Effet d'un champ magnétique sur la transition d'horloge du rubidium 85

Durée : 2 heures
Auncun document ni calculette autorisé

Dans un atome alcalin (Li, Na, Rb, K, Cs et Fr), on peut, en première approximation, considérer que seul l'électron le plus éloigné du noyau (l'électron de valence) est responsable des niveaux d'énergie de l'atome, les autres électrons et le noyau formant une zone centrale d'extension non-négligeable qui joue le rôle d'un noyau effectif écranté. Lorsque l'on ne prend pas en compte les corrections dues aux spins (l'hamiltonien est alors noté H_0), les niveaux d'énergie des états liés $|nLm_L\rangle$ diffèrent alors de ceux d'un atome d'hydrogène sans spin par un terme δ_L appelé "défaut quantique" :

$$E_{nL} = -\frac{R_y.hc}{(n-\delta_L)^2} \quad n \geqslant 1 \tag{1}$$

où R_y est la constante de Rydberg de l'atome considéré et où L et m sont les nombres quantiques associés aux valeurs propres des opérateurs $\overrightarrow{L}^2$ et L_z ($\overrightarrow{L}$ est l'opérateur de moment cinétique orbital de l'électron de valence).

Dans le cas du rubidium 85, dont la configuration du niveau fondamental est :

$$(1s)^2\,(2s)^2\,(2p)^6\,(3s)^2\,(3p)^6\,(4s)^2\,(3d)^{10}\,(4p)^6\,(5s)^1 = [Kr]\,(5s)^1 \tag{2}$$

on mesure : $\delta_0 = 3,13$; $\delta_1 = 2,65$; $\delta_2 = 1,34$; $\delta_3 = 0,02$ ...

I. Symétrie et défaut quantique du ^{85}Rb

On ne tient pas compte dans cette partie des spins (de l'électron et du noyau).

1. Quelle est la symétrie responsable de la dégénérescence d'ordre $2L+1$ des niveaux d'énergie d'un électron dans un potentiel central ? Quelle est, par conséquent, la dégénérescence d'un niveau E_{nL} ?

2. La comparer à celle du niveau E_n d'un atome d'hydrogène sans spin (la différence provient d'une symétrie "accidentelle" d'origine dynamique).

3. *(Bonus) Expliquer qualitativement pourquoi le défaut quantique est plus important pour les faibles valeurs de L.*

4. *(Bonus) Dans le cas du sodium $^{23}_{11}Na$, on mesure des valeurs plus faibles : $\delta_0 = 1,35$; $\delta_1 = 0,86$; $\delta_2 = 0,01$; $\delta_3 = 0$. Expliquer pourquoi.*

II. Spin de l'électron de valence

On tient compte à partir de maintenant du spin de l'électron de valence, mais on suppose tout d'abord qu'il n'interagit pas avec les autres moments cinétiques.

1. Rappeler les valeurs de S et m_S, nombres quantiques associés aux valeurs propres de $\overrightarrow{S}^2$ et S_z, où $\overrightarrow{S}$ est l'opérateur de moment cinétique de spin de l'électron de valence.
2. De quels opérateurs de moment cinétique est vecteur propre le vecteur $|nLm_L; Sm_S\rangle$? Ecrire l'action de ces opérateurs sur ce ket.
3. Quelles sont les valeurs de L et m_L pour un niveau "s" ?
4. Quelle est la dégénérescence du niveau $5s$?
5. Quelle est la dégénérescence du premier niveau excité $5p$?

III. Structure fine du ^{85}Rb

Le spin de l'électron de valence se couple en fait à son moment cinétique orbital par l'intermédiaire de l'hamiltonien d'interaction suivant :

$$H_{SO} = a\overrightarrow{L}.\overrightarrow{S} \tag{3}$$

1. *(Bonus) Calculer le commutateur* $\left[H_{SO}, \overrightarrow{J}\right]$*, où* $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{L} + \overrightarrow{S}$ *est le moment cinétique total de l'électron de valence. Sur quelle symétrie du problème pourrait-on s'appuyer pour prédire ce résultat ?*
2. Donner les valeurs possibles du nombre quantique J associé aux vapeurs propres de l'opérateur $\overrightarrow{J}^2$ en fonction de L et S.
3. Quelles sont les différentes valeurs de J associées aux états $5s$ et $5p$? (dorénavant, pour repérer ces niveaux, on utilisera la notation spectroscopique "$n\,(symbole\ associé\ à\ L)_J$")
4. Exprimer H_{SO} en fonction de $\overrightarrow{J}^2$, $\overrightarrow{L}^2$ et $\overrightarrow{S}^2$.
5. En déduire les vecteurs propres de l'hamiltonien $H_0 + H_{SO}$ ainsi que les niveaux d'énergie de l'état $5s$ et des états du doublet $5p$. Pourquoi le niveau $5s$ n'est-il pas modifié par H_{SO} ?
6. Les longueurs d'onde des raies d'absorption $5s - 5p$ pour le ^{85}Rb sont de $780\,nm$ et $795\,nm$. Estimer l'écart énergétique, en eV, entre les 2 niveaux du doublet de structure fine du ^{85}Rb.

IV. Structure hyperfine du ^{85}Rb

Le noyau de l'atome de ^{85}Rb possédant un moment cinétique de spin $\overrightarrow{I}$ ($I = 5/2$), il existe, dans l'hamiltonien de l'électron de valence, un terme supplémentaire de couplage entre le moment magnétique $\overrightarrow{M_I}$ du noyau et le moment magnétique $\overrightarrow{M_e}$ de l'électron :

$$H_{hf} = b\overrightarrow{M_I}.\overrightarrow{M_e} \tag{4}$$

avec : $\overrightarrow{M_I} = -g_I\mu_B\overrightarrow{I}/\hbar$; $\overrightarrow{M_L} = -g_L\mu_B\overrightarrow{L}/\hbar$ et $\overrightarrow{M_S} = -g_S\mu_B\overrightarrow{S}/\hbar$ les moments magnétiques associés aux divers moments cinétiques. La quantité $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ est le magnéton de Bohr, et les facteurs de Landé valent $g_I = -0.0003$, $g_L = 1$ et $g_S = 2$.

1. Rappeler le théorème de Wigner-Eckart et justifier que le moment magnétique total de l'électron $\overrightarrow{M_e}$ est proportionnel à $\overrightarrow{J}$ dans chaque sous-espace propre de $\overrightarrow{J}^2$:

$$\overrightarrow{M_e} = -g_J\mu_B\overrightarrow{J}/\hbar \tag{5}$$

   (sans pour l'instant faire le calcul de g_J qui sera demandé à la question IV.4).
2. Exprimer $\overrightarrow{M_e}$ en fonction de $\overrightarrow{M_L}$ et $\overrightarrow{M_S}$, puis en fonction de $\overrightarrow{L}$ et $\overrightarrow{S}$.

3. Exprimer $\overrightarrow{M_e}.\overrightarrow{J}$ en fonction de $\overrightarrow{L}$ et $\overrightarrow{S}$ seulement, puis en fonction de $\overrightarrow{L}^2$, $\overrightarrow{S}^2$ et $\overrightarrow{J}^2$ seulement.
4. En prenant une valeur moyenne adéquate, exprimer g_J en fonction de g_I, g_L, g_S, J, L et S.
5. Montrer que $g_J\left(5s_{1/2}\right) = 2$, $g_J\left(5p_{1/2}\right) = 2/3$ et $g_J\left(5p_{3/2}\right) = 4/3$.
6. Exprimer H_{hf} en fonction de $\overrightarrow{I}^2$, $\overrightarrow{J}^2$ et $\overrightarrow{F}^2$, où $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{I} + \overrightarrow{J}$ est le moment cinétique total du système.
7. Quelles sont les valeurs possibles de F pour chacun des états $5s_{1/2}$, $5p_{1/2}$ et $5p_{3/2}$?
8. Donner les niveaux d'énergie hyperfins (en fonction de μ_B, b et g_I) des multiplets associés aux états $5s_{1/2}$ et $5p_{1/2}$.
9. Quelle est la dégénérescence de ces niveaux d'énergie hyperfins ?
10. Sachant que le couplage hyperfin est d'autant plus grand que la probabilité de présence de l'électron de valence est importante à l'emplacement du noyau, expliquer pourquoi le dédoublement du niveau $5s_{1/2}$ est plus important que celui du niveau $5p_{1/2}$.
11. L'écart entre les 2 niveaux hyperfins de l'état $5s_{1/2}$ est d'environ $3\,GHz$, quelle est la valeur numérique de l'écart entre les 2 niveaux hyperfins de l'état $5p_{1/2}$?

V. Interaction avec un champ magnétique extérieur

Nous supposons maintenant que l'atome de ^{85}Rb est plongé dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ ce qui conduit à un hamiltonien supplémentaire du type :

$$H_B + H_{diam} \tag{6}$$

où H_B rend compte de l'énergie magnétique du moment magnétique total $\overrightarrow{M}$ du système (H_B est alors proportionnel à B, la norme de $\overrightarrow{B}$) et où le terme diamagnétique H_{diam} est lié à la déformation des orbites électroniques en présence du champ $\overrightarrow{B}$ (H_{diam} est proportionnel à B^2).

Lorsque B n'est pas trop intense, l'effet de H_{diam} est négligeable devant H_B, ce que nous supposerons par la suite.

1. Donner l'expression de H_B en fonction de $\overrightarrow{M}$ et $\overrightarrow{B}$.
2. Choisir judicieusement la direction de l'axe z du repère cartésien et exprimer H_B en fonction de L_z, S_z, I_z, B et des autres constantes du problème.
3. Expliquer pourquoi, lorsque le déplacement des niveaux d'énergie dus au champ $\overrightarrow{B}$ est suffisamment petit (par rapport à quoi ?), on peut exprimer H_B sous la forme :

$$H_B = \frac{\mu_B B}{\hbar}\left(g_J J_z + g_I I_z\right) \tag{7}$$

avec g_J déterminé à la partie précédente.

VI. Formule de Breit-Rabi pour la transition d'horloge du ^{85}Rb

On se place maintenant dans le cas où les effets de H_B et H_{hf} sont comparables, ou, du moins, lorsque l'on ne peut pas négliger un effet par rapport à l'autre. On note : $H_1 = H_B + H_{hf}$, et l'on suppose ici que $J = 1/2$.

1. De combien de vecteurs est formée la base $|IJ; m_I m_J\rangle$ pour le ^{85}Rb lorsque $J = 1/2$. En déduire la dégénérescence du niveau $5s_{1/2}$.
2. Est-ce que la matrice représentant H_1 est diagonale dans cette base ? (justifier sans calcul)
3. Montrer que l'opérateur $\overrightarrow{I}.\overrightarrow{J}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{I}.\overrightarrow{J} = I_z J_z + \left(I_+ J_- + I_- J_+\right)/2 \tag{8}$$

4. *(Bonus) En utilisant la question précédente, montrer (sans les calculer) que seuls sont différents de zéro les éléments de matrice* $\langle IJ; m_I m_J | H_{hf} | IJ; m'_I m'_J \rangle$ *pour lesquels :* ($m'_J = m_J$ *et* $m'_I = m_I$) *ou* ($m'_J = m_J + 1$ *et* $m'_I = m_I$ *ou* ($m'_J = m_J - 1$ *et* $m'_I = m_I + 1$).

5. On souhaite calculer, par la théorie des perturbations stationnaires, les corrections au premier ordre en H_1 du niveau d'énergie de structure fine $5s_{1/2}$. Pour cela, de quelle matrice doit-on chercher les valeurs propres ? Quelle est la dimension de cette matrice ?

A l'aide de la question VI.4, on peut montrer que cette matrice est diagonale par blocs, chaque bloc correspondant à une valeur praticulière du nombre m_F. On considère maintenant le bloc correspondant à $m_F = 0$.

6. Quels sont les 2 états $|IJ; m_I m_J\rangle$ pour lesquels $m_F = 0$? Quels sont les 2 états $|IJ; F m_F\rangle$ correspondants? Comment s'appellent les coefficients liant ces deux couples de vecteurs ?

7. En utilisant la formule donnée en annexe, exprimer le ket $I_+ J_- \left|\frac{5}{2}\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right\rangle$ en fonction du ket $\left|\frac{5}{2}\frac{1}{2}; +\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right\rangle$.

8. Montrer que
$$\left\langle \frac{5}{2}\frac{1}{2}; +\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| H_{hf} \left| \frac{5}{2}\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{5}{2}\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right| H_{hf} \left| \frac{5}{2}\frac{1}{2}; +\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = 3b\mu_B^2 g_I \qquad (9)$$

9. Ecrire la matrice représentant H_1 dans la base $\left\{\left|\frac{5}{2}\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{5}{2}\frac{1}{2}; +\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right\rangle\right\}$, et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :
$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha - \beta \end{pmatrix} \qquad (10)$$
où l'on précisera l'expression des coefficients *réels* α, β et γ. On constate alors que seul le coefficient β dépend (linéairement) de B, les coefficients α et γ dépendant linéairement de b.

10. Calculer les valeurs propres de cette matrice, d'abord en fonction de α, β et γ, puis en fonction de μ_B, b, B et g_I *(on obtient ainsi la formule de Breit-Rabi dans le cas particuliers des états s).*

11. Déterminer, à l'aide de la théorie des perturbations stationnaires, les corrections au premier ordre en H_1 du niveau d'énergie de structure fine $5s_{1/2}$ lorsque $m_I = \pm 1/2$.

12. Comment cette correction dépend-elle de B ? Pour comprendre le phénomène, reprendre la question V.3 en supposant que l'effet de $\overrightarrow{B}$ est négligeable par rapport à la structure hyperfine et montrer que la correction au premier ordre en B est proportionnelle à m_F, puis conclure.

13. Exprimer le décalage spectral $\triangle\nu$ de la transition d'horloge $(F = 2, m_F = 0) \longleftrightarrow (F = 3, m_F = 0)$ dû à B^2. Quel est, qualitativement, le domaine de validité de cette expression (par exemple, par rapport à H_{SO} et H_{diam}) ?

Annexe : formules et données utiles

$$h = 6,63.10^{-34}\, J.s \qquad c = 3.10^8\, m.s^{-1} \qquad e = 1,6.10^{-19}\, C$$
$$J_\pm = J_x \pm iJ_y \qquad J_\pm |J, m_J\rangle = \hbar\sqrt{J(J+1) - m_J(m_J \pm 1)}\, |J, m_J \pm 1\rangle$$

CORRIGÉ - EXAMEN - ΦΦA - 2011-2012
ΠΡΦ51

RAPPEL DU
N° DE PLACE

I. 1) $\underbrace{\text{rotation / isotropie}}_{\text{pot. central}}$ → indépendant de m_L
→ $-L \leq m_L \leq +L$ ⇒ $\text{dégé}(E_{nL}) = 2L+1$

2) $E_n(H_{\text{sans spin}}) = n^2 \neq 2L+1$ $(E_n \cancel{L})$

bonus 3) δ_L est lié à l'interaction de l'e^- de valence avec le noyau central et les autres e^- qui écrantent le noyau. Il est d'autant ⊕ ⚠ que l'e^- a une proba. de présence non négligeable dans cette zone centrale. Il décroît donc avec L.

bonus 4) Car le "cœur" d'un atome de Na est ⊕ petit que celui d'un atome de Rb

II 1) $S = 1/2 \Rightarrow m_S = \pm 1/2$

2) $\vec{L}^2 |n L m_L ; S m_S\rangle = \hbar^2 L(L+1) . |n L m_L ; S m_S\rangle$

L_z " $= m_L . \hbar$. "

$\vec{S}^2$ " $= \hbar^2 S(S+1)$. "

S_z " $= m_S . \hbar$. "

3) niveau s ⇔ $L = 0$ ⇒ $m_L = 0$

4) $5s$: $L = 0$; $m_L = 0$; $S = 1/2$; $m_S = \pm 1/2$ ⇒ $\boxed{\text{dégé} = 2}$

5) $5p$: $L = 1$; $m_L = -1, 0, +1$; $S = 1/2$; $m_S = \pm 1/2$ ⇒ $\boxed{\text{dégé} = 2 \times 3 = 6}$

III 1) bonus

$[a.\vec{L}.\vec{S} , L_x + S_x] = a[L_y . S_y , L_x + S_x] + a[L_z S_z , L_x + S_x]$

$= a[L_y, L_x].S_y + a.L_y[S_y, S_x] + a[L_z, L_x].S_z + aL_z[S_z, S_x]$

$\left([L_x, L_y] = i\hbar L_z \text{ + perm. circ.} \right)$

$= aS_y.\cancel{(-i\hbar).L_z} + a.\cancel{L_y.(-i\hbar)}S_z$
$+ a.\cancel{S_z.(i\hbar)}.L_y + a.\cancel{L_z.(i\hbar)}.S_y = 0$

$\rightarrow$ par symétrie : $[a.\vec{L}.\vec{S}\,,\ \vec{L}+\vec{S}] = \vec{0}$

III. 2) $|L-S| \leq J \leq L+S$ (avec $S = 1/2$)

3) $5s : L=0 \Rightarrow \boxed{J = 1/2}$; $5p : L=1 \Rightarrow \boxed{J = 1/2 \text{ ou } 3/2}$

$5s_{1/2}$ $\qquad$ $5p_{1/2}$ $\quad$ $5p_{3/2}$

4) $H_{SO} = a.\dfrac{\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2}{2}$ $\rightarrow$ vp : $\dfrac{a\hbar^2}{2}.\left(J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)\right)$

5) $E(5s_{1/2}) = E_{50} + 0$

VP $|nLSJm_J\rangle$

$|5\,0\,1/2\,1/2\,\pm 1/2\rangle$ ②

ou

$|5\,1\,1/2\,1/2\,\pm 1/2\rangle$ ②

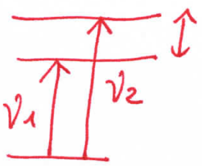
ou

$|5\,1\,1/2\,3/2\,\pm 1/2, \pm 3/2\rangle$ ④

$$E(5p_{1/2}) = E_{51} + \underbrace{\frac{a\hbar^2}{2}.\left(\cancel{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1)} - 1(1+1) - \cancel{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1)}\right)}_{= -a\hbar^2}$$

$$E(5p_{3/2}) = E_{51} + \underbrace{\frac{a\hbar^2}{2}.\left(\underbrace{\tfrac{3}{2}(\tfrac{3}{2}+1)}_{15/4} - \underbrace{1(1+1)}_{-2} - \underbrace{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1)}_{-3/4}\right)}_{+\frac{a\hbar^2}{2}}$$

$\rightarrow$ niveau 5s pas modifié par tout opérateur dépendant de $\vec{L}$ puisque $L = 0 = m_L$

6) 

$$\text{écart} = \frac{3a\hbar^2}{2} = h(\nu_2 - \nu_1)$$
$$= hc\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)$$
$$= hc.\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1.\lambda_2}$$
$$\simeq \frac{hc}{\lambda_1^2}.(\lambda_1 - \lambda_2)$$
$$\simeq 1{,}24.10^{-6}.\frac{15.10^{-9}}{(800.10^{-9})^2}$$
$$\simeq 0{,}03 \text{ eV}$$

IV 1) W-E : Th. Tout opérateur vectoriel (vis-à-vis d'un op. de moment cinétique $\vec{J}$) est proportionnel à $\vec{J}$ dans chaque sous-espace propre $\mathcal{E}_J$ de $\vec{J}^2$.

RAPPEL DU
N° DE PLACE

on montrer que $\vec{\mu}_e$ est op. vectoriel par $\vec{J}$

$\Rightarrow \vec{L} \propto \vec{J}$ et $\vec{S} \propto \vec{J}$ dans $\mathcal{E}_J$

donc $\vec{\mu}_L$ et $\vec{\mu}_S \propto \vec{J}$ dans $\mathcal{E}_J$

donc $\vec{\mu}_e = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S \propto \vec{J}$ dans $\mathcal{E}_J$ $= -g_J \cdot \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \vec{J}$

2) $$\vec{\mu}_e = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S = -\frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \left(g_L \cdot \vec{L} + g_S \cdot \vec{S}\right)$$

3) $$\vec{\mu}_e \cdot \vec{J} = -\frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \left(g_L \cdot \vec{L} + g_S \cdot \vec{S}\right) \cdot \left(\vec{L} + \vec{S}\right)$$
$$= -\frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \left(g_L \cdot \vec{L}^2 + g_S \cdot \vec{S}^2 + (g_L + g_S) \cdot \underbrace{\vec{L} \cdot \vec{S}}_{\frac{\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2}{2}}\right)$$

4) $$\langle \vec{\mu}_e \cdot \vec{J} \rangle_{|n L S J m_J\rangle} = -g_J \cdot \mu_B \cdot \hbar \cdot J(J+1)$$
$$= -\mu_B \cdot \hbar \cdot \left(g_L \cdot L(L+1) + g_S \cdot S(S+1) + \frac{g_L + g_S}{2} \cdot \left(J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{g_J = \frac{g_L + g_S}{2} + \frac{g_S - g_L}{2} \cdot \frac{S(S+1) - L(L+1)}{J(J+1)}}$$

(1 → g_L, 2 → g_S)

5) $$g_J(5S_{1/2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2\,(1/2+1) - 0}{1/2\,(1/2+1)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{2}$$

$$g_J(5P_{1/2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2\,(1/2+1) - 1(1+1)}{1/2\,(1/2+1)} = \frac{3}{2} - \frac{5}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$g_J(5P_{3/2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2\,(1/2+1) - 1(1+1)}{3/2\,(3/2+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

6) $$H_{hf} = b \cdot \left(-g_I \cdot \frac{\mu_B}{\hbar}\right) \cdot \vec{I} \cdot \left(-g_J \cdot \frac{\mu_B}{\hbar}\right) \cdot \vec{J} = +b \cdot \frac{\mu_B^2}{\hbar^2} \cdot g_I \cdot g_J \cdot \underbrace{\vec{I} \cdot \vec{J}}_{\frac{\vec{F}^2 - \vec{I}^2 - \vec{J}^2}{2}}$$

$$\left(\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}\right)$$

IV. 7) $5s_{1/2}$ et $5p_{1/2}$: $\underbrace{|I-J|}_{2} \leq F \leq \underbrace{I+J}_{3}$: $\boxed{F = 2 \text{ ou } 3}$

$5p_{3/2}$: $1 \leq F \leq 4$: $\boxed{F = 1, 2, 3 \text{ ou } 4}$

8) $5s_{1/2}$: $E_{50} + 0 + b.\mu_B^2 \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} g_I . \left(\underbrace{F(F+1)}_{\substack{2(2+1)=6 \\ \text{ou } 3(3+1)=12}} - \underbrace{\underbrace{I(I+1)}_{\frac{5}{2}(\frac{5}{2}+1) = \frac{35}{4}} - \underbrace{J(J+1)}_{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) = 3/4}}_{\frac{38}{4} = \frac{19}{2}} \right)$

$\left(\begin{array}{l} 6 - \frac{19}{2} = -7/2 \\ 12 - \frac{19}{2} = 5/2 \end{array} \right)$

$b.\mu_B^2 . g_I . \left| \begin{array}{l} \left(-7/2\right) \text{ si } F=2 \\ \left(+5/2\right) \text{ si } F=3 \end{array} \right.$

$5p_{1/2}$: $E_{51} - ah^2 + b.\mu_B^2 . g_I . \frac{2/3}{\cancel{2}} . \left(\underbrace{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}_{\text{idem}} \right)$

idem $-7/2$ si $F=2$

$+5/2$ si $F=3$

$b.\mu_B^2 . g_I . \left| \begin{array}{l} \left(-\frac{7}{6}\right) \text{ si } F=2 \\ \left(+\frac{5}{6}\right) \text{ si } F=3 \end{array} \right.$

9) $F=2 \Rightarrow m_F = -2, -1, 0, +1, +2$: $\underline{\text{dégé} = 5}$

$F=3 \Rightarrow m_F = -3$, " , $+3$: $\underline{\text{dégé} = 7}$

10) $\underbrace{s : L = 0}_{\text{proba. de présence} \oplus \text{ grande}}$ / $p : L = 1$

11) écart entre $F=2$ et $F=3$ de $5s_{1/2}$: $6 . b . \mu_B^2 . g_I \leftrightarrow 3\,GHz$

" " " $5p_{1/2}$: $2 . b . \mu_B^2 . g_I \Rightarrow \boxed{1\,GHz}$

RAPPEL DU
N° DE PLACE

V

1) $H_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

2) $= -\mu_z \cdot B$ avec $\vec{B} = B \cdot \vec{e_z}$

$= +\frac{\mu_B}{\hbar} \cdot B \cdot \left(g_L \cdot L_z + g_S \cdot S_z + g_I \cdot I_z \right)$

3) $(H_B) \ll (H_1) \Rightarrow \vec{J}$ = moment cinétique total de l'é⁻ peu perturbé par $\vec{B}$ (et $\vec{I}$)

$\Rightarrow J$ = "bon" nombre Q

$\Rightarrow g_L \cdot L_z + g_S \cdot S_z = g_J \cdot J_z$

VI

1) $I = 5/2 \Rightarrow m_I = -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{5}{2}$: 6 vecteur $|I\ m_I\rangle$

$J = 1/2 \Rightarrow m_J = \pm 1/2$: 2 vecteur $|J\ m_J\rangle$

$\Rightarrow$ 12 vecteur $|I\ J\ ;\ m_I\ m_J\rangle$

$5S_{1/2}$: ~~son~~ énergie (dans le cadre du pb. posé) ne dépend pas de I_z et J_z lorsqu'on ne prend pas en compte H_1 $\Rightarrow$ $\boxed{\text{dégé} = 12}$

2) $H_1 = H_B + H_{hf} \longrightarrow$ fct de $\vec{I} \cdot \vec{J} = \underbrace{I_x \cdot J_x + I_y \cdot J_y}_{\text{fct de } I_\pm,\ J_\pm \text{ pas diago}} + \underbrace{I_z\, J_z}_{\text{diago}}$

H_B ↳ fct de I_z et J_z $\Rightarrow$ diago.

$\Longrightarrow$ H_1 pas diago

3) $\vec{I} \cdot \vec{J} = I_z \cdot J_z + \underbrace{\frac{I_+ + I_-}{2} \cdot \frac{J_+ + J_-}{2} + \frac{I_+ - I_-}{2i} \cdot \frac{J_+ - J_-}{2i}}_{\frac{I_- \cdot J_+ \ +\ I_+ \cdot J_-}{4} \times 2}$

ok

4) $I_- \cdot J_+ |m_I\ m_J\rangle \propto |m_I - 1\ ;\ m_J + 1\rangle$

$I_+\, J_- |\ \text{"}\ \rangle \propto |m_I + 1\ ;\ m_J - 1\rangle$

$I_z \cdot J_z |\ \text{"}\ \rangle \propto |m_I\ ;\ m_J\rangle$

VI. 4) (suite)

donc les seuls éléments de matrice non-nuls sont ceux de l'énoncé.

5) niveaux de structure fine : $nLSJ$: $5S_{1/2}$ dégé 12 fois

↳ perturb statio ⇒ correction au 1er ordre en H_1 $|nLSJI; M_I M_J\rangle$

= v.p. de la mat. de H_1

dans la base des $\{|IJ; m_I M_J\rangle\}$

⇒ matrice 12×12 !

6) $m_F = 0 = m_I + m_J$ or $m_J = \pm 1/2$ donc 2 cas :

$m_I = +1/2$ et $m_J = -1/2$ → $|+-\rangle$

ou

$m_I = -1/2$ et $m_J = +1/2$ → $|-+\rangle$

pour $F = 2$ ou 3 ⇒ $\{|20\rangle, |30\rangle\}$ exprimés en fct des vecteurs $\{|+-\rangle, |-+\rangle\}$ par l'intermédiaire des coef. de Clebsch-Gordan.

7) $$I_+ \left|\overset{I}{\tfrac{5}{2}}\ \overset{m_I}{-\tfrac{1}{2}}\right\rangle = \hbar\sqrt{\underbrace{I(I+1)}_{\frac{35}{4}} - \underbrace{\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}+1\right)}_{1/4}}\ \left|\tfrac{5}{2}\ +\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$= 3\hbar \left|\tfrac{5}{2}\ +\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$\frac{36}{4} = 9 = 3^2$

$$J_- \left|\overset{J}{\tfrac{1}{2}}\ \overset{m_J}{\tfrac{1}{2}}\right\rangle = \hbar \cdot \sqrt{\underbrace{J(J+1)}_{3/4} - \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}-1\right)}_{1/4}}\ \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$= \hbar \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{I_+ . J_- \left|\tfrac{5}{2}\ \tfrac{1}{2}; -\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle = 3\hbar^2 . \left|\tfrac{5}{2}\ \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle}$$

$I\ J\ \ m_I\ m_J$

RAPPEL DU N° DE PLACE

VI. 8) $H_{hf} = b \cdot \frac{\mu_B^2}{\hbar^2} \cdot g_I \cdot g_J \cdot \underbrace{(\vec{I} \cdot \vec{J})}_{I_z \cdot J_z + \frac{I_+ J_- + I_- J_+}{2}}$; $g_J \to 2$

$\Rightarrow \langle \frac{I}{2}\, \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\, -\frac{1}{2} | H_{hf} | \frac{I}{2}\, \frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\, \frac{1}{2} \rangle = b \cdot \mu_B^2 \cdot g_I \cdot 3$

et idem (par symétrie $+ \leftrightarrow -$ des $I_\pm$, $J_\pm$)

9) $H_1 = H_B + H_{hf} = \left[\frac{\mu_B \cdot B}{\hbar} \cdot (g_I \cdot I_z + g_J \cdot J_z) + b \cdot \frac{\mu_B^2}{\hbar^2} \cdot g_I \cdot g_J \, I_z J_z \right]$ ($g_J \to 2$)

termes diago.

$+ \underbrace{\frac{b \cdot \frac{\mu_B^2}{\hbar^2} \cdot g_I \cdot g_J}{2} \cdot (I_+ J_- + I_- J_+)}$ ($g_J \to 2$)

termes hors-diago calculés avant.

$$\Rightarrow \Big(H_1 \Big)_{|I J ; m_I m_J\rangle} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha - \beta \end{pmatrix}$$

avec:

$$\alpha = -\frac{b \cdot \mu_B^2 \cdot g_I}{2}$$

($m_I \cdot m_J = -1/4$ pour les 2 termes diago)

$$\beta = \mu_B \cdot B \cdot \left(1 - g_I/2\right)$$

$$\gamma = 3 \cdot b \cdot \mu_B^2 \cdot g_I$$

10) vp: solutions de $\begin{vmatrix} \alpha + \beta - \lambda & \gamma \\ \gamma & \alpha - \beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$ ie $\alpha \pm \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$

ie $$\boxed{-\frac{b \cdot \mu_B^2 \cdot g_I}{2} \pm \sqrt{\mu_B^2 \cdot \left(1 - \frac{g_I}{2}\right)^2 \cdot B^2 + 9 \cdot b^2 \cdot \mu_B^4 \cdot g_I^2}}$$

(Breit-Rabi formula)

VI. 11) corr. du 1^er^ ordre en H_1 ~~= corr. du 1^er^ ordre en b et B~~

= les v.p. précédents

12) fct. de B^2 et pas de B.

→ V. 3) $H_B \perp F_z$ (W-E)

si B très petit

⇒ effet de B = 0 au 1^er^ ordre en B

si $m_F = 0$

13) Ecart entre $(F=2, m_F=0)$ et $(F=3, m_F=0)$

= écart entre les 2 v.p. précédents

$$= 2 \cdot \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{\mu_B^2 \cdot \left(1 - \frac{g_I}{2}\right)^2 \cdot B^2 + 9 \cdot b^2 \cdot \mu_B^4 \cdot g_I^2}$$

$$= h \cdot \Delta\nu$$

Si l'on considère cette correction en B^2, il faudrait, en toute rigueur, vérifier que la correction du second ordre (→ Hdiam) est plus petite et que la correction de structure fine est plus grande.