

Lumière et couleurs

Contrôle continu de novembre 2006

Correction

I. Onde plane

1. Dans la direction : $(-2\mathbf{i} + \sqrt{5}\mathbf{j} + \mathbf{k})$
2. C'est la norme du vecteur $\mathbf{E}_0$: $10^{5/2}$ V/m
3. $\sqrt{5}\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
4. $k = \pi \times 10^7 \text{ m}^{-1}$. $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2 \times 10^{-7} \text{ m}$.
5. $\omega = 9,42 \times 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$, $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 1,5 \times 10^{15} \text{ Hz}$
6. $c = \frac{\omega}{k} = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$

II. Modèle de conductivité d'un métal

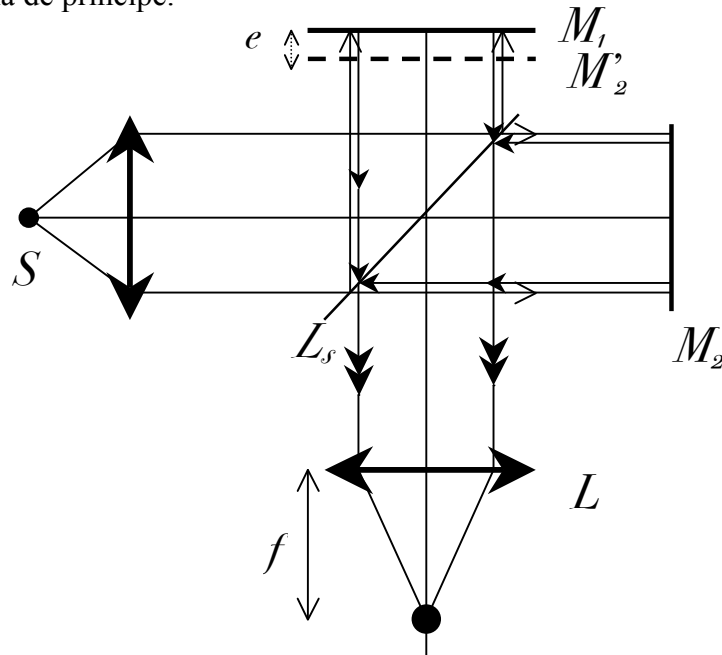
1. La vitesse moyenne est la moyenne locale des vitesses dans un volume Λ^3 , où Λ est une longueur grande devant la distance inter-atomique et petite devant l'échelle de variation de propriété du métal.
2. On suppose d'abord que $\mathbf{E}$ est constant et la vitesse moyenne $\mathbf{v}$ nulle à l'instant initial.
 - a. $\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\tau} \mathbf{v} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}$.
 - b. La solution de l'équation est $\mathbf{v} = \frac{e\tau}{m} \mathbf{E} (e^{-t/\tau} - 1)$. La vitesse moyenne des électrons tend vers la valeur limite $\mathbf{v}_L = -\frac{e\tau}{m} \mathbf{E}$ pour $t \gg \tau$.
 - c. En basse fréquence, l'échelle de temps de variation du champ électrique est beaucoup plus grande que τ . Donc $\mathbf{j} = -eN\mathbf{v}_L = N \frac{e^2\tau}{m} \mathbf{E}$. $\sigma = N \frac{e^2\tau}{m}$.
3. On suppose maintenant que $\mathbf{E}$ est de la forme : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$ ou en introduisant la notation complexe : $\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t)$.
 - a. On écrit l'équation 2a avec $\underline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0 \exp(i\omega t)$: $\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right) \underline{\mathbf{v}} = -\frac{e}{m} \underline{\mathbf{E}}$. On trouve donc $\underline{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma}{1 + i\omega\tau}$. $\omega\tau \gg 1 \Rightarrow \sigma(\omega) = \frac{1}{i\omega\tau}$.
 - b. Les équations de Maxwell dans le métal pour une onde complexe :
 $\mathbf{0} = \text{div } \underline{\mathbf{E}} = i\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{E}}$; $0 = \text{div } \underline{\mathbf{B}} = i\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{B}}$; $\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \underline{\mathbf{B}}}{\partial t} \Rightarrow i\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{E}} = i\omega \underline{\mathbf{B}}$
 et $\text{rot } \underline{\mathbf{B}} = \mu_0 \underline{\sigma}(\omega) \underline{\mathbf{E}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial t} \Rightarrow i\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{B}} = \mu_0 \left(\frac{\sigma}{1 + i\omega\tau} - i\varepsilon_0 \omega \right) \underline{\mathbf{E}}$. En

remplaçant la troisième équation dans la quatrième, on obtient pour $\omega\tau \gg 1$:

$$\underline{k}'^2 = \mu_0 \omega \left(\varepsilon_0 - \frac{Ne^2}{m\omega^2} \right)$$

III. Anneaux dans un interféromètre de Michelson.

1. Schéma de principe.



2. $\delta = 2e \cdot \cos i$, d'où $\Phi = 2\pi\delta/\lambda = (4\pi e \cdot \cos i)/\lambda$
3. Au centre de la figure d'interférences, l'angle d'incidence i est nul, le $\cos i$ est maximum, donc l'ordre d'interférence $p_0 = 2e/\lambda$ est maximum. Pour une épaisseur $e = 1 \text{ cm}$, on trouve $p_0 = 40\,000$.
Ce centre correspondant à un p_0 entier, c'est un centre brillant.
4. Les anneaux brillants sont définis par p entier. Pour l'anneau brillant d'ordre m , en développant le $\cos i$ au premier ordre dans l'hypothèse où i est petit ($\cos i = 1 - i^2/2$), on obtient :

$$p_m = \frac{2e - ei_m^2}{\lambda} = p_0 - \frac{ei_m^2}{\lambda} \text{ avec } \frac{ei_m^2}{\lambda} = m \text{ (entier)}$$

$$i_m = \sqrt{\frac{\lambda}{e}} \sqrt{p_0 - p_m} = \sqrt{\frac{\lambda}{e}} \sqrt{m}$$

Dans le plan focal de la lentille L , le rayon R_m de l'anneau d'ordre m est donné par $R_m = f \cdot i_m$, soit $R_m = f \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{e}} \sqrt{m}$: les R_m croissent donc comme $\sqrt{m}$.

5. La différence de marche totale est maintenant :

$$\begin{aligned} \delta &= 2(e - e') \cdot \cos i + 2ne' \cos r \approx 2(e - e') \cdot (1 - i^2/2) + 2ne' \cdot (1 - r^2/2) \\ &= 2[e + e'(n-1)] - i^2(e - e' + e'/n) \end{aligned}$$

L'ordre d'interférence au centre ($i = 0$) a donc varié de $\Delta p_0 = 2e'(n - 1) / \lambda = 15$.

Le rayon R'_m du m-ième anneau brillant est donc dans un rapport

$$\sqrt{\frac{e}{e + e'(n - 1)}} \text{ avec le rayon } R_m \text{ calculé ci-dessus, soit } \sqrt{\frac{1}{1 + 7,5 \cdot 10^{-4}(1,5 - 1)}} \approx 1,$$

c'est à dire plus petit mais pratiquement inchangé, à 3,75% près.