Physique Quantique Appliquée : Examen n°1

Aucun document ni calculette autorisé

Exercice 1 : Questions diverses (8/40)

Justifier toutes vos réponses, même de façon succincte.

1. Quelles sont les principales caractéristiques de la description *quantique* d'un atome d'hydrogène ?
2. Expliquer en quoi une mesure quantique est différente d'une mesure classique (donner au moins 3 différences principales).
3. Donner un exemple (une expérience ou une propriété) illustrant le *principe de complémentarité*.
4. Est-ce que les fonctions d'onde $\Psi(x,t)$ et $e^{-iEt/\hbar}\Psi(x,t)$ décrivent le même état physique ?
5. Que dit le *principe de Pauli* au sujet des états possibles des 2 électrons d'un atome d'Hélium ?
6. Un électron de masse m est piégé dans un puits de potentiel carré infini de largeur L. Il émet un photon de longueur d'onde λ en passant du niveau $n = 5$ au niveau $n = 4$. Donner l'expression de λ en fonction de m, L, h et c, la vitesse de la lumière dans le vide.

Exercice 2 : ECOC, mesure, évolution (24/40)

On considère un système dont l'espace des états est à quatre dimensions. Une base orthonormée de cet espace est formée par les kets $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, |u_4\rangle$. Dans cette base, les opérateurs A et B sont représentés par les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3a \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & id & 0 \\ 0 & -id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d \end{pmatrix}$$

où les coefficients a et d sont des réels positifs.

Remarque : bien que l'espace des états soit à 4 dimensions, la plupart des calculs demandés par la suite ne concernent en fait que le sous-espace à 2 dimensions sous-tendu par les vecteurs de base $|u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$.

1. **Valeurs propres, vecteurs propres, observables** *(6/40)*
   (a) Les opérateurs A et B sont-ils des observables ? (justifier)
   (b) Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de A ?
   (c) Préciser le degré de dégénérescence de chaque valeur propre de A.
   (d) La matrice représentant B est une « matrice diagonale par blocs ». Identifier les 3 sous-matrices formant ces blocs.
   (e) Comment déduit-on les valeurs propres d'une matrice diagonale par blocs à partir des valeurs propres de chacun des blocs ?
   (f) Quels sont les valeurs propres et vecteurs propres de la sous-matrice $\begin{pmatrix} 0 & id \\ -id & 0 \end{pmatrix}$ représentant B dans le sous-espace à 2 dimensions $\{|u_2\rangle, |u_3\rangle\}$? On notera $|v_2\rangle$ (respectivement $|v_3\rangle$) le vecteur propre associé à la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de cette sous-matrice. On fera attention à bien « normer à un » ces vecteurs.
   (g) En déduire les quatre vecteurs propres de B (que l'on notera $|v_i\rangle$).
   (h) Préciser le degré de dégénérescence de chaque valeur propre de B.
2. **ECOC** *(3/40)*
   (a) Quelles sont les matrices représentant A et B dans le sous-espace à 2 dimensions $\{|v_2\rangle, |v_3\rangle\}$?
   (b) Calculer le commutateur $[A, B]$.
   (c) A et B forment-ils un ECOC pour le système ? (justifier)

3. **Mesure** *(8/40)*
   On supose que le système est, à l'instant initial $t = 0$, dans l'état :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|u_2\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|u_3\rangle$$

   (a) Donner l'expression de l'opérateur P_a : ≪ projecteur sur le sous-espace propre associé à la valeur propre a ≫.
   (b) On fait une mesure de A à $t = 0$, quelle(s) valeur(s) peut-on trouver et avec quelle(s) probabilité(s) ? Quel est alors l'état du système juste après cette mesure ?
   (c) Exprimer $|\psi(0)\rangle$ en fonction de $|v_2\rangle$ et $|v_3\rangle$.
   (d) On fait maintenant une mesure de B à $t = 0$, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Quel est alors l'état juste après la mesure ?
   (e) Déterminer $\langle B\rangle$ et ΔB à l'instant $t = 0$.

4. **Evolution** *(7/40)*
   On laisse en fait évoluer le système avant de faire la mesure de B.
   L'opérateur hamiltonien du système admet comme vecteurs propres les vecteurs $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, |u_4\rangle\}$ associés respectivement aux valeurs propres $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$:

$$H|u_i\rangle = E_i|u_i\rangle$$

   (on supposera par la suite que $E_3 > E_2$).
   (a) Donner le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ du système à l'instant $t > 0$.
   (b) Est-ce que l'état $|\psi(t)\rangle$ est un *état stationnaire* ? (justifier)
   (c) Exprimer $|\psi(t)\rangle$ en fonction de $|v_2\rangle$ et $|v_3\rangle$.
   (d) On fait une mesure de B à l'instant $t > 0$, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?
   (e) Déterminer $\langle B\rangle$ à l'instant $t > 0$.
   (f) Enoncer le théorème d'Ehrenfest, puis utiliser-le pour déterminer $\langle [B, H]\rangle$ à l'instant $t > 0$.

Exercice 3 : Opérateur de moment cinétique (8/40)

Considérons une particule de moment cinétique (de spin) 1/2. L'opérateur de moment cinétique associé est noté $\vec{S}$. Soit $|+\rangle$ et $|-\rangle$ les vecteurs propres communs à $\vec{S}^2$ et S_z, le vecteur propre $|+\rangle$ étant associé à la plus grande valeur propre de S_z.
On rappelle la définition générale des opérateurs S_+ et S_- ainsi que leur effet sur un ket $|s, m\rangle$ dans le cas d'un opérateur de moment cinétique $\vec{S}$:

$$S_+ = S_x + iS_y \quad ; \quad S_- = S_x - iS_y$$

$$S_\pm|s, m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}\,|s, m \pm 1\rangle$$

où les kets $|s, m\rangle$ sont les vecteurs propres communs à $\vec{S}^2$ et S_z,

1. Donner les valeurs propres de $\vec{S}^2$ et S_z.
2. Quelles sont les valeurs propres des opérateurs S_x et S_y ?
3. Déterminer les matrices représentant S_+ et S_- dans la base $\{|-\rangle, |+\rangle\}$ (vecteurs de base pris dans cet ordre).
4. Quel est l'effet de $(S_+ + S_-)$ sur le ket $|-\rangle + |+\rangle$? Conclusion.
5. Calculer le commutateur $[S_+, S_-]$.
6. Calculer le commutateur $[S_z, [S_+, S_-]]$.

MP 051 - Exam 1 - 2012 - 2013 CORR

Exo 1

RAPPEL DU N° DE PLACE

① MQ ⇒
* nuage / onde | de proba. de présence par l'e⁻ (pas de trajectoire)
* niveaux d'énergie (quantification de E, de $\vec{L}$)
* transitions entre niveaux d'E par absorption ou émission de photons tels que $h\nu_{nn'} = |E_n - E_{n'}|$ (Attention : $\boxed{\text{pas}}$ modèle ~~de~~ Bohr !)
* spin

ok si que 2 de ces points

② Mesure Q vs mesure classique :
* résultats possibles ne dépendent que de l'appareil de mesure (valeurs propres de $\hat{A}$)
* ∃ probas de les obtenir
* ∃ une modification incontrôlable et imprévisible de l'état du système mesuré (→ projection après la mesure, Heisenberg)
* ∃ une intrication "système mesuré / appareil de mesure"
* ∃ des mesures incompatibles

ok si que 2 de ces points

③
* variables conjuguées ((x, p) par ex) → Heisenberg
* dualité onde - corpuscule (fentes d'Young)

ok si que 1 de ces 4 termes

④ oui, car elles ne diffèrent que par un facteur de phase global (dépendant ou non du tps)

⑤ les e⁻ ne peuvent pas être dans le même état quantique, i.e. avoir tous leurs nombres quantiques identiques

⑥ $\boxed{E_n = n^2 \dfrac{h^2}{8mL^2}}$ 0,5 ⇒ $\boxed{h\nu = E_5 - E_4}$ 0,5 $= (25 - 16) \cdot \dfrac{h^2}{8mL^2}$

$\boxed{\lambda = \dfrac{c}{\nu}}$ 0,5 $= \boxed{\dfrac{8mL^2c}{9h}}$ 0,5

Exo 2

1 a) $A = A^+$, $B = B^+$, et dim. finie (VP = base de l'esp. des états) $\Rightarrow$ A et B obs. +0,5

b) vp : a et $3a$
VP : $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ $\rightarrow \{|u_4\rangle\}$

c) dégé : a : 3 fois ; $3a$: pas dégé

d) 3 blocs : (d) , $\begin{pmatrix} 0 & id \\ -id & 0 \end{pmatrix}$, $(-d)$

e) vp de la matrice = vp de chacun des blocs

méthode = 0,5 f) vp : sol. de $\begin{vmatrix} \lambda & id \\ -id & \lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - d^2 \Rightarrow d$ ou $-d$

méthode = 0,5 VP : $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & id \\ -id & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} id\beta \\ -id\alpha \end{pmatrix}} = \pm d \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = \mp i\alpha \Rightarrow \begin{cases} |v_2\rangle = \dfrac{|u_2\rangle - i|u_3\rangle}{\sqrt{2}} \\ |v_3\rangle = \dfrac{|u_2\rangle + i|u_3\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases}$

g) $|v_1\rangle = |u_1\rangle$; $|v_2\rangle = \dfrac{|u_2\rangle - i|u_3\rangle}{\sqrt{2}}$; $|v_3\rangle = \dfrac{|u_2\rangle + i|u_3\rangle}{\sqrt{2}}$; $|v_4\rangle = |u_4\rangle$

h) vp : d (dégé 2 fois) et $-d$ (dégé 2 fois)

---

2 a) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$

b) $[A, B] = 0$

c) pas ECOC puisqu'au couple de vp (a, d) correspond 2 VP $|v_1\rangle$ et $|v_2\rangle$ — pas bijection

---

3 a) $\mathbb{P}_a = |u_1\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2| + |u_3\rangle\langle u_3|$

ou $= |v_1\rangle\langle v_1| + |v_2\rangle\langle v_2| + |v_3\rangle\langle v_3|$

b) ① a ou ~~$3a$~~ (a priori) — que a finalement ② $P(a) = \dfrac{\langle\psi(0)|\mathbb{P}_a|\psi(0)\rangle}{\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle} = 1$

③ $|\psi(0^+)\rangle = \mathbb{P}_a|\psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle$ inchangé

c) $|u_2\rangle = \dfrac{|v_2\rangle + |v_3\rangle}{\sqrt{2}}$ $\qquad |u_3\rangle = \dfrac{|v_2\rangle - |v_3\rangle}{-i\sqrt{2}} = +\dfrac{i}{\sqrt{2}}(|v_2\rangle - |v_3\rangle)$

$|\psi(0)\rangle = \dfrac{i}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{|v_2\rangle + |v_3\rangle}{\sqrt{2}} - \dfrac{i|v_2\rangle}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}|v_3\rangle\right)$

$= \dfrac{i+1}{2}\cdot|v_2\rangle + \dfrac{i-1}{2}|v_3\rangle$

d) ① d ou $-d$ ② $P(d) = \frac{\langle\psi(0)|\mathbb{P}_d|\psi(0)\rangle}{\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle}$ avec $\mathbb{P}_d = |v_1\rangle\langle v_1| + |v_2\rangle\langle v_2|$

$$= \left|\frac{i+1}{2}\right|^2 = \frac{1}{2} = P(-d)$$

ok si $\begin{cases}|v_2\rangle \Leftrightarrow d \\ |v_3\rangle \Leftrightarrow -d\end{cases}$

③ $|\psi(0^+)\rangle \begin{cases} = \mathbb{P}_d|\psi(0)\rangle = \frac{i+1}{2}|v_2\rangle \text{ si } d \\ = \mathbb{P}_{-d}|\psi(0)\rangle = \frac{i-1}{2}|v_3\rangle \text{ si } -d \end{cases}$

déf = 0,5

e) $\langle B\rangle = \frac{\langle\psi(0)|B|\psi(0)\rangle}{\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle} = d.P(d) - d.P(-d) = 0$

déf = 0,5

$\left.\begin{array}{l}\Delta B = \sqrt{\langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2} = \sqrt{\langle B^2\rangle} \\ \langle B^2\rangle = d^2.P(d) + (-d)^2 P(-d) = d^2\end{array}\right\} \Delta B = d$

---

④ a) $|\psi(t)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}.e^{-i\frac{E_2.t}{\hbar}}.|u_2\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}.e^{-i\frac{E_3.t}{\hbar}}.|u_3\rangle$

b) $E_2 \neq E_3 \Rightarrow \exists$ un facteur de phase relatif dépendant du temps $\Rightarrow$ pas statio

c) $|\psi(t)\rangle = \frac{i.e^{-i\frac{E_2.t}{\hbar}} + e^{-i\frac{E_3t}{\hbar}}}{2}.|v_2\rangle + \frac{i\,e^{-i\frac{E_2t}{\hbar}} - e^{-i\frac{E_3t}{\hbar}}}{2}.|v_3\rangle$

d) ① d ou $-d$ ② $P(d) = \ldots = \left|\frac{i e^{-i\frac{E_2t}{\hbar}} + e^{-i\frac{E_3t}{\hbar}}}{2}\right|^2$

$$= \left(1 - \sin\left((E_3 - E_2).t/\hbar\right)\right)/2$$

et $P(-d) = 1 - P(d) = \left(1 + \sin(\ \text{"}\ )\right)/2$

e) $\langle B\rangle = d.P(d) - d.P(-d) = -d.\sin\left((E_3-E_2)t/\hbar\right)$

f) Th. d'Ehrenfest : $\forall \hat{A}$, $\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \langle\partial_t\hat{A}\rangle + \left\langle\frac{[\hat{A},\hat{H}]}{i\hbar}\right\rangle$

ok si que formule

où $\hat{H}$ est l'op. hamiltonien et où les moyennes sont faites sur un état sol. de l'éq. de Schöd

$\Rightarrow \langle[B,H]\rangle = i\hbar\frac{d\langle B\rangle}{dt} = -i.d.(E_3-E_2).\cos\left((E_3-E_2)t/\hbar\right)$

↗

Exo 3

1) $\underline{\text{vp de } \vec{S}^2}$: $s(s+1)\hbar^2 = \dfrac{3\hbar^2}{4}$; $\underline{\text{vp de } S_z}$: $m\hbar = \pm\hbar/2$

car $s = 1/2$ car $-s \leq m \leq +s$ par sauts de 1

2) $\underline{\text{vp de } S_x \text{ et } S_y}$: $\pm\hbar/2$ par $\underline{\text{isotropie}}$ de l'espace

3) $\underbrace{S_+|+\rangle = 0 \ ; \ S_+|-\rangle = \hbar\,|+\rangle}$; $S_-|+\rangle = \hbar|-\rangle$; $S_-|-\rangle = 0$

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hbar & 0 \end{pmatrix}_{\{|-\rangle, |+\rangle\}} \qquad S_- = \begin{pmatrix} 0 & \hbar \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\{|-\rangle, |+\rangle\}}$$

4) $(S_+ + S_-)(|-\rangle + |+\rangle) = \hbar.(|-\rangle + |+\rangle)$

$\Rightarrow |-\rangle + |+\rangle$ est $\underline{\text{VP}}$ de $S_+ + S_-$ par la $\underline{\text{vp}}$ $\hbar$

5) $[S_+, S_-] = S_+S_- - S_-S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hbar & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hbar.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

6) $S_z = \begin{pmatrix} -\hbar/2 & 0 \\ 0 & \hbar/2 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{2}.[S_+, S_-]$

$\Rightarrow [S_z, [S_+, S_-]] = 0$