Examen

Durée : 2 heures
Aucun document ni calculette autorisé

La partie I est indépendante. Les parties II et III sont liées.

I. Applications immédiates du cours

L'espace des états admet pour base orthonormée les trois kets $\{ |a\rangle , |b\rangle , |c\rangle \}$. On considère les quatre observables

$$
\begin{aligned}
A &= K\big(|a\rangle \langle a| + |b\rangle \langle b| - |c\rangle \langle c| \big) \\
B &= iL\big(|a\rangle \langle b| - |b\rangle \langle a| \big) \\
C &= M\big(|a\rangle \langle a| - |b\rangle \langle b| + |c\rangle \langle c| \big) \\
H &= E\big(|a\rangle \langle a| + |b\rangle \langle b| + 3\, |c\rangle \langle c| \big)
\end{aligned}
$$

où K, L, M et E sont des réels strictement positifs.

1. Donner les valeurs propres des opérateurs A, B, C et H et les vecteurs propres associés.
2. On considère les couples d'opérateurs $\{A, B\}$, $\{A, H\}$ et $\{B, C\}$. Donner pour chaque couple, lorsqu'elle existe, une base de vecteurs propres communs aux deux opérateurs. Parmi ces couples, lesquels forment un ECOC ?
3. On considère le ket $|\psi\rangle = |a\rangle + i\,|b\rangle + (1 + i)\,|c\rangle$. Calculer $\langle\psi|\psi\rangle$, $|\phi\rangle = B\,|\psi\rangle$, $\langle\phi|\phi\rangle$ et $\langle\psi|\phi\rangle$.
4. Calculer, lorsque le système est dans l'état $|\psi\rangle$, la valeur moyenne $\langle B\rangle$, et l'écart quadratique ΔB, de la mesure de B.
5. On effectue une mesure de H sur l'état $|\psi\rangle$. Quels sont les résultats possibles et leurs probabilités. Donner dans chaque cas l'état du système immédiatement après la mesure.
6. On considère H comme l'hamiltonien du système. A l'instant $t_0 = 0$, le système est décrit par le ket $|\psi\rangle$. Donner un ket qui décrive l'état du système à un instant t. Montrer que le système se retrouve périodiquement dans le même état physique que l'état initial. Donner la période T de cette évolution.

II. Magnétisme atomique du potassium

Le potassium a le numéro atomique $Z = 19$. Dans l'état fondamental les moments cinétiques électroniques sont caractérisés par les nombres atomiques $S = 1/2$ pour le spin total et $L = 0$ pour le moment orbital total. Le noyau de potassium, ${}^{39}_{19}\mathrm{K}$, présente un spin nucléaire caractérisé par le nombre quantique $I = 3/2$. Dans tout le problème L, S et I restent constants.

1. Donner la valeur du nombre quantique J, associé au moment électronique total de l'ensemble des électrons, ainsi que la notation spectroscopique correspondante.
2. Rappeler le lien entre moment cinétique et moment magnétique. Qu'est-ce que le facteur de Landé ?
3. Rappeler la valeur du facteur de Landé associé au spin électronique g_S, ainsi que la valeur du facteur de Landé associé au moment orbital électronique g_L. Calculer la valeur numérique du facteur de Landé électronique g_e.

4. On donne la valeur du facteur de Landé nucléaire du potassium, $g_N = 0,4$, ainsi que le rapport de la masse de l'électron à celle du proton, $m_e/m_p = 5,4 \times 10^{-4}$. Comparer les moments magnétiques d'origine nucléaire et d'origine électronique.
5. Une base de l'espace des états est donnée par l'ensemble des vecteurs notés $|n; L, S; J, m_J\rangle\, |I, m_I\rangle$ où $\{|n; L, S; J, m_J\rangle\}$ est la base standard de l'espace des états électroniques et $\{|I, m_I\rangle\}$ est la base standard de l'espace des états du noyau. En première approximation, nous négligeons la contribution du spin nucléaire à l'hamiltonien du système. Le vecteur $|n; L, S; J, m_J\rangle\, |I, m_I\rangle$ est alors vecteur propre de l'hamiltonien H et satisfait la relation
$$H\, |n; L, S; J, m_J\rangle\, |I, m_I\rangle = E_{n;L,S;J,m_J}\, |n; L, S; J, m_J\rangle\, |I, m_I\rangle$$
On suppose qu' à l'instar de L, S et J, le nombre quantique n reste constant dans tout le problème : $n = 4$. Par conséquent, l'énergie $E_{n;L,S;J,m_J}$ ne peut dépendre que de m_J. On admet cependant qu'il n'en est rien : $E_{n;L,S;J,m_J} = E_0$ avec E_0 indépendante de m_J.
Rappeler ce qu'est la base standard et ce que représentent respectivement L, S, J et m_J pour les vecteurs de la base standard. Donner les valeurs susceptibles d'être prises par m_J et m_I. En déduire la dimension de l'espace des états considérés ainsi que la dégénérescence de l'énergie E_0.
6. On néglige ici le magnétisme d'origine nucléaire. Immergé dans un champ magnétique faible, $B = \|\vec{B}\|$, de direction constante $\vec{u}_z$, l'énergie de l'atome de potassium subit une petite modification ΔE_B. Démontrer la relation $\Delta E_B = K \cdot B$ où K est une constante susceptible de prendre deux valeurs dont on donnera l'expression et la valeur numérique en eV T^{-1}. Montrer que les dégénérescences de l'énergie sont partiellement levées.

III. Structure hyperfine du potassium

On considère, en l'absence de champ magnétique, le couplage des moments magnétiques électronique et nucléaire. Ce couplage engendre une perturbation de l'hamiltonien $\Delta H = A(\vec{I} \cdot \vec{J})$ où $\vec{I}$ et $\vec{J}$ sont respectivement les moments cinétiques d'origine nucléaire et électronique tandis que A est, ici, une constante réelle strictement positive. Le moment cinétique total est $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$.

1. Rappeler que les valeurs propres de $\vec{F}^2$ s'expriment en fonction d'un nombre quantique F. Donner leur expression en fonction de F et préciser les valeurs de F dans le cas du potassium considéré.
2. Démontrer qu'à chaque valeur de F correspond un niveau d'énergie $E_F = E_0 + \Delta E_F$. Exprimer, en fonction de A, pour chacune des valeurs de F, la perturbation de l'énergie ΔE_F. Donner l'ordre de dégénérescence des niveaux d'énergie pour chaque valeur de F.
3. Soient F_1 et F_2 les deux plus petites valeurs de F possibles. On pose $\delta E = |\Delta E_{F_1} - \Delta E_{F_2}|$. La fréquence de la transition $\nu = \dfrac{\delta E}{2\pi\hbar}$ est mesurée ; on trouve $\nu = 462\mathrm{MHz}$. En déduire la valeur de la constante $A\hbar$.

Formulaire

On donne la valeur du magnéton de Bohr : $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e} = 9,3 \times 10^{-24}\mathrm{JT}^{-1}$
On rappelle, sans autres explications, l'expression de g :
$$g = \frac{g_1 + g_2}{2} + \frac{g_1 - g_2}{2}\frac{J_1(J_1+1) - J_2(J_2+1)}{J(J+1)}$$

Examen

Durée : 2 heures
Aucun document ni calculette autorisé

La partie I est indépendante. Les parties II et III sont liées.

I. Applications immédiates du cours

1. Les tableaux ci-dessous résument les valeurs propres et vecteurs propres de chaque opérateur.

A	
Val. ppre	Vec. ppre
K	$\|a\rangle$
K	$\|b\rangle$
$-K$	$\|c\rangle$

B	
Val. ppre	Vec. ppre
L	$\|a\rangle - i\,\|b\rangle$
$-L$	$\|a\rangle + i\,\|b\rangle$
0	$\|c\rangle$

C	
Val. ppre	Vec. ppre
M	$\|a\rangle$
$-M$	$\|b\rangle$
M	$\|c\rangle$

H	
Val. ppre	Vec. ppre
E	$\|a\rangle$
E	$\|b\rangle$
$3E$	$\|c\rangle$

2. Dans les tableaux ci-dessous, la première ligne représente le couple d'opérateurs considérés, la seconde ligne, quand elle existe, donne une liste de vecteurs propres communs qui forment une base de l'espace des états, la troisième ligne donne les couples de vecteurs propres associés à chaque vecteur propre.

$\{A, B\}$		
$\|a\rangle - i\,\|b\rangle$	$\|a\rangle + i\,\|b\rangle$	$\|c\rangle$
$\{K, L\}$	$\{K, -L\}$	$\{-K, 0\}$

$\{A, H\}$		
$\|a\rangle$	$\|b\rangle$	$\|c\rangle$
$\{K, E\}$	$\{K, E\}$	$\{-K, 3E\}$

$\{B, C\}$
pas de base de vecteurs propres communs

Pour le couple $\{A, H\}$ la liste donnée n'est pas unique. Les deux premiers vecteurs propres peuvent être remplacés par des combinaisons linéaires indépendantes, mais arbitraires, de $|a\rangle$ et $|b\rangle$. Par contre pour le couple $\{A, B\}$, à chaque vecteur propre correspond un unique couple de valeurs propres. Seul le couple $\{A, B\}$ forme donc un ECOC.

3.
$$\boxed{\langle\psi|\psi\rangle = 4}$$
$$|\phi\rangle = B\,|\psi\rangle \boxed{= -L\big(|a\rangle + i\,|b\rangle\big)}$$
$$\boxed{\langle\phi|\phi\rangle = 2L^2}$$
$$\boxed{\langle\psi|\phi\rangle = -2L}$$

4.

$$\langle B\rangle = \frac{\langle\psi|B|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{-2L}{4} \boxed{= -\frac{L}{2}}$$

$$\left\langle B^2\right\rangle = \frac{\langle\psi|B^2|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\langle\phi|\phi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{2L^2}{4} = \frac{L^2}{2}$$

d'où

$$\Delta B = \sqrt{\langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2} = \sqrt{\frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{4}} = \boxed{\frac{L}{2}}$$

5. Les résultats possibles de la mesure de H sur l'état $|\psi\rangle$ sont les valeurs propres de l'opérateur H. La probabilité d'obtenir ce résultat s'obtient en projetant l'état $|\psi\rangle$:

$$\mathcal{P} = \frac{\langle\psi|\psi_+\rangle\,\langle\psi_+|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle\,\langle\psi_+|\psi_+\rangle}$$

où $|\psi_+\rangle$ est le projeté du vecteur $|\psi\rangle$ sur le sous-espace propre correspondant à la valeur mesurée. Le vecteur $|\psi_+\rangle$ décrit aussi l'état du système après la mesure.

Résultat	$\|\psi_+\rangle$	Probabilité
E	$\|a\rangle + i\,\|b\rangle$	1/2
$3E$	$(1+i)\,\|c\rangle$	1/2

6. Le ket $|\psi\rangle$ est déjà développé dans la base des vecteurs propres de l'hamiltonien H. Donc l'état à l'instant t est décrit par le ket

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= e^{-iEt/\hbar}\,|a\rangle + ie^{-iEt/\hbar}\,|b\rangle + (1+i)e^{-3iEt/\hbar}\,|c\rangle \\ &= e^{-iEt/\hbar}\big[\,|a\rangle + i\,|b\rangle + (1+i)e^{-2iEt/\hbar}\,|c\rangle\big]\end{aligned}$$

ou encore, en éliminant une phase sans sens physique, par le ket

$$\left|\psi'(t)\right\rangle = |a\rangle + i\,|b\rangle + (1+i)e^{-2iEt/\hbar}\,|c\rangle$$

qui évolue cycliquement avec une période

$$\boxed{T = \frac{\pi\hbar}{E}}$$

II. Magnétisme atomique du potassium

1. Le nombre quantique J peut prendre toutes les valeurs comprises entre $L+S$ et $|L-S|$ par pas de 1. Dans ce cas, la valeur de J est donc $\boxed{J = \frac{1}{2}}$. La notation spectroscopique est $\boxed{{}^2S_{1/2}}$.

2. Le moment magnétique est proportionnel au moment cinétique. Pour l'électron cela donne

$$\vec{\mu} = -g\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}$$

où g est le facteur de Landé et μ_B le magnéton de Bohr.

3. Nous avons $g_S = 2$ et $g_L = 1$. En utilisant la formule du formulaire nous trouvons

$$g_e = \frac{2+1}{2} + \frac{2-1}{2} \times \frac{3/4-0}{3/4} \boxed{= 2}$$

ce qui est normal puisque $L = 0$, le moment cinétique électronique est uniquement dû au spin.

4. Nous avons
$$|\mu_e| = g_e \mu_B |m_J| = \mu_B$$
tandis que
$$|\mu_N| = g_N \frac{e}{2m_p}|m_I| < 0,4\frac{e}{2m_p} \times \frac{3\hbar}{2}$$
Le rapport vérifie donc la relation
$$\frac{|\mu_N|}{|\mu_e|} < 0,6\frac{m_e}{m_p} \sim 3,2 \times 10^{-4} << 1$$
On peut donc négliger le moment magnétique nucléaire dans la plupart des cas.

5. La base standard est constituée des vecteurs propres des opérateurs $\vec{L}^{\,2}$, $\vec{S}^{\,2}$, $\vec{J}^{\,2}$ et J_z. Les nombres L, S, J et m_J sont les nombres quantiques associés à chacun des opérateurs précédents
$$\begin{aligned}
\vec{L}^{\,2}\,|n;L,S;J,m_J\rangle &= \hbar^2 L(L+1)\,|n;L,S;J,m_J\rangle\\
\vec{S}^{\,2}\,|n;L,S;J,m_J\rangle &= \hbar^2 S(S+1)\,|n;L,S;J,m_J\rangle\\
\vec{J}^{\,2}\,|n;L,S;J,m_J\rangle &= \hbar^2 J(J+1)\,|n;L,S;J,m_J\rangle\\
J_z\,|n;L,S;J,m_J\rangle &= \hbar m_J\,|n;L,S;J,m_J\rangle
\end{aligned}$$
Les nombres quantiques m_J et m_I peuvent prendre les valeurs $\boxed{m_J = \pm\frac{1}{2}}$ et $\boxed{m_I = \pm\frac{1}{2} \text{ ou } \pm\frac{3}{2}}$.
La dimension de l'espace, d, est aussi le degré de dégénérescence de E_0 : $d = 2 \times 4$ soit $\boxed{d = 8}$.

6. L'hamiltonien d'interaction entre le champ magnétique et le moment magnétique s'écrit
$$H_B = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = g_e\frac{eB}{2m_e}J_z$$
Comme $m_J = \pm\frac{1}{2}$, nous avons donc
$$\Delta E_B = \pm\frac{eB}{2m_e}\hbar = K \cdot B$$
avec $\boxed{K = \pm\mu_B = \pm 5,8 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV\,T^{-1}}}$

III. Structure hyperfine du potassium

1. Les valeurs propres de $\vec{F}^{\,2}$ s'expriment en fonction du nombre quantique F et valent $\hbar^2 F(F+1)$. Le nombre F peut prendre toutes les valeurs par pas de un entre $J + I = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$ et $|J - I| = \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right| = 1$ soit $\boxed{F = 1 \text{ ou } 2}$.

2. L'hamiltonien ΔH peut se réécrire
$$\Delta H = A\left(\vec{I}\cdot\vec{J}\right) = \frac{A}{2}\left(\vec{F}^{\,2} - \vec{I}^{2} - \vec{J}^{2}\right)$$
et est diagonal dans la base des vecteurs propres $|n;L,S;J,I;F,m_F\rangle$. Comme H est dégénéré d'ordre 8, c'est-à-dire proportionnel à l'opérateur unité dans l'espace des états, pour chaque valeur de F il correspond un niveau d'énergie $E_F = E_0 + \Delta E_F$ avec
$\Delta E_F = \frac{A\hbar^2}{2}\left[F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)\right]$ dont les valeurs sont les suivantes
$I = \frac{3}{2}, J = \frac{1}{2}, F = 1 \Rightarrow \boxed{\Delta E_1 = -\frac{5}{4}A\hbar^2}$ avec $m_F = -1, 0, 1$ d'où la dégénérescence $\boxed{d_1 = 3}$
$I = \frac{3}{2}, J = \frac{1}{2}, F = 2 \rightarrow \boxed{\Delta E_2 = \frac{3}{4}A\hbar^2}$ avec $m_F = -2, -1, 0, 1, 2$ d'où la dégénérescence $\boxed{d_2 = 5}$

3. $\delta E = |\Delta E_1 - \Delta E_2| = 2A\hbar^2$ d'où $\nu = \frac{\delta E}{2\pi\hbar} = \frac{2A\hbar}{2\pi}$ soit $A\hbar = \pi\nu$ et $\boxed{A\hbar = 1,45 \times 10^{9}\mathrm{s}^{-1}}$.