = I_0(1 - |V|)$. Le facteur de contraste est alors égal à $C = |V|$. Il s'annulle pour :

$$\frac{\pi\epsilon a}{\lambda_0 f_0'} = n\pi \quad \text{avec } n \text{ entier soit} \quad \epsilon = \frac{\lambda_0 f_1'}{a}$$

Ainsi les franges se brouillent périodiquement et le premier brouillage a lieu lorsque :

$$\epsilon_{max} = \frac{\lambda_0 f_1'}{a}$$

En pratique, le contraste n'est convenable que pour $\epsilon < \epsilon_{max}$. Le critère de non brouillage des franges peut-être exprimé à l'aide de la variation maximale de l'ordre d'interférences lorsque S se déplace sur la source étendue :

$$\Delta p = \left[\frac{a\theta'}{\lambda_0} + \frac{a\epsilon}{2\lambda_0 f_1'}\right] - \left[\frac{a\theta'}{\lambda_0} - \frac{a\epsilon}{2\lambda_0 f_1'}\right] = \frac{a\epsilon}{\lambda_0 f_1'}$$

Soit au premier brouillage :

$$\Delta p_{max} = \frac{a\epsilon_{max}}{\lambda_0 f_1'} = 1$$

Lorsqu'un dispositif interférentiel est éclairé par une source suffisamment étendue, les franges d'interférences se brouillent et on obtient un éclairement uniforme. Le critère semi-quantitatif de brouillage que nous avons obtenu est tout à fait général :

$$\Delta p_{max} \geq 1$$

8.2 Diffraction par des fentes multiples – Réseau

8.2.1 Intensité

Considérons le cas de N fentes parallèles, infiniment longues suivant Oy et étroites de largeur e, séparées par la distance a, de centre à centre. On place l'origine des coordonnées au centre de la première fente. On note O_i le centre de la $i$ème fente. La source ponctuelle émet une onde plane dont la direction $\mathbf{u}$ située dans le plan $x0z$, fait avec Oz un angle θ. On observe en un point M à l'infini dans la direction $\mathbf{u'}$ située dans le plan de figure xOz, et faisant avec Oz un angle θ'. L'amplitude complexe diffractée en M est donnée par l'expression du principe de Huygens-Fresnel avec $\alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_x = \sin\theta \approx \theta$ et $\alpha' = \mathbf{u'} \cdot \mathbf{u}_x = \sin\theta' \approx \theta'$:

$$\underline{a}(M) = KA_0 \exp(ik_0(SOM)) \int_{N fentes} \exp\left(ik_0(\mathbf{u'} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{OP}\right) \mathrm{d}X$$

Le domaine d'intégration peut-être scindé en N partie de largeur e correspondants au N traits du réseau :

$$\underline{a}(M) = KA_0 \exp(ik_0(SOM)) \sum_{N-1}^{n=0} \int_{n^{\grave{e}me}\ fente} \exp\left(ik_0(\mathbf{u'} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{OP}\right) \mathrm{d}X$$

Soit en introduisant le centre de chaque fente :

$$\underline{a}(M) = KA_0 \exp(ik_0(SOM)) \sum_{N-1}^{n=0} \exp\left[ik_0\left(\mathbf{u'} - \mathbf{u}\right) \cdot \mathbf{OO}_n)\right] \int_{n^{\grave{e}me}\ fente} \exp\left(ik_0(\mathbf{k'} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{O_nP}\right) \mathrm{d}X$$

Par périodicité les intégrales dans le terme de droite ont toutes la même valeur :

$$\underline{s}_{fente}(M) = \int_{n^{\grave{e}me}\ fente} \exp(ik_0(\mathbf{k'} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{O_nP}) \mathrm{d}X = e\mathrm{sinc}\frac{\pi\left(\theta' - \theta\right) e}{\lambda_0}$$

La valeur de la somme discrète peut se calculer rapidement sous la forme de la somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{N-1}^{n=0} \exp\left[ik_0\left(\mathbf{u'} - \mathbf{u}\right) \cdot \mathbf{OO}_n)\right] = \sum_{N-1}^{n=0} \exp\left[ik_0\left(\theta' - \theta\right) na\right] = \sum_{N-1}^{n=0} \exp\left[ik_0\left(\theta' - \theta\right) a\right]^n$$

$$\sum_{N-1}^{n=0} \exp\left[ik_0(\mathbf{u'} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{OO}_n\right] = \frac{1 - \exp\left[ik_0 N(\theta' - \theta)a\right]}{1 - \exp\left[ik_0(\theta' - \theta)a\right]} = \frac{\exp\frac{ik_0 N(\theta' - \theta)a}{2}}{\exp\frac{ik_0(\theta' - \theta)a}{2}} \frac{\sin\frac{\pi(\theta' - \theta)Na}{\lambda_0}}{\sin\frac{\pi(\theta' - \theta)a}{\lambda_0}}$$

En prenant le module au carré de l'amplitude on obtient l'intensité au point M :

$$I(M) = K^2 A_0^2 e^2 \mathrm{sinc}^2\frac{\pi\left(\theta' - \theta\right) e}{\lambda_0} \frac{\sin^2\frac{\pi(\theta' - \theta)Na}{\lambda_0}}{\sin^2\frac{\pi(\theta' - \theta)a}{\lambda_0}}$$

A nouveau, l'intensité de la figure de diffraction est modulée par une enveloppe, la fonction :

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi(\theta'-\theta)Na}{\lambda_0}}{\sin^2 \frac{\pi(\theta'-\theta)a}{\lambda_0}}$$

Celle-ci possède des maxima principaux lorsque $(\theta'-\theta) = m\lambda_0/a$ et la valeur de ces maxima vaut N^2.

Les minima se produisent pour :

$$(\theta' - \theta) = \pm\frac{\lambda_0}{Na}, \pm\frac{2\lambda_0}{Na}, \pm\frac{3\lambda_0}{Na}, \ldots, \pm\frac{(N-1)\,\lambda_0}{Na}, \pm\frac{(N+1)\,\lambda_0}{Na}$$

Entre les minima, il y a un maximum secondaire, donc la position est approximativement :

$$(\theta' - \theta) = \pm\frac{3\lambda_0}{2Na}, \pm\frac{5\lambda_0}{2Na}, \ldots$$

8.2.2 Résolution d'un spectromètre à réseau

On définit la largeur effective d'une raie spectrale comme étant la largeur angulaire entre deux zéros situés de par et d'autre d'un maxima principal. Pour une direction d'incidence donnée, cette largeur est donnée par :

$$\Delta\theta' = \frac{2\lambda_0}{Na}$$

C'est la largeur angulaire d'une raie spectrale due à l'élargissement instrumental. On constate que cette largeur est proportionnelle à la dimension du réseau Na.

Un autre paramètre très important est la variation de l'angle de diffraction par rapport à la longueur d'onde du rayonnement ou *dispersion angulaire*, définit par :

$$\mathcal{D} = \frac{d\theta}{d\lambda}$$

Pour les réseaux, cela vaut :

$$\mathcal{D} = \frac{m}{a}$$

Le pouvoir de résolution spectrale $\mathcal{R}$ d'un spectromètre à réseau est défini par :

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{min}}$$

où $(\Delta\lambda)_{min}$ est la plus petite différence de longueurs d'onde que l'on peut résoudre. En limite de résolution, elle est égale à la distance angulaire entre le maxima et le premier minima, soit :

$$(\Delta\theta')_{min} = \frac{\lambda_0}{Na}$$

Puis en utilisant la dispersion angulaire :

$$(\Delta\lambda)_{min} = (\Delta\theta')_{min} / \mathcal{D} = \frac{\lambda_0}{mN}$$

D'où :

$$\mathcal{R} = mN$$

Le pouvoir de résolution dépend du nombre de traits éclairés et de l'ordre dans lequel on observe !