Physique Quantique Appliquée : Contrôle Continu

Aucun document ni calculette autorisé

Exercice 1 : Questions diverses (6/40)

Justifier vos réponses, même de façon succincte.

1. Quelles sont les différences principales entre un objet classique (un grain de poussière ou une onde sonore par exemple) et un objet quantique (un électron dans un atome par exemple) ? Citer au moins deux différences majeures.
2. En Physique Quantique certains aspects/principes sont de nature *probabiliste* et d'autres de nature *déterministe*. Citer un exemple dans chacun des cas.
3. Dans la relation d'Heisenberg $\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar/2$, que signifient Δx et Δp_x ?
4. Une fonction d'onde est-elle une quantité sans dimension ? (justifier)
5. Les états propres de l'hamiltonien H d'un système sont-ils les seuls états autorisés de ce système ? (justifier)
6. Dans un problème donné, si $\Psi_1(x,t)$ et $\Psi_2(x,t)$ sont solutions de l'équation de Schrödinger, alors le produit $\Psi_1(x,t)\,\Psi_2(x,t)$ est *nécessairement* une fonction d'onde solution. Vrai ou faux ? Justifier.

Exercice 2 : ECOC, mesure, évolution (26/40)

On considère un système dont l'espace des états, à trois dimensions, est rapporté à la base orthonormée formée par les trois kets $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle$. Dans cette base, l'opérateur hamiltonien H du système et deux opérateurs A et B sont représentés par les matrices suivantes :

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} ; \quad B = b \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où les coefficients ω, a et b sont des réels positifs.
A $t = 0$, on place le système dans l'état :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{i}{2}|u_2\rangle + \frac{i}{2}|u_3\rangle$$

1. Valeurs propres et vecteurs propres
   (a) Vérifier que $|u_1\rangle$ est vecteur propre de A et que $|u_3\rangle$ est vecteur propre de B.
   (b) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de la sous-matrice $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. En déduire les trois vecteurs propres de A (que l'on notera $|v_i\rangle$) et les trois vecteurs propres de B (que l'on notera $|w_i\rangle$). On fera attention à bien "normer à un" tous ces vecteurs.
   (c) Indiquer les valeurs propres de H, A et B, ainsi que leur degré de dégénérescence.Préciser clairement quels sont les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre calculée.
   (d) Exprimer les vecteurs $|u_i\rangle$ en fonction des vecteurs $|v_i\rangle$, puis en fonction des vecteurs $|w_i\rangle$.
2. Observable
   (a) Quelle est la définition d'une observable ?
   (b) Les opérateurs H, A et B sont-ils des observables ?

3. ECOC
   (a) Dans l'acronyme "E.C.O.C.", à quoi fait *précisément* référence le premier "C" ?
   (b) Montrer qu'aucun des opérateurs H, A et B ne peut former un ECOC à lui seul.
   (c) B peut-il former un ECOC avec H ou A ? (justifier)
   (d) Donner un ECOC pour ce système.
4. Mesure
   (a) Quelle est la norme du ket $|\psi(0)\rangle$?
   (b) Si on effectuait une mesure de l'énergie du système à $t = 0$, quelles valeurs pourrait-on trouver et avec quelles probabilités ?
   (c) Si on effectuait une mesure de A à $t = 0$, quelles valeurs pourrait-on trouver et avec quelles probabilités ? Quel serait alors l'état juste après la mesure ?
   (d) Si la mesure précédente avait donné "$-a$" comme résultat, quelles valeurs aurait-on pu trouver (et avec quelles probabilités) si l'on avait fait une mesure de B juste après la mesure de A ?
5. Evolution
   (a) Donner le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ du système à l'instant $t > 0$.
   (b) Est-ce que l'état $|\psi(t)\rangle$ est un *état stationnaire* ?
   (c) Si $|\psi(0)\rangle$ avait été égal à $\frac{i}{2}|u_2\rangle + \frac{i}{2}|u_3\rangle$, est-ce que $|\psi(t)\rangle$ aurait été un état stationnaire ? (justifier)
6. Valeurs moyennes
   (a) Calculer les valeurs moyennes $\langle A\rangle_t$ et $\langle B\rangle_t$ de A et B à l'instant $t > 0.t > 0$.
   (b) Quels sont les instants pour lesquels la valeur absolue de $\langle B\rangle_t$ est minimale ?
   (c) Avec quelle période évolue $\langle B\rangle_t$?
   (d) Montrer que les opérateurs A^2et B^2 sont proportionnels à l'opérateur identité.
   (e) Calculer les écarts quadratiques moyens ΔA et ΔB à l'instant $t > 0$.

Exercice 3 : Opérateur de moment cinétique (8/40)

Considérons une particule dans un potentiel central. Les trois composantes L_x, L_y, L_z de $\vec{L}$ forment l'opérateur de moment cinétique orbital de cette particule. Soit $|l, m\rangle$ un vecteur propre commun de $\vec{L}^2$ et L_z. On rappelle la définition des opérateurs L_+ et L_- ainsi que leur effet sur le ket $|l, m\rangle$:

$$L_+ = L_x + iL_y \quad ; \quad L_- = L_x - iL_y$$

$$L_\pm |l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\,|l, m \pm 1\rangle$$

1. Exprimer L_x et L_y, puis L_x^2 et L_y^2 en fonction de L_+ et L_-.
2. Calculer la somme $\langle L_x\rangle + \langle L_y\rangle$ des valeurs moyennes de L_x et L_y dans l'état $|l, m\rangle$.
3. Que valent les quantités $\langle l, m| L_+^2 |l, m\rangle$ et $\langle l, m| L_-^2 |l, m\rangle$?
4. Exprimer les kets $L_+L_- |l, m\rangle$ et $L_-L_+ |l, m\rangle$ en fonction de $|l, m\rangle$.
5. Calculer les quantités $\langle l, m| L_x^2 |l, m\rangle$ et $\langle l, m| L_y^2 |l, m\rangle$.
6. Calculer la somme $(\Delta L_x)^2 + (\Delta L_y)^2$, où ΔL_x et ΔL_y sont les écarts quadratiques moyens de L_x et L_y dans l'état $|l, m\rangle$. Pour quelles valeurs de l et m cette quantité est-elle nulle ?

ΨQA : CC (4.11.2011)

I

1) Classique :
- position, vitesse, énergie bien déterminées (mesures non probabilistes)
- un objet est soit une onde, soit une particule

Quantique : (et pas vus en classique)
- aspect probabiliste intrinsèque
- position/vitesse non déterminées parfaitement en même tps
- dualité onde - corpuscule
- spin
- états intriqués

2) proba : mesure (ex : densité de proba. de présence)
déterministe : éq. d'évolution

3) Δx = indétermination de la position lors d'une mesure / d'un ensemble de mesures
Δp_x = " qté de mvt

↪ pas dues aux appareils de mesure

4) NON !
1D : $|\Psi(x)|^2 . dx$ = proba (sans dim)
$\Rightarrow \dim(\Psi) = 1/\sqrt{L}$

3D : $|\Psi(\vec{r})|^2 dV$ = proba $\Rightarrow \dim(\Psi) = \dfrac{1}{\sqrt{L^3}}$

5) NON ! un système peut être dans n'importe quel VP ou combi. linéaire de VP de toute observable (pas nécessairement $\hat{H}$)

ex: mesure de L_z par un potentiel non-central

$$\Rightarrow [L_z, V(\vec{r})] \neq 0$$

$\Rightarrow$ VP de $\hat{L}_z$ ne sont pas VP de $\hat{H}$

6. L'équation de Schrödinger est linéaire, donc toute combi. linéaire de solutions est une solution, mais pas le produit

ex: $$i\hbar\partial_t(\psi_1\psi_2) = i\hbar\partial_t\psi_1 . \psi_2 + \psi_1 . i\hbar\partial_t\psi_2$$
$$= (H\psi_1).\psi_2 + \psi_1.(H\psi_2)$$
$$\neq H(\psi_1\psi_2)$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\psi_1\psi_2) = \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}.\psi_2 + \psi_1.\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \underbrace{2\frac{\partial\psi_1}{\partial x}.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}}_{\text{terme en plus.}}$$

II 1. (a) matriciellement $A|u_1\rangle = a.|u_1\rangle$ et $B|u_3\rangle = b.|u_3\rangle$

(b) v.p. $$\begin{vmatrix} -\lambda & i \\ -i & -\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 + i^2 = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm 1}$$

VP: $$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = +1.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} iy \\ -ix \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y = -ix \Rightarrow \boxed{VP_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} iy \\ -ix \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y = ix \Rightarrow \boxed{VP_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \text{(A)} \begin{cases} |v_1\rangle = |u_1\rangle \leftrightarrow a \\ |v_2\rangle = \dfrac{|u_2\rangle - i|u_3\rangle}{\sqrt{2}} \leftrightarrow a \\ |v_3\rangle = \dfrac{|u_2\rangle + i|u_3\rangle}{\sqrt{2}} \leftrightarrow -a \end{cases}$$

$$\text{(B)} \begin{cases} |w_1\rangle = \dfrac{|u_1\rangle - i|u_2\rangle}{\sqrt{2}} \leftrightarrow b \\ |w_2\rangle = \dfrac{|u_1\rangle + i|u_2\rangle}{\sqrt{2}} \leftrightarrow -b \\ |w_3\rangle = |u_3\rangle \leftrightarrow b \end{cases}$$

(c) op $\rightarrow$ vp (dégé) $\rightarrow$ VP associé

$H \rightarrow \hbar\omega$ (1) $\rightarrow |u_1\rangle$ et $2\hbar\omega$ (2) $\rightarrow |u_2\rangle, |u_3\rangle$

$A \rightarrow a$ (2) $\rightarrow |v_1\rangle, |v_2\rangle$ et $-a$ (1) $\rightarrow |v_3\rangle$

$B \rightarrow b$ (2) $\rightarrow |w_1\rangle, |w_3\rangle$ et $-b \rightarrow |w_2\rangle$

(d)
$$\begin{cases} |u_1\rangle = |v_1\rangle \\ |u_2\rangle = \dfrac{|v_2\rangle + |v_3\rangle}{\sqrt{2}} \\ |u_3\rangle = i\left(\dfrac{|v_2\rangle - |v_3\rangle}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \quad \underline{\text{et}} \quad \begin{cases} |u_1\rangle = \dfrac{|w_1\rangle + |w_2\rangle}{\sqrt{2}} \\ |u_2\rangle = \left(\dfrac{|w_1\rangle - |w_2\rangle}{\sqrt{2}}\right) \cdot i \\ |u_3\rangle = |w_3\rangle \end{cases}$$

(2). (a) Observable = op. hermitique dont les VP peuvent former une base de l'esp. des états

(b) <u>OUI</u> : $a, b, \omega \in \mathbb{R}$; et $A^+ = A$, $B^+ = B$, H diago

(3). (a) ECOC

↳ "complet" → ∃ une bijection entre les listes de v.p. des op. de l'ECOC <u>et</u> les VP de la base commune

(b) car ils ont tous une vp dégénérée

(c) $[H, B] = \hbar\omega b . \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ $\Rightarrow$ <u>NON</u> !

$[A, B] = ab . \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ i & 0 & i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

(d) $[H, A] = 0$ et bijection : $(\hbar\omega, a) \leftrightarrow |v_1\rangle$

observables

$(2\hbar\omega, a) \leftrightarrow |v_2\rangle$

$(2\hbar\omega, -a) \leftrightarrow |v_3\rangle$

↳ $\{A, H\}$ = ECOC

(4). (a) $\text{norme}(\psi(0)) = \sqrt{\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle} = \sqrt{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{i}{2}\right|^2 + \left|\frac{i}{2}\right|^2} = 1$

(b) <u>mesure de H</u> : $\hbar\omega$ <u>ou</u> $2\hbar\omega$

$P(\hbar\omega) = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$ ↳ $P(2\hbar\omega) = 1 - \frac{1}{2} = 1/2$

(c) <u>mesure de A</u> : $|\psi(0)\rangle = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{i}{2} \cdot \frac{|v_2\rangle + |v_3\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{i}{2} \cdot \frac{|v_2\rangle - |v_3\rangle}{-\sqrt{2}\, i}$

dans la base des VP de A

$= |\psi_a\rangle + |\psi_{-a}\rangle$

→ a <u>ou</u> $-a$

avec $\begin{cases} |\psi_a\rangle = \dfrac{|v_1\rangle}{\sqrt{2}} + \left(\dfrac{i-1}{2\sqrt{2}}\right).|v_2\rangle \\ |\psi_{-a}\rangle = \left(\dfrac{i+1}{2\sqrt{2}}\right).|v_3\rangle \end{cases}$

état après la mes :

$\hookrightarrow \begin{cases} P(a) = \left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\dfrac{i-1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \dfrac{3}{4} \longrightarrow |\psi^+\rangle = |\psi_a\rangle \\ P(-a) = 1 - 3/4 = 1/4 \longrightarrow |\psi^+\rangle = |\psi_{-a}\rangle \end{cases}$

(d) $|\psi_{-a}\rangle = \dfrac{i+1}{2\sqrt{2}}.|v_3\rangle = \dfrac{i+1}{2\sqrt{2}}.\dfrac{|u_2\rangle + i|u_3\rangle}{\sqrt{2}} = \dfrac{i+1}{4}\left(|u_2\rangle + i|u_3\rangle\right)$

$\hookrightarrow$ dans la base des VP de B

$\hookrightarrow |\psi_{-a}\rangle = \dfrac{i+1}{4}\left(\dfrac{|w_1\rangle - |w_2\rangle}{\sqrt{2}}.i + i.|w_3\rangle\right)$

$= |\psi_b\rangle + |\psi_{-b}\rangle$

avec $\begin{cases} |\psi_b\rangle = \dfrac{i(i+1)}{4\sqrt{2}}.|w_1\rangle + \dfrac{i(i+1)}{4}.|w_3\rangle \\ |\psi_{-b}\rangle = -\dfrac{i(i+1)}{4\sqrt{2}}|w_2\rangle \end{cases}$

<u>mesure de B</u> : b <u>ou</u> −b

$\hookrightarrow P(b) = \dfrac{\langle\psi_b|\psi_b\rangle}{\langle\psi_{-a}|\psi_{-a}\rangle} = \dfrac{\left|\dfrac{i(i+1)}{4\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\dfrac{i(i+1)}{4}\right|^2}{\left|\dfrac{i(i+1)}{4\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\dfrac{-i(i+1)}{4\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\dfrac{i(i+1)}{4}\right|^2}$

$= \dfrac{3/16}{1/4} = 3/4$

et $P(-b) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

(5). (a) $|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} \cdot |u_1\rangle + \frac{i}{2} e^{-2i\omega t} \cdot \left(|u_2\rangle + |u_3\rangle\right)$

(b) pas stationnaire car $\exists$ un facteur de phase relatif

(c) OUI, car dans ce cas $|\psi(t)\rangle = \frac{i}{2} e^{-2i\omega t} \cdot \left(|u_2\rangle + |u_3\rangle\right)$
est équivalent à $|\psi(0)\rangle$: ils ne diffèrent que d'un facteur de phase global

(6) (a) $\langle A\rangle_t = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{2} e^{2i\omega t} & \frac{-i}{2} e^{2i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ia \\ 0 & -ia & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-i\omega t}/\sqrt{2} \\ +\frac{i}{2} e^{-2i\omega t} \\ +\frac{i}{2} e^{-2i\omega t} \end{pmatrix}$

ou $= a . P(a) + (-a) . P(-a)$

$\rightarrow$ dans les 2 cas : $\langle A\rangle_t = a/2$

$\langle B\rangle_t = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{2} e^{2i\omega t} & \frac{-i}{2} e^{2i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ib & 0 \\ -ib & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t}/\sqrt{2} \\ i e^{-2i\omega t}/2 \\ i e^{-2i\omega t}/2 \end{pmatrix}$

$= b . \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} . \cos(\omega t)\right)$

(b) $\langle B\rangle_t$ minimale quand $\cos(\omega t) = +1 \Rightarrow t_n = n . \frac{2\pi}{\omega}$

(c) $T = 2\pi/\omega$

(d) $A^2 = \dots = a^2 . \mathbb{1}$ et $B^2 = \dots = b^2 . \mathbb{1}$

(e) $\langle A^2\rangle = a^2$ et $\langle B^2\rangle = b^2$

$\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2} = \sqrt{a^2 - (a/2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} . a$

$\Delta B = \sqrt{b^2 - b^2 . \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\omega t)\right)^2} = b . \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos(\omega t)}{\sqrt{2}}\right)^2}$

III

① $L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}$ $L_y = \frac{L_+ + L_-}{2i}$

$L_x^2 = \frac{L_+^2}{4} + \frac{L_-^2}{4} + \frac{L_+L_- + L_-L_+}{4}$

$L_y^2 = -\frac{L_+^2}{4} - \frac{L_-^2}{4} + \frac{L_+L_- + L_-L_+}{4}$

② $\langle L_x \rangle + \langle L_y \rangle = 0$ car $\langle lm | L_\pm | lm \rangle = 0$

③ $\langle L_+^2 \rangle = \langle L_-^2 \rangle = 0$ par la même raison

④ $L_+L_- | lm \rangle = \hbar^2 (l(l+1) - m(m-1)) \cdot | lm \rangle$

$L_-L_+ | lm \rangle = \hbar^2 \cdot (l(l+1) - m(m+1)) \cdot | lm \rangle$

⑤ $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2} (l(l+1) - m^2)$

⑥ $\Delta L_x^2 + \Delta L_y^2 = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle = \hbar^2 \cdot (l(l+1) - m^2)$

$= 0$ par $l = 0$ et $m = 0$